



Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

# Equações de Advecção e Advecção–Difusão

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem  
com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência  
de Calor

Prof. Bruno S. Carmo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

2017



# Sumário

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

- 1 Introdução
- 2 A equação de advecção linear
- 3 Discretização de Galerkin Contínuo
- 4 Discretização de Galerkin Descontínuo
- 5 Espectro do operador de advecção
- 6 Formulação semi-lagrangiana
- 7 Técnicas de estabilização



# Introdução

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

- Nesta aula, estudaremos as propriedades e características da solução numérica da equação de advecção.
- O estudo desta equação é fundamental para a solução das Eqs. de Navier-Stokes.
- Consideraremos primeiramente apenas a advecção linear, com e sem difusão.
- É importante compreender a estabilidade da integração temporal desta equação porque os termos de advecção das eqs. de Navier-Stokes são não lineares e por isso normalmente tratados de forma explícita.



# A equação de advecção linear 1d (1/2)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$
$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Nesta equação,  $V$  é uma velocidade constante e  $u_0(x)$  é a condição inicial. Assumimos condições de contorno periódicas no intervalo  $x \in [a, b]$ .

A solução exata é a propagação da condição inicial com velocidade  $V$ :

$$u(x, t) = u_0(x - Vt)$$

Como as condições de contorno são periódicas, a solução pode ser expressa em termos de componentes de uma série de Fourier  $e^{i(\omega t - kx)}$ , onde  $\omega$  e  $k$  são os números de onda temporal e espacial, respectivamente.



# A equação de advecção linear 1d (2/2)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Substituindo os componentes de Fourier na equação diferencial concluímos que  $\omega = kV$ , ou seja, a velocidade de fase  $C_\phi \equiv \omega/k = V$  é constante. Em outras palavras, todos os componentes se propagam com a mesma velocidade constante  $V$ .

A discretização da equação leva ao aparecimento de erros de *dispersão* e *dissipação*.

Observa-se que se o esquema for de ordem par, então o erro é dissipativo. Por outro lado, se o esquema for de ordem ímpar, o erro é dispersivo.



# Dispersão e dissipação numéricas

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

- Num método dispersivo, cada componente da série de Fourier com diferente número de onda  $k$  se propaga com uma velocidade de fase diferente.
- A forma específica da dispersão depende do esquema numérico.
- A dispersão pode ser utilizada como uma medida da acurácia do esquema.
- A dissipação numérica faz com que a amplitude dos modos de Fourier seja diminuída à medida em que eles se propagam.



# Exemplo de dispersão numérica

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

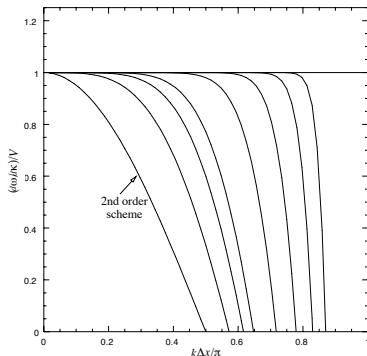
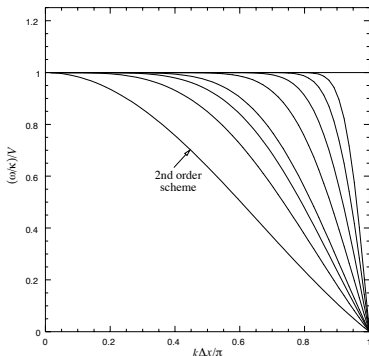
Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Velocidades de fase (esq.) e grupo (dir.) para discretizações do tipo diferenças centradas para diferentes ordens, em função do número de onda.



# Dispersão numérica para $P = 1$



Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

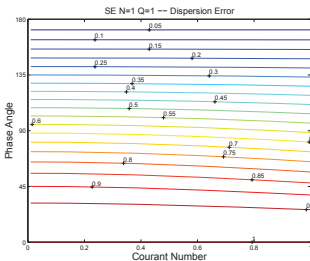
Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

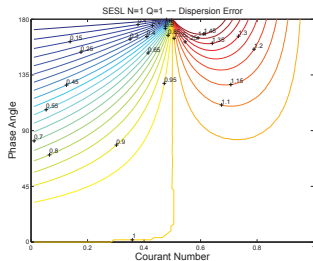
Semi-  
lagrangiano

Técnicas de  
estabilização

Isosuperfícies de erro de fase  
(valores menores ou maiores do que 1).



