1º semestre de 2017

Gabarito Lista de exercícios 9 – Teorema do Limite Central

Exercício 1

A altura média dos estudantes do sexo masculino em uma universidade é de 170 cm com desvio padrão de 12 cm. Uma amostra aleatória de de 64 estudantes dessa universidade é observada. Calcule aproximadamente:

(a) a probabilidade da média amostral não ultrapassar 172 cm

(b) ultrapassar 175 cm,

(c) otenha aproximadamente o primerio e terceiro quartis da média amostral. Qual é a mediana?

Solução

Seja U a altura de um estudante do sexo masculino de uma universidade. Temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(U) &= \mu = 170. \\ \mathrm{Var}(U) &= \sigma^2 = 12^2 = 144. \end{aligned}$$

Seja X a altura de 64 estudantes do sexo masculino desta universidade. Temos que,

$$\begin{aligned} \mu_X &= 64 \times 170. \\ \sigma^2_X &= 64 \times 12^2 = (8 \times 12)^2. \end{aligned}$$

Seja $\overline{X}$ a altura média dos 64 estudantes do sexo masculino desta universidade. Temos que,

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{X}} &= 170. \\ \sigma^2_{\overline{X}} &= \frac{12^2}{64} = \frac{12^2}{8^2} \end{aligned}$$

(a) A probabilidade da média amostral não ultrapassar 172 cm é dada por,

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \leq 172) &= P\left(Z \leq \frac{172 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{172 - 170}{12/8}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{2 \times 8}{12}\right) = P\left(Z \leq 1,33\right) = 0,9082 \end{aligned}$$

(b) A probabilidade da média amostral ultrapassar 175 cm é dada por,

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \geq 175) &= P\left(Z \geq \frac{175 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{175 - 170}{12/8}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{5 \times 8}{12}\right) = P\left(Z \geq 3,33\right) = 1 - P\left(Z \leq 3,33\right) = 1 - 0,9996 = 0,0004 \end{aligned}$$

(c) O primerio quartil aproximadamente é dado por

$$
\begin{aligned}
&P(\overline{X} \leq k_1) = 0,25 \\
&\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{k_1 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = 0,25 \\
&\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{k_1 - 170}{12/8}\right) = 0,25
\end{aligned}
$$

em que $c_1 = \frac{k_1-170}{12/8}$. Pela Tabela da normal, $c_1 = -0,67$. Assim obtemos,

$$c_1 = \frac{k_1 - 170}{12/8} = -0,67 \Rightarrow k_1 = 170 - 1,005 = 168,995.$$

Portanto, o primeiro quartil é aproximadamente 168,995 cm.

Agora o terceiro quartil da média amostral é dado por

$$
\begin{aligned}
&P(\overline{X} \leq k_3) = 0,75 \\
&\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{k_3 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = 0,75 \\
&\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{k_3 - 170}{12/8}\right) = 0,75
\end{aligned}
$$

em que $c_3 = \frac{k_3-170}{12/8}$. Pela Tabela da normal, $c_3 = 0,67$. Assim obtemos,

$$c_3 = \frac{k_3 - 170}{12/8} = 0,67 \Rightarrow k_3 = 170 + 1,005 = 171,005$$

Portanto, o terceiro quartil é aproximadamente 168,995 cm.

Por último, considerando que a distribuição aproximada de $\overline{X}$ é Normal e por propriedade desta distribuição, $\mu_{\overline{X}}$ é também a mediana, assim a mediana aproximada é dada por 170 cm.

Exercício 2

Uma ONG recebe em média R$60,00 por doação com desvio padrão de R$30,00. A ONG precisa de pelo menos R$10.000,00 por mês para pagamento das despesas fixas. Responda:

(a) Se num determinado mês a ONG recebe 160 doações qual a probabilidade de não conseguir o suficiente para o pagamento das despesas fixas?

