Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor
2º termo / 2017 – Professor: Bruno Souza Carmo

Lista de Exercícios 3

Os exercícios a seguir devem ser resolvidos usando o Nektar++. Recomenda-se a leitura do manual do usuário (disponível em `http://doc.nektar.info/userguide/latest/`) até a seção 6, inclusive. Note que os problemas desta lista são unidimensionais, em tese mais simples do que os exemplos bidimensionais dos tutoriais e exemplos.

1. Considere o problema de projeção $u^\delta(x) = f(x)$ onde $f(x)$ é uma função conhecida. Problemas desse tipo prescindem de condições de contorno para serem resolvidos. Usando a formulação de Galerkin, um problema de projeção no intervalo $\xi \in [-1, 1]$ tem o enunciado:

$$\text{Encontre } u^\delta \in \mathcal{X}^\delta, \text{ tal que } \int_{-1}^{1} v^\delta(\xi) u^\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} v^\delta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad \forall v^\delta \in \mathcal{X}^\delta.$$

Escolhendo uma expansão discreta $\phi_p(\xi)$ de forma que a solução aproximada seja dada por $u^\delta(\xi) = \sum_{p=0}^{P} \hat{u}_p \phi_p(\xi)$ leva ao seguinte sistema matricial

$$\mathbf{M}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f},$$

onde

$$\mathbf{M}[p][q] = \int_{-1}^{1} \phi_q(\xi)\phi_p(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad \hat{\mathbf{u}}[p] = \hat{u}_p, \qquad \mathbf{f}[p] = \int_{-1}^{1} \phi_p(\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Usando as bases calculadas nos exercícios 1 e 2 da lista 2, execute as seguintes tarefas:

a) Construa a matriz de massa $\mathbf{M}$ para $P = 8$ usando quadratura de Gauss–Legendre com $Q = 9$ para a base ortogonal construída com polinômios de Legendre no exercício 1 e quadratura de Gauss–Lobatto–Legendre com $Q = 10$ para as bases nodal (usando polinômios de Lagrange) e modal (com $P_P^{1,1}$) do exercício 2. Calcule o número de condicionamento dessas matrizes.

b) Construa o vetor de carregamento f, sendo $f(\xi) = \xi^7$, para $P = 8$, usando quadratura de Gauss–Legendre com $Q = 9$ para a base ortogonal construída com polinômios de Legendre no exercício 1 e quadratura de Gauss–Lobatto–Legendre com $Q = 10$ para as bases nodal (usando polinômios de Lagrange) e modal (com $P_P^{1,1}$) do exercício 2.

c) Resolva o sistema e compare a solução com a resposta esperada, ξ^7.

d) Resolva o problema, utilizando ainda um só elemento, considerando o intervalo $2 \le x \le 5$.

2. Considere agora os seguintes problemas multielementares globais, utilizando a base C^0:

a) Resolva um problema de projeção, como no exercício anterior, sem impor condições de contorno, usando $N_{el} = 10$ elementos no intervalo $0 \le x \le 10$ com uma expansão polinomial local de ordem $P = 8$ em cada elemento. Use a função $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ como forçante.

b) Imponha explicitamente as condições de contorno essenciais $u(0) = 0$ e $u(10) = \operatorname{sen}(10)$.

3. Repita os dois exercícios anteriores, usando a base C^0 para o problema de Helmholtz da lista 1, ou seja, resolva a equação

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + 5u = 3{,}5;$$

definida no domínio $\Omega = \{x|0 \leq x \leq 10\}$, sujeita às seguintes condições de contorno,

$$u(x = 0) = 1{,}2; \qquad \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=10} = 0{,}5.$$

Além disso, trace curvas do erro da aproximação em função do número de graus de liberdade para expansão linear variando o número de elementos (convergência h) e para uma discretização de 4 elementos, variando o grau do polinômio (convergência p).