Esquema padrão



Esquema semi-lagrangiano





# Dispersão numérica para $P = 4$

Eq. Advecção

Bruno S. Carmo

Introdução

Eq. de advecção linear

Discretização de Galerkin Contínuo

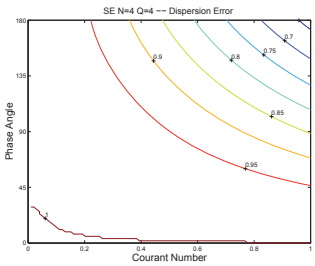
Discretização de Galerkin Descontínuo

Espectro do operador de advecção

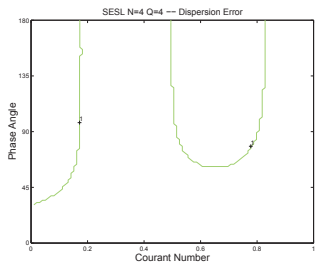
Semi-lagrangiano

Técnicas de estabilização

## Isosuperfícies de erro de fase (valores menores ou maiores do que 1).



Esquema padrão



Esquema semi-lagrangiano



# Discretização de Galerkin contínuo

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Consideramos a equação de advecção multidimensional linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbb{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)u = 0,$$

$$\mathbf{V} = [a(\mathbf{x}), b(\mathbf{x}), c(\mathbf{x})]^\top, \quad u(\mathbf{x}; 0) = u_0(\mathbf{x})$$

Assumimos que a condição inicial  $u_0(\mathbf{x})$  é suave ( $C^0$ ) e que a velocidade de propagação  $\mathbf{V}$  é real e solenoidal ( $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ). Também assumimos condições de contorno apropriadas e consistentes com a natureza hiperbólica da equação.

Formulação fraca:

$$\left( \mathbf{v}, \frac{\partial u}{\partial t} \right)_\Omega + (\mathbf{v}, \mathbb{L}u)_\Omega = 0.$$



# Representação matricial – Galerkin contínuo (1/2)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Considerando inicialmente a discretização num único elemento,  $\Omega_e$ :

$$\left( \phi_{pqr}, \frac{\partial u^\delta}{\partial t} \right)_{\Omega_e} + (\phi_{pqr}, \mathbb{L}u^\delta)_{\Omega_e} = 0, \quad \forall (p, q, r)$$

Passando para a forma matricial:

$$(\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \mathbf{B}^e \frac{d\hat{\mathbf{u}}^e}{dt} + (\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \mathbb{L} \mathbf{B}^e \hat{\mathbf{u}}^e = 0.$$

Representação do problema global:

$$\underline{((\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \mathbf{B}^e)} \frac{d\hat{\mathbf{u}}_I}{dt} + \underline{((\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \mathbb{L} \mathbf{B}^e)} \hat{\mathbf{u}}_I = 0.$$



## Representação matricial – Galerkin contínuo (2/2)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Impondo a continuidade:

$$\mathcal{A}^\top \left( \underline{(\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \mathbf{B}^e} \right) \mathcal{A} \frac{d\hat{\mathbf{u}}_g}{dt} + \mathcal{A}^\top \left( \underline{(\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \mathbb{L} \mathbf{B}^e} \right) \mathcal{A} \hat{\mathbf{u}}_g = 0.$$

Designando  $\mathbf{M} = \mathcal{A}^\top \left( \underline{(\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \mathbf{B}^e} \right) \mathcal{A}$ , temos o sistema semidiscreto:

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_g}{dt} = -\mathbf{M}^{-1} \mathcal{A}^\top \left( \underline{(\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \mathbb{L} \mathbf{B}^e} \right) \mathcal{A} \hat{\mathbf{u}}_g,$$

que pode ser discretizado no tempo usando os métodos vistos no capítulo anterior.



# Operador de advecção – nível elementar (1/2)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Definição diferencial:

$$\mathbb{L} \equiv \mathbf{V} \cdot \nabla = a(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} + b(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_2} + c(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Aplicando a regra da cadeia para escrever as derivadas em termos das coordenadas locais:

$$\begin{aligned} \mathbb{L} = & \left( a \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + b \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + c \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \\ & \left( a \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + b \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + c \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \\ & \left( a \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} + b \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} + c \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{aligned}$$



## Operador de advecção – nível elementar (2/2)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

A versão discreta do operador  $\mathbb{L}$  atuando nos pontos de quadratura é:

$$\mathbb{L} = \mathbf{R}^e \mathbf{D}_{\xi_1}^e + \mathbf{S}^e \mathbf{D}_{\xi_2}^e + \mathbf{T}^e \mathbf{D}_{\xi_3}^e$$

onde:

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{\Lambda}^e \left( a \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + b \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + c \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \right) +$$

$$\mathbf{S}^e = \mathbf{\Lambda}^e \left( a \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + b \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + c \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \right) +$$

$$\mathbf{T}^e = \mathbf{\Lambda}^e \left( a \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} + b \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} + c \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right)$$

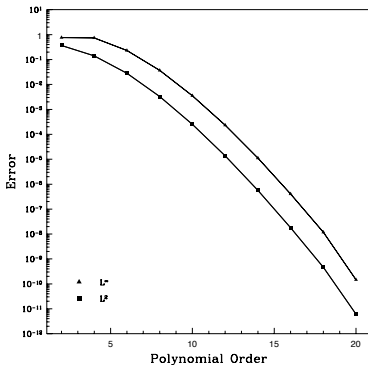
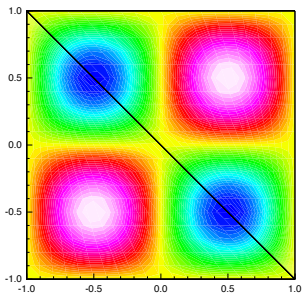
A matriz  $\mathcal{A}^\top \left( \underline{(\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \mathbb{L} \mathbf{B}^e} \right) \mathcal{A}$  não é simétrica.

