Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor
2º termo / 2017 – Professor: Bruno Souza Carmo

Lista de Exercícios 6

1. Deduza os coeficientes dos métodos de multi-passos até terceira ordem a partir da ideia de construção dos métodos.

2. Utilizando o Nektar++,

a) Resolva o problema de Helmholtz

$$\nabla^2 u - \lambda u = -(\lambda + \pi^2)\cos(\pi\xi_1)\cos(\pi\xi_2)$$

no elemento padrão quadrilateral Ω_{st} com $\lambda = 1$. Este problema pode ser escrito na sua forma fraca usando a notação matricial,

$$\mathbf{H}^e\hat{\mathbf{u}}^e = [\mathbf{L}^e + \lambda\mathbf{M}^e]\hat{\mathbf{u}}^e = \hat{\mathbf{f}}^e,$$

onde

$$\hat{\mathbf{f}}^e[m(pq)] = \int_{\Omega_{\text{st}}} \phi_{pq}(\lambda + \pi^2)\cos(\pi\xi_1)\cos(\pi\xi_2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

Note a mudança de sinal do problema discreto em relação ao problema contínuo devido ao uso da integração por partes na construção da forma fraca do laplaciano. Resolva o problema usando a expansão modal C^0, $\phi_{pq} = \psi_p^a\psi_q^a$, e a expansão nodal $\phi_{pq} = h_p h_q$. A solução analítica deste problema é $u(\xi_1, \xi_2) = \cos(\pi\xi_1)\cos(\pi\xi_2)$. Se não impusermos condições de contorno explicitamente neste problema, o que estamos fazendo é resolver o problema com condições de contorno do tipo Neumann iguais a zero ($g_{\mathcal{N}} = 0$) em toda a fronteira. Para este problema em $\Omega_{\text{st}} \in \{-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$ a solução de fato tem condições de contorno naturais homogêneas nas fronteiras. Verifique a convergência exponencial da solução com P resolvendo o problema para $2 \leq P \leq 10$ e traçando um gráfico do logaritmo do erro em função da ordem do polinômio.

b) Resolva o problema de Helmholtz

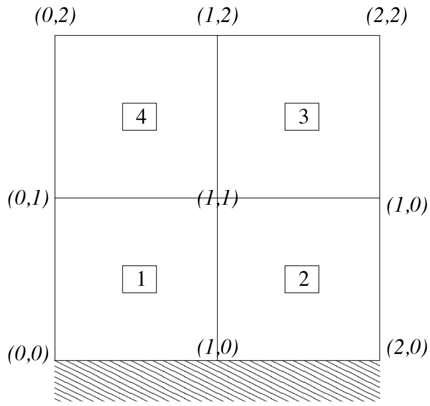
$$\nabla^2 u - u = -(1 + \pi^2)\,\mathrm{sen}(\pi\xi_1)\,\mathrm{sen}(\pi\xi_2)$$

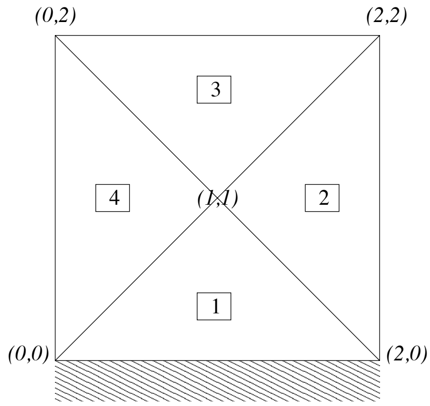
no elemento padrão quadrilateral com as mesmas expansões empregadas no item anterior. A solução analítica deste problema é $u(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{sen}(\pi\xi_1)\,\mathrm{sen}(\pi\xi_2)$, de modo que condições de contorno do tipo Neumann não homogêneas serão necessárias. Isto significa que o vetor de carregamento será modificado, pois é necessário adicionar a integral $\langle v, g_{\mathcal{N}}\rangle$ a todos os graus de liberdade de aresta. A imposição da condição de contorno pode ser feita de forma simples, com a especificação da mesma no arquivo xml de entrada, mas tente identificar no código fonte a realização da modificação do vetor de carregamento. Verifique a convergência exponencial das soluções.

c) Resolva o problema do item anterior impondo condição de contorno de Dirichlet ao longo da aresta $\xi_2 = -1$. Isto requer a introdução de uma função conhecida $u^{\mathcal{D}}$, que satisfaça as condições de contorno essenciais. Uma forma computacionalmente conveniente de se fazer isso é utilizando a projeção mista no contorno, conforme discutido em classe. Depois é necessário modificar os termos do vetor de carregamento somando a contribuição adicional $(\nabla\phi_{pq}, \nabla u^{\mathcal{D}})_{\Omega_e} + \lambda(\phi_{pq}, u^{\mathcal{D}})_{\Omega_e}$. Mais uma vez, a imposição da condição desta contorno pode ser feita de forma simples, com a especificação da mesma no arquivo xml de entrada, mas tente identificar no código fonte a realização das modificações descritas acima. Verifique a convergência exponencial da suas soluções.

d) Repita os dois itens anteriores para o elemento triangular padrão, usando a expansão modal $\phi_{pq} = \psi_p^a \psi_{pq}^b$.

3. Usando o Nektar++, obtenha aproximações globais C^0 contínuas da soluções da equação de Helmholtz $\nabla^2 u - \lambda u = f$ nos domínios computacionais da figura abaixo. Admitindo $\lambda = 1$, considere os seguintes casos.





a) Considere $f(x_1, x_2) = -(1+\pi^2)\cos(\pi x_1)\cos(\pi x_2)$, que tem condições do tipo Neumann iguais a zero em toda a fronteira.

b) Considere $f(x_1, x_2) = -(1+\pi^2)\,\mathrm{sen}(\pi x_1)\,\mathrm{sen}(\pi x_2)$ com condições de contorno naturais não nulas em todas as fronteiras.

c) Introduza condições de contorno de Dirichlet ao longo da fronteira onde $x_2 = 0$.

d) Verifique a convergência exponencial da discretização p e algébrica da discretização h variando a ordem dos polinômios da aproximação e refinamentos uniformes da malha. Trace gráficos dos erros das aproximações em função do grau do polinômio e do número de elementos.