(b) Quantos doadores no mínimo deve ter a ONG num determinado mês de modo que a probabilidade de não ter recursos suficientes para o pagamento das despesas fixas seja no máximo 5%?

Solução

(a) Seja U a doação que uma ONG recebe por pessoa. Temos que

$$\begin{aligned} E(U) &= \mu = 60. \\ Var(U) &= \sigma^2 = 30^2 = 900. \end{aligned}$$

Seja X a doação de 160 pessoas. Temos que,

$$\begin{aligned} \mu_X &= 160 \times 60. \\ \sigma_X^2 &= 160 \times 30^2 = (4 \times 30)^2 \times 10 = 144.000. \end{aligned}$$

Se num determinado mês a ONG recebe 160 doações a probabilidade de não conseguir o suficiente para o pagamento das despesas fixas é dada por

$$\begin{aligned} P(X \leq 10.000) &= P\left(Z \leq \frac{10.000 - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{10.000 - 9.600}{\sqrt{144.000}}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{400}{379,47}\right) = P\left(Z \leq 1,05\right) = 0,8531. \end{aligned}$$

(b) Seja Y a doação de n pessoas.

$$\mu_Y = n \times 60.$$
$$\sigma_Y^2 = n \times 30^2$$

Note que,

$$\begin{aligned} & P(Y \leq 10000) = 0,05 \\ & \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{10.000 - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) = 0,05 \\ & \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{10.000 - n \times 60}{\sqrt{n} \times 30}\right) = 0,05 \\ & \Rightarrow P\left(Z \leq z\right) = 0,05 \end{aligned}$$

Fazendo $z = \frac{10.000 - n \times 60}{\sqrt{n} \times 30}$, z é tal que A$(-z) = 0,95$ Pela tabela da normal padrão, z= $-1,64$. Assim,

$$\frac{10.000 - n \times 60}{\sqrt{n} \times 30} = -1,64 \Rightarrow \sqrt{n} \times 30 \times (-1,64) + n \times 60 - 10.000 = 0.$$

Seja $y = \sqrt{n}$, e resolvemos $y \times 30 \times (-1,64) + y^2 \times 60 - 10.000 = 0$ usando a fórmula de bháskara para resolver equações do segundo grau. De forma que obtemos as raízes aproximadas são: $13,32645$ e $-12,50645$. Descartamos a raiz negativa e temos, $y = \sqrt{n} = 13,32645 \Rightarrow n \approx 177,5943$.

Portanto são necessários no 178 doadores no mínimo para a ONG num determinado mês de modo que a probabilidade de não ter recursos suficientes para o pagamento das despesas fixas seja no máximo 5%.

Exercício 3

A distribuição dos comprimentos dos elos da corrente de uma marca de bicicleta segue distribuição normal de média 2 cm e desvio padrão de 0,10 cm. Para que uma corrente se ajuste à bicicleta, deve ter comprimento total entre 58 e 61 cm. Responda:

(a) Qual a probabilidade de uma corrente com 30 elos não se ajustar à bicicleta?

(b) E para uma corrente de 29 elos?

Solução

(a) Seja U o comprimento do elo da corrente de uma marca de bicicleta, $U \sim N(2; 0,1^2)$. Temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(U) &= \mu = 2. \\ \mathrm{Var}(U) &= \sigma^2 = 0,1^2 = 0,01. \end{aligned}$$

Seja X o comprimento de uma corrente com 30 elos

$$\begin{aligned} \mu_X &= 30 \times 2 = 60. \\ \sigma_X^2 &= 30 \times 0,1^2 = 0,3 \end{aligned}$$