# Exemplo de convergência – Projeção de condição inicial 2d

Eq. Advecção

Bruno S. Carmo

Projeção da função  $u(x_1, x_2) = \text{sen}(\pi x_1) \text{sen}(\pi x_2)$ .



Introdução

Eq. de advecção linear

Discretização de Galerkin Contínuo

Discretização de Galerkin Descontínuo

Espectro do operador de advecção

Semi-lagrangiana

Técnicas de estabilização



# Exemplo de convergência – Projecção de condição inicial 3d

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Projecção da função  $u(x_1, x_2, x_3) = \text{sen}(\pi x_1) \text{sen}(\pi x_2) \text{sen}(\pi x_3)$ .

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

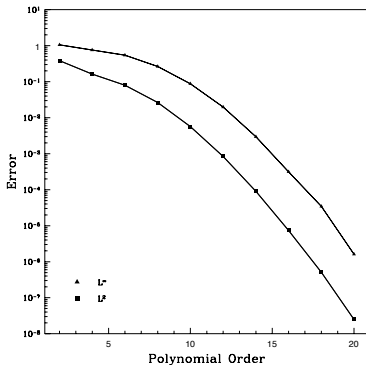
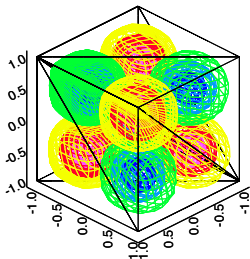
Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização







# Exemplo de convergência – Convergência espacial (1/2)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

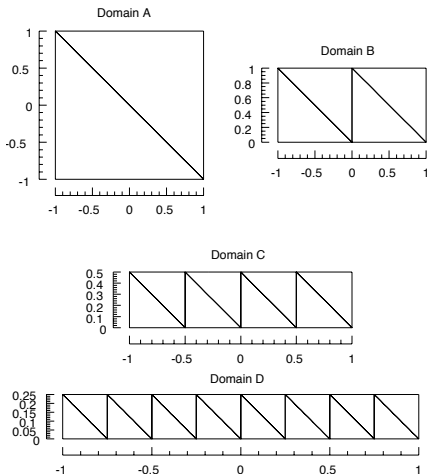
Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Advecção da condição inicial  $u_0(\mathbf{x}) = \text{sen}(\pi \cos(\pi x))$ , com  $V = 1$  e  $\Delta t = 0.002$ .



# Exemplo de convergência – Convergência espacial (2/2)

Eq. Advecção

Bruno S. Carmo

Introdução

Eq. de advecção linear

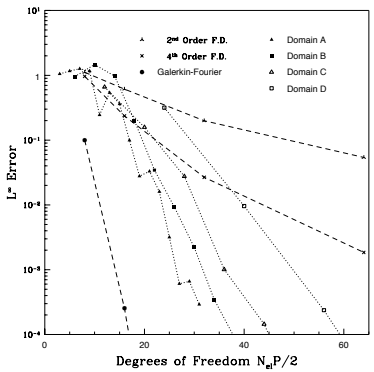
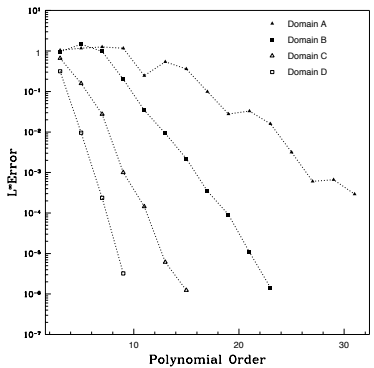
Discretização de Galerkin Contínuo

Discretização de Galerkin Descontínuo

Espectro do operador de advecção

Semi-lagrangiana

Técnicas de estabilização





# Discretização de Galerkin descontínuo (DG) (1/2)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Equação hiperbólica geral, em 2d:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(u) = 0$$

onde  $\mathbf{F}(u) = [f(u), g(u)]^\top$  é o vetor de fluxo, que define o transporte de  $u(\mathbf{x}, t)$ . No caso linear considerado anteriormente,  $\nabla \cdot \mathbf{F}(u) = \mathbb{L}u = \mathbf{V} \cdot \nabla u$ .

