



Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

# Interação Fluido–Estrutura

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem  
com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência  
de Calor

Prof. Bruno S. Carmo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

2017



# Sumário

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

**1** Introdução

**2** Sistema de coordenadas não inercial

**3** ALE



# Introdução

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

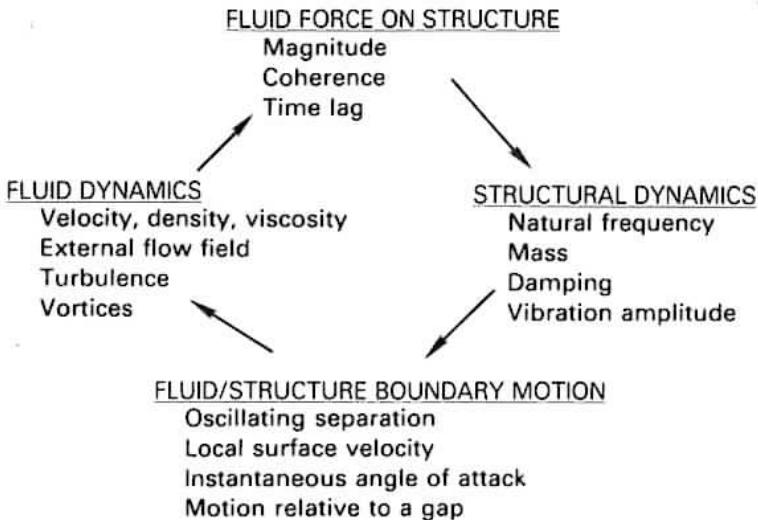
Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

- O escoamento de um fluido ao redor de uma estrutura pode causar vibrações danosas ou movimentos úteis.
- Diversos problemas associados: *galloping*, *flutter*, instabilidades fluido-elásticas, ...
- Fenômenos intrinsecamente não lineares.
- O método numérico deve ser capaz de resolver tanto as equações do escoamento quanto as estruturais, assim como lidar com a questão do acoplamento não linear entre elas.
- Requisitos anteriores como baixo custo, alta eficiência e baixo erro continuam valendo.

# Mecanismo de feedback – Blevins



Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE



# Classificação – Blevins

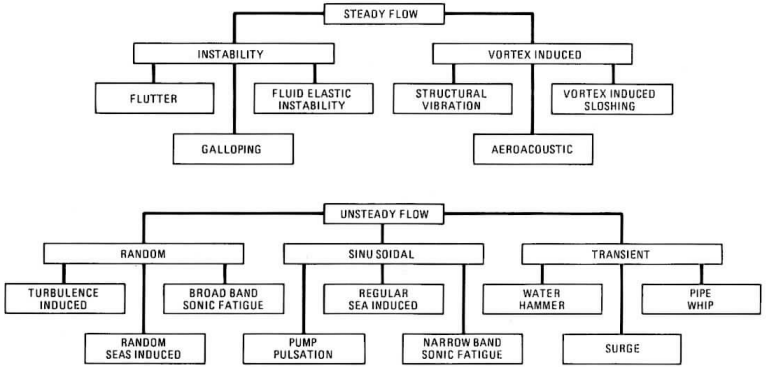
Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

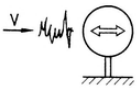



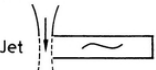
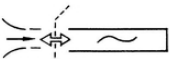
Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE



# Classificação – Naudascher & Rockwell

	EIE	IIE	MIE
BODY OSCILLATOR	(a)  Turbulence buffeting	(c)  Vortex shedding	(e)  Flutter
FLUID OSCILLATOR	(b)  Noise (from loudspeaker)	(d)  Impinging shear layer	(f)  Oscillating shock front

*Figure 1.1. Examples of body and fluid oscillators excited by (a, b) extraneously induced excitation (EIE), (c, d) instability-induced excitation (IIE), and (e, f) movement-induced excitation (MIE).*

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE



# Abordagens possíveis

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

- 1 Sistema de coordenadas (normalmente não inercial) fixo ao corpo.
- 2 **A**rbitrary **L**agrangian–**E**ulerian method.
- 3 **I**mmersed **B**oundary **M**ethod (Fronteira Imersa), também conhecido por Virtual Boundary Method ou Fictitious Domains. (não trataremos aqui...)