A probabilidade de uma corrente com 30 elos se ajustar à bicicleta é dada por,

$$\begin{aligned} P(58 < X < 61) &= P\left(\frac{58-\mu_X}{\sigma_X} < Z < \frac{61-\mu_X}{\sigma_X}\right) \\ &= P\left(\frac{58-60}{\sqrt{0,3}} < Z < \frac{61-60}{\sqrt{0,3}}\right) \\ &= P\left(-3.65 < Z < 1,83\right) \\ &= P\left(Z < 1,83\right) - P\left(Z \leq -3,65\right) \\ &= P\left(Z < 1,83\right) - P\left(Z \geq 3,65\right) \\ &= P\left(Z < 1,83\right) - \left(1 - P\left(Z < 3,65\right)\right) \\ &= A(1,83) - (1 - A(3,65)) \\ &= 0,9664 - (1 - 0,9999) = 0,9664 - 0,0001 = 0,9663 \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de uma corrente com 30 elos não se ajustar à bicicleta é dada por, 1-0,9663=0,0337.

(b) Seja Y o comprimento de uma corrente com 29 elos

$$\mu_Y = 29 \times 2 = 58,$$
$$\sigma_Y^2 = 29 \times 0,1^2 = 0,29.$$

A probabilidade de uma corrente com 29 elos se ajustar à bicicleta é dada por,

$$\begin{aligned}
P(58 < Y < 61) &= P\left(\frac{58-\mu_Y}{\sigma_Y} < Z < \frac{61-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) \\
&= P\left(\frac{58-58}{\sqrt{0,29}} < Z < \frac{61-58}{\sqrt{0,29}}\right) \\
&= P\left(0 < Z < 5,57086\right) \\
&= 0,5
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de uma corrente com 29 elos não se ajustar à bicicleta é dada por 0,5.

Exercício 4

Cada operador de telemarketing de uma central de telecomunicações faz em média 15 atendimentos por dia com desvio padrão de 9 atendimentos. O custo por atendimento é de R$ 7,00. Calcule aproximadamente a probabilidade do custo mensal (30 dias) de um operador ultrapassar R $ 3.500,00. Qual é o custo mensal que no máximo 10% dos atendentes irá ultrapassá-lo.

Solução

Seja U o número de atendimentos de um operador de telemarketing por dia. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(U) &= \mu = 15. \\
\mathrm{Var}(U) &= \sigma^2 = 9^2 = 81.
\end{aligned}$$

Seja X o número de atendimentos de um operador de telemarketing em 30 dias,

$$\begin{aligned}
\mu_X &= 30 \times 15 = 450. \\
\sigma_X^2 &= 30 \times 9^2 = 2430.
\end{aligned}$$

O custo por atendimento é de R$ 7,00. Para o custo mensal (30 dias) de um operador ultrapassar R$ 3.500,00, este operador deve fazer mais do que 500 atendimentos durante um mês.

Assim a probabilidade aproximada do custo mensal (30 dias) de um operador ultrapassar R$ 3.500,00 é dada por,

$$\begin{aligned}
P(X > 500) &= P\left(Z > \frac{500-\mu_X}{\sigma_X}\right) \\
&= P\left(Z > \frac{500-450}{\sqrt{2430}}\right) \\
&= P\left(Z > 1,01\right) \\
&= 1 - P\left(Z \leq 1,01\right) \\
&= 1 - A(1,01) \\
&= 1 - 0,8438 = 0,1562.
\end{aligned}$$

Vamos determinar o número de atendimentos que apenas 10% dos operadores de telemarketing irão ultrapassar. Note que

$$\begin{aligned}
&P(X > k) = 0,10\\
&\Rightarrow P\left(Z > \frac{k-\mu_X}{\sigma_X}\right) = 0,10\\
&\Rightarrow P\left(Z > \frac{k-450}{\sqrt{2430}}\right) = 0,10\\
&\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{k-450}{\sqrt{2430}}\right) = 0,90
\end{aligned}$$

Fazendo $z = \frac{k-450}{\sqrt{2430}}$ z é tal que A$(z) = 0,90$ Pela tabela da normal padrão, z$= 1,28$. Portanto,

$$z = \frac{k-450}{\sqrt{2430}} = 1,28 \Rightarrow k \approx 513,0976.$$

Ou seja, o número de chamadas que no máximo 10% dos operadores irá ultrapassar é aproximadamente 513,0976. Logo, custo mensal que no máximo 10% dos atendentes irá ultrapassar é aproximadamente R$ 3591,683.