Problemas hiperbólicos deste tipo admitem soluções descontínuas (choques). Por isso, procuraremos uma aproximação num espaço  $\mathcal{X}^\delta$  que é suave nos elementos, mas que admite descontinuidades entre os elementos:

$$\mathcal{X}^\delta = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\Omega^e} \in \mathcal{P}_P(\Omega^e), \forall \Omega^e\}$$



# Discretização de Galerkin descontínuo (DG) (2/2)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Aplicando o método de resíduos ponderados, com  $v^\delta = \phi_{pq}(\mathbf{x})$ :

$$\int_{\Omega^e} v^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\Omega^e} v^\delta \nabla \cdot \mathbf{F}(u^\delta) d\mathbf{x} = 0.$$

Diferentemente da formulação contínua de Galerkin, agora aplicamos o teorema de divergência ao termo de advecção:

$$\int_{\Omega^e} v^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega^e} v^\delta \mathbf{F}(u^\delta) \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega^e} \nabla v^\delta \cdot \mathbf{F}(u^\delta) d\mathbf{x} = 0.$$

O acoplamento entre os elementos se dá através do fluxo  $\mathbf{F}(u^\delta)$  do segundo termo da equação.



## DG – Termo de fluxo

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

O fluxo é calculado na fronteira entre elementos, onde a solução pode ser descontínua, ou seja, temos dois valores possíveis para a solução  $u^\delta$ .

Denotamos estes dois valores por  $u_-^\delta$  (interno ao elemento) e  $u_+^\delta$  (externo ao elemento) e o fluxo na fronteira é designado por  $\tilde{\mathbf{f}}^e(u_-^\delta, u_+^\delta)$ .

Para obtermos um esquema estável, o cálculo do fluxo precisa considerar a forma como a informação é naturalmente propagada (*upwinding*). Por exemplo, considerando o caso linear onde  $\mathbf{F}(u^\delta) = \mathbf{V}u^\delta$ :

$$\tilde{\mathbf{f}}^e(u_-^\delta, u_+^\delta) = \begin{cases} \mathbf{V}u_-^\delta, & \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^e \geq 0, \\ \mathbf{V}u_+^\delta, & \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^e < 0. \end{cases}$$



# DG – Formulação utilizando operadores

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Omitindo o superscrito  $\delta$ ,

$$\partial_t(v, u)_{\Omega^e} + \langle v, \tilde{\mathbf{f}}(u_-, u_+) \rangle_{\Omega^e} - (\nabla v, \mathbf{F}(u))_{\Omega^e} = 0,$$

onde os operadores são definidos da seguinte forma:

$$(a, b)_{\Omega^e} \equiv \int_{\Omega^e} ab \, d\mathbf{x},$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\Omega^e} \equiv \int_{\Omega^e} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, d\mathbf{x},$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\partial\Omega^e} \equiv \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}^e \, ds.$$

# DG – Formulação utilizando matrizes (1/2)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}^e}{dt} = [\mathbf{M}^e]^{-1} \left[ (\mathbf{D}_{x_1}^e \mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \boldsymbol{\Lambda}^e(f(u)) + \right. \\ \left. + (\mathbf{D}_{x_2}^e \mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \boldsymbol{\Lambda}^e(g(u)) \right] - [\mathbf{M}^e]^{-1} \mathbf{b}^e,$$

onde  $\mathbf{b}$  é o vetor correspondente à integral de linha

$$\mathbf{b}^e[n(pq)] = \int_{\partial\Omega^e} \tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}^e ds.$$

Notamos que a resolução deste sistema envolve a inversão somente da matriz de massa elementar, que é bem mais barato do que inverter uma matriz global e pode ser trivial se uma base ortogonal for utilizada.



## DG – Formulação utilizando matrizes (2/2)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Além disso, notamos que:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_{x_1}^e \mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \boldsymbol{\Lambda}^e(f(u)) &= (\mathbf{B}^e)^\top (\mathbf{D}_{x_1}^e)^\top \mathbf{W}^e \boldsymbol{\Lambda}^e(f(u)) \\ &= ((\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e) (\mathbf{W}^e)^{-1} (\mathbf{D}_{x_1}^e)^\top \mathbf{W}^e \boldsymbol{\Lambda}^e(f(u))\end{aligned}$$

Portanto, se calcularmos o vetor

$$(\mathbf{W}^e)^{-1} (\mathbf{D}_{x_1}^e)^\top \mathbf{W}^e \boldsymbol{\Lambda}^e(f(u)),$$

este termo se reduz a um produto interno, que pode ser calculado usando fatoração da soma.





# DG – Implementação alternativa

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Alternativamente, pode-se integrar o termo  $\int_{\Omega^e} \nabla v^\delta \cdot \mathbf{F}(u^\delta) dx$  por partes novamente, de modo que a formulação não contenha operadores de diferenciação transpostos e seja, dessa forma, mais consistente com os operadores utilizados na formulação de Galerkin padrão. O resultado é

$$\partial_t(v, u^\delta)_{\Omega^e} + \langle v, [\tilde{\mathbf{f}}(u_-^\delta, u_+^\delta) - \mathbf{F}(u^\delta)] \rangle_{\Omega^e} + (v, \nabla \cdot \mathbf{F}(u^\delta))_{\Omega^e} = 0.$$



# DG – considerações sobre a avaliação dos fluxos

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

- Para o caso mais complicado de um sistema de equações parabólicas, um solver de Riemann 1d aproximado pode ser utilizado, como veremos no futuro.
- Para calcular o vetor  $\mathbf{b}^e$ , tipicamente escolhemos pontos de quadratura de Gauss, pois
  - Precisamos de uma maior precisão na integração nas arestas, pois os termos de fluxo dominam o erro da aproximação;
  - Queremos evitar o cálculo de grandezas nos vértices colapsados de triângulos para não precisarmos resolver um problema multidimensional de Riemann quando estivermos tratando de problemas não lineares.