# Transformação das equações de Navier–Stokes (1/10)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Equações originais:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}'$$
$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$$

Assumimos que o corpo se move com translação  $\mathbf{d} = (g(t), h(t))^T$  e ângulo de rotação  $\theta = \theta(t)$  no sistema de coordenadas absoluto  $(x', y')$ . Podemos definir um sistema de coordenadas preso ao corpo pela transformação:

$$x' = g(t) + x \cos \theta + y \sin \theta$$
$$y' = h(t) - x \sin \theta + y \cos \theta$$





# Transformação das equações de Navier–Stokes (2/10)

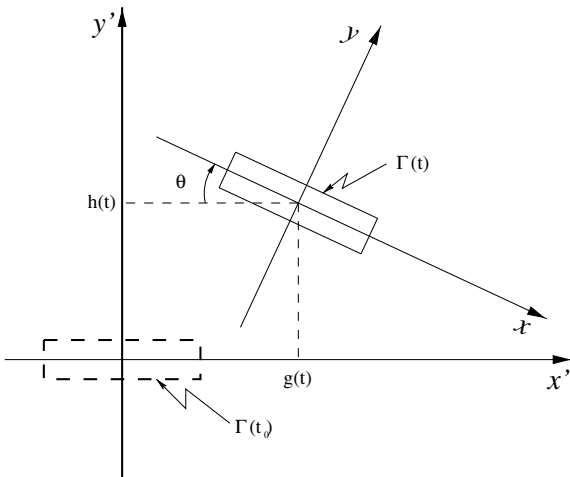
Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE





# Transformação das equações de Navier–Stokes (3/10)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Escrevendo a transformação de coordenadas em notação matricial:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{d} + \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^\top(\mathbf{x}' - \mathbf{d})$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Derivando em relação ao tempo

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{A}}^\top(\mathbf{x}' - \mathbf{d}) + \mathbf{A}^\top(\mathbf{v}' - \dot{\mathbf{d}}) = \dot{\mathbf{A}}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}^\top(\mathbf{v}' - \dot{\mathbf{d}})$$

# Transformação das equações de Navier–Stokes (4/10)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Simplificando o primeiro termo do lado direito:

$$\dot{\mathbf{A}}^T = -\dot{\theta} \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} = \dot{\theta} \mathbf{I}_0$$

$$\left[ \mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Assim:

$$\mathbf{v} = \dot{\theta} \mathbf{I}_0 \mathbf{x} + \mathbf{A}^T (\mathbf{v}' - \dot{\mathbf{d}}), \quad \mathbf{v}' = \mathbf{A} (\mathbf{v} - \dot{\theta} \mathbf{I}_0 \mathbf{x}) + \dot{\mathbf{d}}$$



# Transformação das equações de Navier–Stokes (5/10)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Obtemos as expressões das derivadas espaciais:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

O que implica em  $\nabla' = \mathbf{A}\nabla$ ,  $(\nabla')^2 = (\nabla)^2$ .

Aplicando aos termos lineares das equações de Navier–Stokes:

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{A}\nabla)^\top \mathbf{v}' = \nabla^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{v}' = \nabla^\top \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \nabla' p &= \mathbf{A}\nabla p, \quad (\nabla')^2 \mathbf{v}' = \mathbf{A}\nabla^2 \mathbf{v}\end{aligned}$$

# Transformação das equações de Navier–Stokes (6/10)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

E o termo não linear:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' &= \{[\mathbf{A}(\mathbf{v} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x}) + \mathbf{d}] \cdot \mathbf{A} \nabla\} [\mathbf{A}(\mathbf{v} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x}) + \mathbf{d}] \\ &= \mathbf{A}[(\mathbf{v} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} + \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}} \cdot \nabla)(\mathbf{v} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x})] \\ &= \mathbf{A}\{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - [(\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} - \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}}) \cdot \nabla] \mathbf{v} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{v} + \\ &\quad - (\dot{\theta})^2 \mathbf{x} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}}\}\end{aligned}$$

onde usamos:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \nabla(-\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x}) &= -\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{v}, & -\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} \cdot \nabla(-\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x}) &= -(\dot{\theta})^2 \mathbf{x}, \\ \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}} \cdot \nabla(-\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x}) &= -\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}}\end{aligned}$$