Exercício 5

O número de acessos por minuto num site esportivo segue aproximadamente distribuição de Poisson de média 10 acessos. Calcule usando aproximação da Poisson pela normal a probabilidade de pelo ocorrerem entre 55 e 65 acessos neste site num período de 5 minutos. Obtenha um intervalo centrado na média para o total de acessos neste site em 30 minutos.

Solução

Seja U o número de acessos por minuto num site esportivo e temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(U) &= \mu = 10 \quad \text{e}\\
\mathrm{Var}(U) &= \sigma^2 = 10.
\end{aligned}$$

Seja X o número de de acessos no site esportivo num período de 5 minutos, com

$$\begin{aligned}
\mu_X &= 5 \times 10 = 50 \quad \text{e}\\
\sigma_X^2 &= 5 \times 10 = 50 = (7,071)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(55 < X < 65) &= P\left(\frac{55-\mu_X}{\sigma_X} < Z < \frac{65-\mu_X}{\sigma_X}\right)\\
&= P\left(\frac{55-50}{\sqrt{50}} < Z < \frac{65-50}{\sqrt{50}}\right)\\
&= P\left(0,707 < Z < 2,121\right)\\
&= P\left(Z < 2,121\right) - P\left(Z \leq 0,707\right)\\
&= A(2,121) - A(0,707)\\
&= 0,9778 - 0,7611 = 0,2167
\end{aligned}$$

A probabilidade aproximada de pelo ocorrerem entre 55 e 65 acessos neste site num período de 5 minutos é $0,2167$.

Seja Y o número de acessos no site esportivo num período de 30 minutos temos que

$$\begin{aligned} \mu_Y &= 30 \times 10 = 300 \quad \text{e} \\ \sigma^2_Y &= 30 \times 10 = 300 = (17,3205)^2. \end{aligned}$$

Seja $\overline{Y}$ o número médio de acessos no site esportivo num período de 30 minutos temos que

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{Y}} &= \frac{30 \times 10}{30} = 10 \quad \text{e} \\ \sigma^2_{\overline{Y}} &= \frac{30 \times 10}{30^2} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = (0,5774)^2. \end{aligned}$$

Considerando a aproximação de $\overline{Y}$ a uma distribuição normal podemos usar algumas propriedades desta distribuição. Calcularemos o três intervalo centrado na média considerando amplitudes diferentes. Temos,

$$\begin{aligned} P(\mu_{\overline{Y}} - \sigma_{\overline{Y}} < \overline{Y} < \mu_{\overline{Y}} + \sigma_{\overline{Y}}) &= P(10 - 0,5774 < \overline{Y} < 10 + 0,5774) \\ &= P\left(9,4226 < \overline{Y} < 10,5774\right) \\ &= 0,683 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\mu_{\overline{Y}} - 2\sigma_{\overline{Y}} < \overline{Y} < \mu_{\overline{Y}} + 2\sigma_{\overline{Y}}) &= P(10 - 1,1547 < \overline{Y} < 10 + 1,1547) \\ &= P\left(8,8453 < \overline{Y} < 11,1547\right) \\ &= 0,955 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\mu_{\overline{Y}} - 3\sigma_{\overline{Y}} < \overline{Y} < \mu_{\overline{Y}} + 3\sigma_{\overline{Y}}) &= P(10 - 1,7320 < \overline{Y} < 10 + 1,7320) \\ &= P\left(8,2679 < \overline{Y} < 11,7320\right) \\ &= 0,997 \end{aligned}$$

Vemos que a medida que aumenta a amplitude do intervalo aumenta a probabilidade asociada ao intervalo.