# Espectro do operador de advecção (1/3)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Para Galerkin contínuo, o operador de advecção é:

$$\mathbf{M}^{-1} \mathcal{A}^T \left( (\mathbf{B}^e)^T \mathbb{W}^e \mathbb{L} \mathbf{B}^e \right) \mathcal{A}$$

A matriz  $(\mathbf{B}^e)^T \mathbb{W}^e \mathbb{L} \mathbf{B}^e$  representa o produto interno da base de expansão com o operador de advecção agindo sobre a base, isto é,  $(\phi_{pqr}, \mathbb{L}\phi_{lmn})$ . Assumindo que o campo de velocidades  $\mathbf{V}$  é solenoidal,

$$\mathbb{L}\phi_{pqr} = (\mathbf{V} \cdot \nabla)\phi_{pqr} = \nabla \cdot (\mathbf{V}\phi_{pqr})$$

Podemos então usar a identidade vetorial:

$$\phi \nabla \cdot (\psi \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\mathbf{V}\phi\psi) - \nabla\phi \cdot (\psi \mathbf{V})$$



## Espectro do operador de advecção (2/3)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Fazendo  $\phi = \phi_{pqr}$  e  $\psi = \phi_{lmn}$

$$(\phi_{pqr}, \mathbb{L}\phi_{lmn})_e = -(\mathbb{L}\phi_{pqr}, \phi_{lmn})_e + \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\phi_{pqr} \mathbf{V} \phi_{lmn}) dx$$

Aplicando o teorema da divergência no último termo

$$(\phi_{pqr}, \mathbb{L}\phi_{lmn})_e = -(\mathbb{L}\phi_{pqr}, \phi_{lmn})_e + \int_{\partial\Omega_e} \phi_{pqr} \phi_{lmn} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dx$$

ou seja, o operador será antissimétrico se a integral de superfície for zero. Para Galerkin contínuo modos de interior não contribuem para a integral de superfície. Assumindo uma discretização conforme, a integral de superfície na interface entre dois elementos será igual e oposta. Portanto não haverá contribuição das interfaces interelementares.



# Espectro do operador de advecção (3/3)

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

A única contribuição remanescente é a do contorno do domínio. Se as condições de contorno forem antissimétricas (periódicas ou igual a 0 por exemplo), então o operador será antissimétrico.

Como a matriz  $\mathbf{M}$  é simétrica, o operador  $\mathbf{M}^{-1} \mathcal{A}^\top ((\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e \mathbb{L} \mathbf{B}^e) \mathcal{A}$  será antissimétrico e, portanto, terá autovalores imaginários puros. Consequentemente, precisamos de um esquema de avanço no tempo cuja região de estabilidade também inclua ao menos parte do eixo imaginário.

Em geral, o módulo do maior autovalor do operador cresce com  $\rho^2$ .

# Crescimento do maior autovalor da matriz de advecção com o grau do polinômio

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

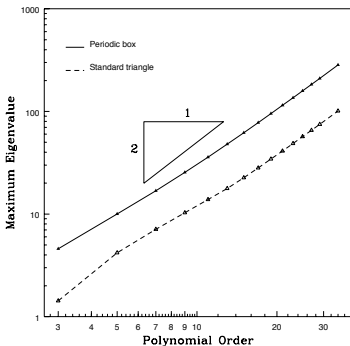
Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

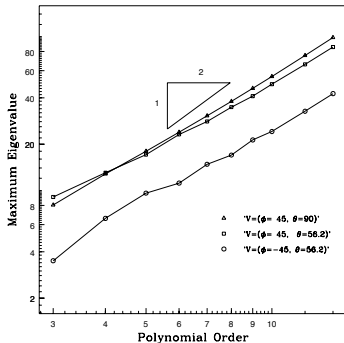
Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização



Onda na direção  
perpendicular à fronteira dos  
elementos



Ondas em direções diversas  
com relação às arestas dos  
elementos



# Formulação semi-lagrangiana

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

- Restrição sobre passo de tempo é bastante forte na resolução explícita da equação de advecção (CFL).
- Uma alternativa é utilizar a formulação semi-lagrangiana, que permite que maiores passos de tempo sejam utilizados, mantendo as matrizes simétricas e erros de dispersão e difusão baixos.
- Esta abordagem já é utilizada há muito tempo em meteorologia, onde a integração de longas séries temporais é necessária.
- A principal ideia do método é discretizar a derivada no tempo na sua forma lagrangiana, e tratar os demais termos na forma euleriana.