# Transformação das equações de Navier–Stokes (7/10)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

As derivadas temporais são calculadas do seguinte modo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_a = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r$$

de forma que:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}\right)_a = (\mathbf{v}_c \cdot \nabla) \mathbf{v} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}\right)_r$$

onde

$$\mathbf{v}_c = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)_a = \dot{\mathbf{A}}^\top (\mathbf{x}' - \mathbf{d}) - \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}} = \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} - \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}}$$

# Transformação das equações de Navier–Stokes (8/10)

No sistema de coordenadas solidário ao corpo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}\right)_a &= [(\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} - \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}}) \cdot \nabla][\mathbf{A}(\mathbf{v} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} + \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}})] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{A}(\mathbf{v} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x}) + \dot{\mathbf{d}}]_r \\ &= \mathbf{A}[(\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} - \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}}) \cdot \nabla] \mathbf{v} + (\dot{\theta})^2 \mathbf{x} + \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}} + \\ &\quad + \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{v} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x}) + \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{A} \left[ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_r - \ddot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} \right] \\ &= \mathbf{A} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_r + [(\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} - \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}}) \cdot \nabla] \mathbf{v} + \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}} + \right. \\ &\quad \left. - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{v} + \mathbf{A}^\top \ddot{\mathbf{d}} - \ddot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} \right\}\end{aligned}$$

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

# Transformação das equações de Navier–Stokes (9/10)



Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Então, os termos de inércia são:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}\right)_a + (\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' &= \mathbf{A} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_r + \cancel{[(\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} - \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}}) \cdot \nabla] \mathbf{v}} + \right. \\
 &\quad \left. \cancel{\pm \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{v} + \mathbf{A}^\top \ddot{\mathbf{d}} - \ddot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}} + \right. \\
 &\quad \left. \cancel{-[(\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} - \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}}) \cdot \nabla] \mathbf{v} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{v} - (\dot{\theta})^2 \mathbf{x} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{A}^\top \dot{\mathbf{d}}} \right\} = \\
 &= \mathbf{A} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_r + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - 2\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{v} - \ddot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} - (\dot{\theta})^2 \mathbf{x} + \mathbf{A}^\top \ddot{\mathbf{d}} \right\}
 \end{aligned}$$



# Transformação das equações de Navier–Stokes (10/10)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Portanto, a forma final das equações é:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{G}(\mathbf{v}, t)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, t) = 2\dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{v} + (\dot{\theta})^2 \mathbf{x} + \ddot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{d}}$$

E a vorticidade é:

$$\omega' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega - 2\dot{\theta}.$$



# Transformação das condições de contorno (1/2)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Condições do tipo Dirichlet:

$$\mathbf{v} = \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{x} + \mathbf{A}^\top (\mathbf{v}' - \dot{\mathbf{d}})$$

Condições do tipo Neumann:

$$\nabla' u' \cdot \mathbf{n}' = g_N^{u'}, \quad \nabla' v' \cdot \mathbf{n}' = g_N^{v'}$$

$$\begin{aligned} \nabla' u' \cdot \mathbf{n}' &= \mathbf{A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \nabla [(u + \dot{\theta} y) \cos \theta + (v - \dot{\theta} x) \sin \theta + g'(t)] \\ &= [\cos \theta \nabla u + \sin \theta \nabla v + \dot{\theta} (-\sin \theta, \cos \theta)^\top] \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla' v' \cdot \mathbf{n}' &= \mathbf{A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \nabla [-(u + \dot{\theta} y) \sin \theta + (v - \dot{\theta} x) \cos \theta + h'(t)] \\ &= [-\sin \theta \nabla u - \cos \theta \nabla v + \dot{\theta} (-\cos \theta, -\sin \theta)^\top] \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$