# Esquemas da formulação semi-lagrangiana I

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

- Para implementar a formulação, é necessário obter a solução referente às partículas que ocupam cada um dos pontos da malha no instante anterior.
- A obtenção desta solução pode ser feita usando as técnicas utilizadas para traçadores de forma reversa ou resolvendo uma equação auxiliar de advecção.
- Essas duas versões da formulação semi-lagrangiana são o *esquema forte* e o *esquema auxiliar*.





# Esquemas da formulação semi-lagrangiana II

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

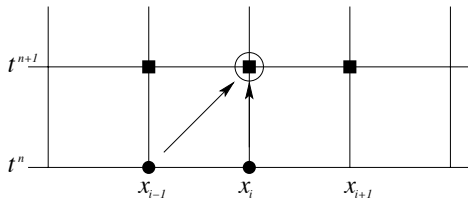
Técnicas de  
estabilização

Considere a equação de advecção–difusão,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla \phi = \nu \nabla^2 \phi,$$

onde  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  é um campo de advecção.

Normalmente, tratamos os termos difusivos de forma implícita e os termos de advecção de forma explícita.





# Esquemas da formulação semi-lagrangiana III

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Podemos reescrever a equação na forma lagrangiana,

$$\frac{D\phi}{Dt} = \nu \nabla^2 \phi, \quad \text{onde } \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla.$$

Discretizamos no tempo a equação acima num ponto  $x_i$  usando um esquema implícito de primeira ordem,

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_d^n}{\Delta t} = \nu \nabla^2 \phi_i^{n+1},$$

onde  $\phi_d^n = \phi^n(\mathbf{x}_d, t^n)$  e  $\mathbf{x}_d$  é chamado de ponto de partida.



# Formulação semi-lagrangiana: esquema forte I

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

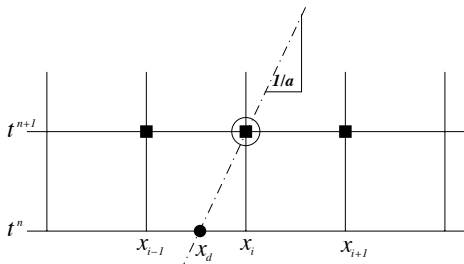
Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Num esquema lagrangiano, a derivada material é calculada ao longo de uma característica. Podemos então determinar o ponto de partida resolvendo a equação característica  $D\mathbf{x}/Dt = \mathbf{a}$  revertida no tempo para  $t^{n+1} \geq t \geq t_n$  usando as condições iniciais  $\mathbf{x}(t^{n+1}) = \mathbf{x}_i$ .





# Formulação semi-lagrangiana: esquema forte II

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

A complexidade do esquema depende da forma de  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ; se  $\mathbf{a}$  for independente do tempo, o cálculo é relativamente simples.

Para se encontrar  $\mathbf{x}_d$ , normalmente se empregam esquemas de segunda ordem, implícitos ou explícitos.

Deve-se notar também que o esquema requer uma operação de interpolação para avaliar  $\phi(\mathbf{x}_d, t^n)$ .



# Formulação semi-lagrangiana: esquema auxiliar I

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

No esquema auxiliar, ao invés de achar a posição da partícula no tempo anterior e interpolar para achar o valor da função  $\phi_d^n$ , calculamos o valor de  $\phi_d^n$  diretamente.

Isto é feito resolvendo a parcela de advecção do problema independentemente na forma Euleriana e com um passo de tempo menor. Ou seja, introduzimos soluções intermediárias  $\tilde{\phi}(\mathbf{x}, \tau)$  e resolvemos o problema

$$\frac{D\tilde{\phi}}{D\tau} = \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tau} + \mathbf{a} \cdot \nabla\tilde{\phi} = 0, \quad t^n \leq \tau \leq t^{n+1},$$

com condições iniciais  $\tilde{\phi}(\mathbf{x}_i, t^n) = \phi(\mathbf{x}_i, t^n)$ .



# Formulação semi-lagrangiana: esquema auxiliar II

Eq. Advecção

Bruno S. Carmo

Introdução

Eq. de advecção linear

Discretização de Galerkin Contínuo

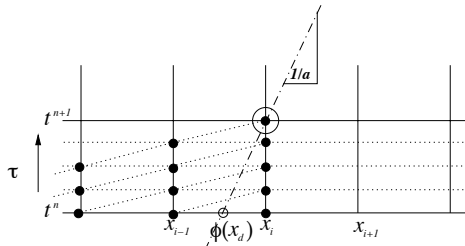
Discretização de Galerkin Descontínuo

Espectro do operador de advecção

Semi-lagrangiana

Técnicas de estabilização

Como a equação resolvida é estritamente hiperbólica, então a solução ao longo da característica é constante, e  $\phi(\mathbf{x}_d, t^n) = \tilde{\phi}(\mathbf{x}_i, t^{n+1})$ .



O passo de tempo é restrito pelas condições de CFL. Entretanto, resolvendo o termo difusivo com menor frequência pode-se economizar bastante em termos de custo computacional.

# Convergência de esquemas semi-lagrangianos fortes

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

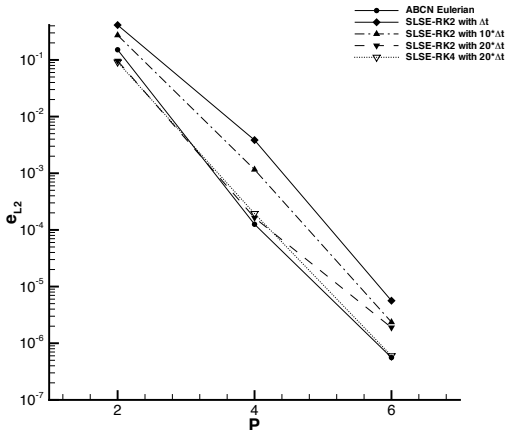
Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Advecção e difusão de um cone gaussiano num plano onde  
 $(u, v) = (+x_2, -x_1)$



# Comparação entre convergências dos esquemas forte e auxiliar



Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

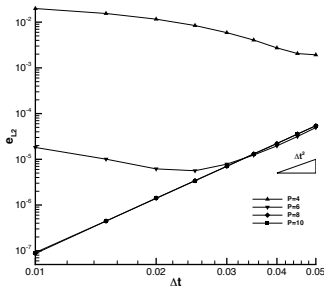
Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

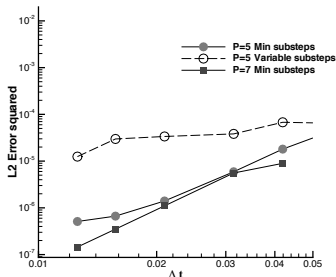
Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização



Esquema forte



Esquema auxiliar





# Comparação de eficiência entre métodos semi-lagrangianos fortes e eulerianos

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

$P$	SLSE - RK4 (seg/passos)	ABCN Euleriano (seg/passos)
4	0.15	0.08
6	0.39	0.21
8	0.80	0.51
10	1.49	1.19

$P$	Razão (SLSE/ABCN)	speed-up (SLSE/ABCN)
4	1.88	10.6
6	1.86	10.8
8	1.57	12.7
10	1.25	16.0



# Soluções descontínuas

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

- Até agora, lidamos com soluções suaves de regularidade infinita para as quais conseguimos taxas de convergência exponenciais.
- Entretanto, equações hiperbólicas admitem soluções descontínuas ou soluções de regularidade limitada.
- Para problemas deste tipo, a solução com métodos de alta ordem podem dar origem a oscilações que acabam por tornar o esquema instável.
- Este fenômeno é conhecido como *fenômeno de Gibbs*, e é conhecido na literatura desde o fim do século XIX. Ele causa perda de monotonicidade na solução das equações.



# Fenômeno de Gibbs

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

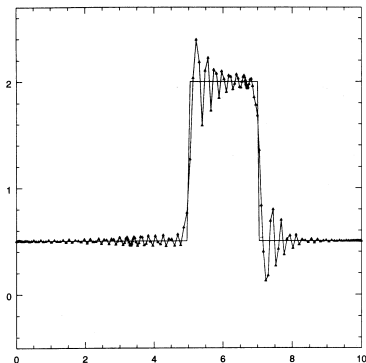
Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Gottlieb *et al.* (1981) provou que, embora apareçam estas oscilações de alta frequência próximo à descontinuidade, métodos espectrais capturam a posição e a velocidade do choque com precisão.





# Lidando com o fenômeno de Gibbs

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

- A incorporação direta de dissipação artificial, técnica de uso bastante comum em métodos de volumes finitos de baixa ordem, não é apropriada para métodos de alta ordem.
- Algumas outras técnicas de estabilização podem ser empregadas:
  - Filtros;
  - Viscosidade artificial dependente do modo;
  - Malha upwind (discretização superconsistente).
- Neste curso, estudaremos as duas primeiras.



# Filtros

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

- O fenômeno de Gibbs pode ser tratado filtrando-se as oscilações de alta frequência, seja no espaço físico, seja no espaço transformado (modal).
- No espaço transformado, os coeficientes  $\hat{u}$  de uma expansão espectral de  $u$  são multiplicados por um filtro  $\sigma(\theta)$ , onde  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .
- O filtro é uma função infinitamente diferenciável, e deve ser igual a um próximo à origem  $\theta = 0$ , de forma que ela não altere o valor médio da função filtrada.
- Ele também deve ser zero fora da faixa de  $\theta$  (isto é, para  $|\theta| \geq \pi$ ).