# Transformação das condições de contorno (2/2)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Definindo

$$\underline{\nabla' \mathbf{v}' \mathbf{n}'} = (\nabla' u' \cdot \mathbf{n}', \nabla' v' \cdot \mathbf{n}')^\top, \quad \underline{\nabla \mathbf{v} \mathbf{n}} = (\nabla u \cdot \mathbf{n}, \nabla v \cdot \mathbf{n})^\top$$

temos:

$$\underline{\nabla' \mathbf{v}' \mathbf{n}'} = [\mathbf{A}(\underline{\nabla \mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{A}}] \mathbf{n} = \mathbf{A}(\underline{\nabla \mathbf{v}} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0) \mathbf{n} = \mathbf{A}[(\underline{\nabla \mathbf{v} \mathbf{n}} - \dot{\theta} \mathbf{l}_0 \mathbf{n})]$$

Assumindo  $\mathbf{g}'_N = (g'_N{}^u, g'_N{}^v)^\top = \mathbf{A}(g_N{}^u, g_N{}^v)^\top = \mathbf{A} \mathbf{g}_N$ , temos então

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = g'_N{}^u - \dot{\theta} n_y, \quad \nabla v \cdot \mathbf{n} = g'_N{}^v + \dot{\theta} n_x$$



# Cálculo de forças e momentos (1/2)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Sabendo que o tensor de tensões é dado por  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$ :

Forças:

$$\mathbf{F} = - \int_{\Gamma(t)} p \mathbf{n}' ds + \int_{\Gamma(t)} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}' ds = \mathbf{F}'_p + \mathbf{F}'_v = \mathbf{A}(\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_v)$$

Momentos:

$$\mathbf{M}' = - \int_{\Gamma(t)} p(\mathbf{r}' \times \mathbf{n}') ds + \int_{\Gamma(t)} \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}') ds = \mathbf{M}'_p + \mathbf{M}'_v$$



## Cálculo de forças e momentos (2/2)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Posicionando a origem do sistema de coordenadas solidário ao corpo no polo de rotação:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{x}' - \mathbf{d} = \mathbf{d} + \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Assim,

$$M' = M = - \int_{\Gamma(t)} p(\mathbf{x} \times \mathbf{n}) ds + \int_{\Gamma(t)} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}) ds$$



# Discretização temporal

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

- O termo forçante  $\mathbf{G}(\mathbf{v}, t)$  pode ser tratado de forma explícita, incorporando-o, na prática, ao termo não linear.
- Condições de contorno para a velocidade impostas como anteriormente, no passo de tratamento do termo difusivo.
- Condição de contorno de pressão é modificada:

$$\frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \left\{ -\frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial t} + \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q [\mathbf{N}(\mathbf{v}^{n-q}) - \mathbf{G}(\mathbf{v}^{n-q}, t^{n-q}) + -\nu(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}^{n-q}))] \right\}$$



# Acoplamento

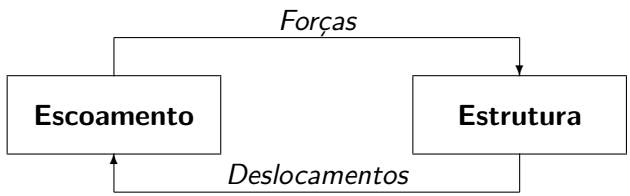
Interação  
Fluido-  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE



# Vantagens e desvantagens de usar sistema de coordenadas solidário ao corpo



Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

## ■ Vantagens:

- Baixo custo computacional
- Facilidade de implementação

## ■ Desvantagens:

- Baixa flexibilidade (somente corpos rígidos se movendo de forma solidária)
- Domínio tem que ser bastante grande





# Metodologia ALE

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

- Incorporação de deslocamentos e deformações de malha arbitrários
- Movimento de diversos corpos e fronteiras pode ser feita de forma independente
- Condições de contorno e localização das fronteiras são impostas de forma exata
- Como métodos de alta ordem normalmente utilizam elementos grandes, o movimento do corpo é normalmente acomodado pelo simples deslocamento nos nós, sem necessidade de regeneração de malha



# Formulação ALE (1/5)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

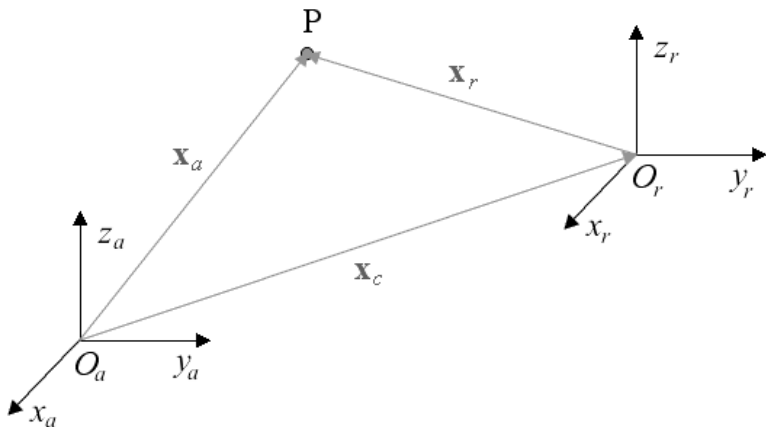
Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Equações de Navier–Stokes podem ser escritas em relação a um sistema de coordenadas que tenha uma velocidade relativa ao sistema de coordenadas absoluto arbitrária





## Formulação ALE (2/5)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_c$$

Tomando uma certa variável contínua  $Q = Q(\mathbf{x}_r, t)$ , sua variação,  $\delta Q$ , é dada por

$$\delta Q = \frac{\partial Q}{\partial t} \delta t + \frac{\partial Q}{\partial x} \delta x_r + \frac{\partial Q}{\partial y} \delta y_r + \frac{\partial Q}{\partial z} \delta z_r,$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_a} = \frac{\partial}{\partial x_r}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_a} = \frac{\partial}{\partial y_r}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_a} = \frac{\partial}{\partial z_r};$$

pois os sistemas  $A$  e  $R$  têm eixos paralelos.



## Formulação ALE (3/5)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Para calcular a taxa de variação de  $Q$  no tempo, dividimos  $\delta Q$  por  $\delta t$ :

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\delta x_r}{\delta t} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\delta y_r}{\delta t} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\delta z_r}{\delta t},$$

e tomamos o limite  $\delta t \rightarrow 0$ .

Para isso, é necessário saber como  $\mathbf{x}_r = (x_r, y_r, z_r)$  varia com  $t$ .

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta x_r}{\delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{x_r(t_1) - x_r(t_0)}{t_1 - t_0}.$$



## Formulação ALE (4/5)

Interação  
Fluido-  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Usando  $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_c$ :

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{x_a(t_1) - x_c(t_1) - x_a(t_0) + x_c(t_0)}{t_1 - t_0} =$$
$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \left[ \frac{x_a(t_1) - x_a(t_0)}{t_1 - t_0} - \frac{x_c(t_1) - x_c(t_0)}{t_1 - t_0} \right] =$$
$$(\mathbf{u} - \mathbf{m}_x).$$

O mesmo pode ser aplicado a  $y_r$  and  $z_r$ :

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta y_r}{\delta t} = (v - m_y), \quad \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta z_r}{\delta t} = (w - m_z).$$

Portanto, a taxa temporal de variação da variável  $Q$  é:

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + [(\mathbf{u} - \mathbf{m}) \cdot \nabla] Q.$$



## Formulação ALE (5/5)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Se o sistema de coordenadas é fixo,  $\mathbf{m} = 0$ , e a equação tem a forma usual da abordagem Euleriana. Por outro lado, se o sistema de coordenadas tem a mesma velocidade da partícula fluida,  $\mathbf{m} = \mathbf{u}$ , e recuperamos a formulação Lagrangiana.

As equações de Navier–Stokes escritas com formulação ALE:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} - \mathbf{m}) \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

onde  $\mathbf{m}$  é a velocidade do sistema de coordenadas vinculado à malha, também chamada de velocidade da malha.