# Filtros de Vandeven I

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

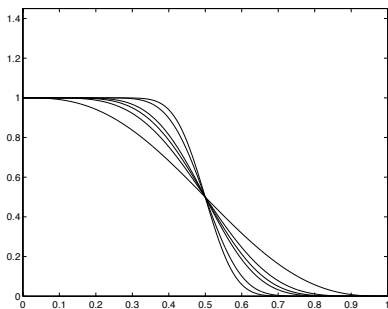
Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Vandeven (1991) desenvolveu uma série de filtros correspondentes a diferentes ordens  $p$ , tendo a forma

$$\sigma_p(x) = 1 - \frac{(2p-1)!}{(p-1)!^2} \int_0^x [t(1-t)]^{p-1} dt.$$



Filtros para  $p = 3, 6, 8, 10, 20$  e  $30$ .



# Filtros de Vandeven II

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

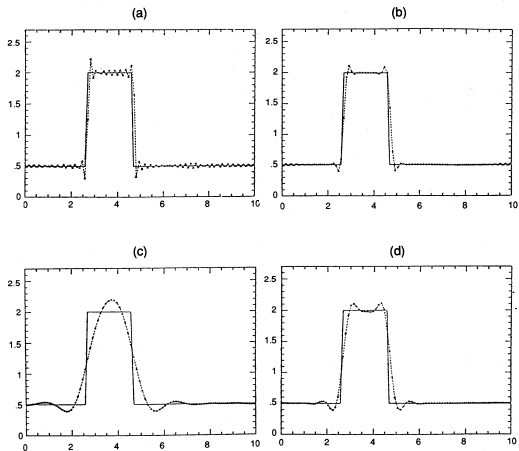
Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização



(a) Solução não filtrada; (b) filtro aplicado no último passo de tempo; (c) aplicado em todo passo de tempo; (d) aplicado a cada 100 passos de tempo.



# Viscosidade artificial dependente do modo

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

- Técnica conhecida como *Spectral vanishing viscosity (SVV)*, em inglês.
- Ideia é baseada na introdução (convolução) de um operador difusivo de segunda ordem. Aqui, trabalharemos com uma solução adaptada onde a operação de convolução é substituída por uma filtragem polinomial.
- Fisicamente, é adicionada uma pequena quantia de dissipação controlada, satisfazendo a 2<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica (aumento de entropia), mas ainda sim conservando a acurácia espectral.
- Matematicamente, baseia-se em soluções viscosas das equações não lineares de Hamilton–Jacobi.





# Aplicando SVV à equação de Burgers I

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Equação de Burgers invíscida:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2(x, t)}{2} \right) = 0.$$

Condição necessária imposta pela 2ª Lei:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2(x, t)}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^3(x, t)}{3} \right) \leq 0.$$

Introdução de SVV no lado direito da equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( F \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$



# Aplicando SVV à equação de Burgers II

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Examinando somente o termo SVV, ignorando termos de fronteira, obtemos a forma fraca:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x}, F \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Seja  $\mathbf{T}$  uma matriz que transforma os coeficientes modais  $\hat{\mathbf{u}}$ , relacionados às funções  $\{\psi_k\}$  da base  $C^0$ , nos coeficientes  $\tilde{\mathbf{u}}$ , relacionados às funções  $\{\tilde{\psi}_k\}$  de uma base ortonormal que cubra o mesmo espaço da base  $C^0$ . Seja  $\mathbf{F}$  uma matriz diagonal que atue como a função de filtro, cujos elementos são dados por

$$\hat{F}_k = e^{-\frac{(k-P)^2}{(k-M_{SVV})^2}}, \quad k > M_{SVV} \approx 5\sqrt{P}.$$



# Aplicando SVV à equação de Burgers III

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Temos então que  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{u}}$ .

Vamos aplicar o filtro nos coeficientes  $\tilde{\mathbf{u}}$  e depois retornar à base  $C^0$ . Ou seja,

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}\hat{\mathbf{u}}.$$

Dessa forma, a operação completa é

$$\mathbf{S}^{\top}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\hat{\mathbf{u}},$$

onde  $\mathbf{S}_{ij} = (\phi_i, \partial\phi_j/\partial x)$  e  $\mathbf{M}_{ij} = (\phi_i, \phi_j)$ .

Pode-se mostrar que  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{T}^{\top}$ , e o operador SVV discreto, que é simétrico e semi-positivo definido, tem a forma final

$$\mathbf{S}^{\top}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{T}^{\top}\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S})^{\top}\mathbf{T}^{\top}\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\hat{\mathbf{u}}.$$



# Aplicando SVV à equação de Burgers: exemplo

Eq. Advecção

Bruno S.  
Carmo

Introdução

Eq. de  
advecção  
linear

Discretização  
de Galerkin  
Contínuo

Discretização  
de Galerkin  
Descontínuo

Espectro do  
operador de  
advecção

Semi-  
lagrangiana

Técnicas de  
estabilização

Domínio com cinco elementos equispaçados,  $P = 16$ . Gráfico de cima sem SVV e de baixo com SVV com  $M_{SVV} = 8$  e  $\epsilon = 1/16$ .