# ALE – discretização temporal (1/3)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Dado um certo estado do campo de escoamento, malha e variáveis estrutural num passo de tempo  $n$ ,  $(\mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{x}^n, \mathbf{m}^n, y_c^{*n}, \dot{y}_c^{*n})$ , avançamos a um passo de tempo  $n + 1$  da seguinte forma:

- 1 Calculamos  $\mathbf{N}(\mathbf{u}^n, \mathbf{m}^n) = (\mathbf{u}^n - \mathbf{m}^n) \cdot \nabla \mathbf{u}^n$
- 2 Resolvemos a equação estrutural (encontramos  $y_c^{*n+1}$  e  $\dot{y}_c^{*n+1}$ )
- 3 Calculamos  $\mathbf{m}^{n+1}$

# ALE – discretização temporal (2/3)

- 4 Calculamos as condições de contorno de pressão:

$$\frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \left\{ -\frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial t} + \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q [\mathbf{N}(\mathbf{u}^{n-q}, \mathbf{m}^{n-q}) - \nu(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^{n-q}))] \right\}$$

- 5 Calculamos as novas posições dos nós da malha,  $\mathbf{x}^{n+1}$

- 6 Integramos os termos de advecção:

$$\check{\mathbf{u}} = \Delta t \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbf{N}(\mathbf{u}^{n-q}, \mathbf{m}^{n-q}) + \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q \mathbf{u}^{n-q}$$





## ALE – discretização temporal (3/3)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

- 7** Resolvemos o sistema linear para a pressão:

$$\nabla^2 \bar{p}^{n+1} = \nabla \cdot \left( \frac{\check{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right)$$

- 8** Resolvemos o sistema linear para as velocidades:

$$\nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} - \frac{\gamma_0}{\nu \Delta t} \mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{\nu} \left( \nabla \bar{p}^{n+1} - \frac{\check{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right)$$



## Deformação da malha (1/3)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

Dado o deslocamento da fronteira, a deformação do restante da malha pode ser feita de forma automática. Cuidado deve ser tomado para não degradar qualidade dos elementos.

Possível solução: arestas são modeladas como molas com rigidez inversamente proporcional ao comprimento.

$$k_{ij} = 1/\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

Para resolver para os deslocamentos de cada nó  $\delta_{x_i}$  e  $\delta_{y_i}$ , usamos um procedimento do tipo preditor–corretor:



## Deformação da malha (2/3)

Interação  
Fluido-  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

### Passo de predição:

$$\check{\delta}_{x_i}^{n+1,0} = 2\delta_{x_i}^n - \delta_{x_i}^{n-1}, \quad \check{\delta}_{y_i}^{n+1,0} = 2\delta_{y_i}^n - \delta_{y_i}^{n-1},$$

### Passo de correção:

$$\check{\delta}_{x_i}^{n+1,p} = \frac{\sum_j^m k_{ij} \check{\delta}_{x_j}^{n+1,l}}{\sum_j^m k_{ij}}, \quad \check{\delta}_{y_i}^{n+1,p} = \frac{\sum_j^m k_{ij} \check{\delta}_{y_j}^{n+1,l}}{\sum_j^m k_{ij}},$$

onde  $m$  é o número de arestas que tem o nó  $i$  como vértice e  $j$  percorre os nós vizinhos a  $i$ .



## Deformação da malha (3/3)

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

### Critério de convergência

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left[ \frac{\left( \check{\delta}_{x_i}^{n+1,p} - \check{\delta}_{x_i}^{n+1,p-1} \right)^2 + \left( \check{\delta}_{y_i}^{n+1,p} - \check{\delta}_{y_i}^{n+1,p-1} \right)^2}{\left( \check{\delta}_{x_i}^{n+1,p} - \check{\delta}_{y_i}^{n+1,p} \right)^2} \right]}{N}} < tol,$$

Novas localizações dos nós:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \delta_{x_i}^{n+1}, \quad y_i^{n+1} = y_i^n + \delta_{y_i}^{n+1}.$$

Cálculo da velocidade da malha:

$$\mathbf{m}^{n+1} = \frac{\gamma_0 \mathbf{x}^{n+1} - \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q \mathbf{x}^{n-q}}{\Delta t}.$$



# ALE – detalhes adicionais

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

- Método de resolução do sistema linear
- Estratégia de deformação de malha
- Extensão a três dimensões



# ALE – exemplo de malha

Interação  
Fluido–  
Estrutura

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Sistema de  
coordenadas  
não inercial

ALE

