



Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d
Sist. colap.
3d

Exp. ort.
Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier
Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

Bases multidimensionais

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem
com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência de
Calor

Prof. Bruno S. Carmo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

2017



Sumário

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.
Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

- 1 Introdução
- 2 Expansões tensoriais para quadriláteros e hexaedros
 - Decomposição contorno–interior
- 3 Expansões tensoriais modais generalizadas
 - Sistemas de coordenadas
 - Sistema colapsado bidimensional
 - Sistemas colapsados tridimensionais
 - Expansões ortogonais
 - Expansões modificadas C^0
- 4 Expansões com séries de Fourier



Introdução

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.

Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom.
cilíndricos

- Objetivos: explicar as razões para diferentes escolhas de bases, bem como discutir a implementação computacional.
- Todas as expansões discutidas neste capítulo serão consideradas dentro de uma região padrão Ω_{st} .
- Duas dimensões: triângulos e quadriláteros. Três dimensões: hexaedros, prismas, pirâmides e tetraedros.
- Bases tensoriais: $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$ em 2d e $\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ em 3d. ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 são as coordenadas cartesianas. São interessantes pela eficiência computacional. Exemplos:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1)\psi_q^a(\xi_2) \quad \text{ou}$$

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = h_p(\xi_1)h_q(\xi_2)$$



Expansões tensoriais para quadriláteros e hexaedros I

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.
Exp. mod.
 \mathbb{C}^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

Regiões (ou elementos) padrão:

$$\Omega_{st} = Q^2 = \{-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$$

$$\Omega_{st} = Q^3 = \{-1 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 1\}$$

As bases multidimensionais são construídas multiplicando as bases unidimensionais de cada direção.

As bases unidimensionais podem ser entendidas como tensores unidimensionais, de forma que as bases multidimensionais são geradas através de produtos tensoriais.



Expansões tensoriais para quadriláteros e hexaedros

II

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.

Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom.
cilíndricos

Relembrando as expansões unidimensionais mais usadas:

Base modal C^0

$$\phi_p(\xi) = \begin{cases} \psi_0^a(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, & p = 0, \\ \psi_p^a(\xi) = \left(\frac{1-\xi}{2}\right) \left(\frac{1+\xi}{2}\right) P_{p-1}^{1,1}(\xi), & 0 < p < P, \\ \psi_P^a(\xi) = \frac{1+\xi}{2}, & p = P. \end{cases}$$

Base nodal (C^0)

$$\phi_p(\xi) = h_p(\xi) = \frac{(\xi - 1)(\xi + 1)L'_P(\xi)}{P(P + 1)L_P(\xi_p)(\xi - \xi_p)}, \quad 0 \leq p \leq P.$$

Base ortogonal ao produto interno L^2

$$\phi_p(\xi) = \tilde{\psi}_p^a(\xi) = L_p(\xi).$$



Expansões tensoriais para quadriláteros e hexaedros

III

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.

Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom.
cilíndricos

O subscrito simples p denota tensor unidimensional. As bases bi e tridimensionais são então definidas:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2), \quad 0 \leq p, q; p \leq P_1; q \leq P_2;$$

$$\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3),$$

$$0 \leq p, q, r; p \leq P_1; q \leq P_2; r \leq P_3.$$

Note que a ordem do polinômio em cada direção pode variar.



Expansões tensoriais para quadriláteros e hexaedros IV

Bases multi-dimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

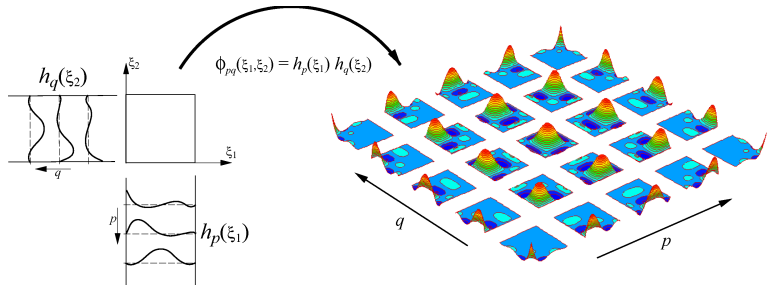
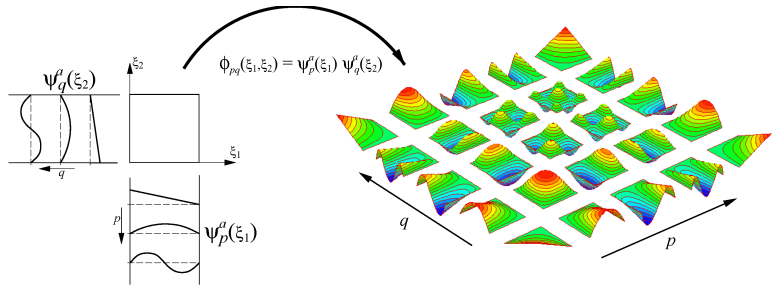
Exp. ort.

Exp. mod. C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom. cilíndricos





Decomposição contorno–interior I

Bases multi-dimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno–interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

Exp. ort.

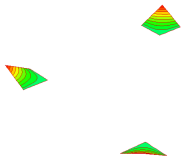
Exp. mod. C^0

Exp. Fourier

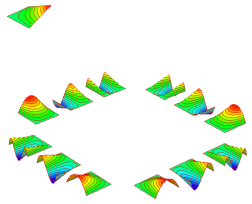
Dir. Hom.

Dom. cilíndricos

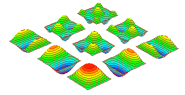
As bases unidimensionais que têm decomposição contorno–interior automaticamente geram bases multidimensionais com esta propriedade. Em duas dimensões, os modos de contorno são os modos de vértice e aresta, enquanto que em três dimensões os modos de contorno são os modos de vértice, aresta e face.



Vertex modes



Edge modes



Face modes



Decomposição contorno–interior II

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

**Decomposição
contorno–
interior**

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

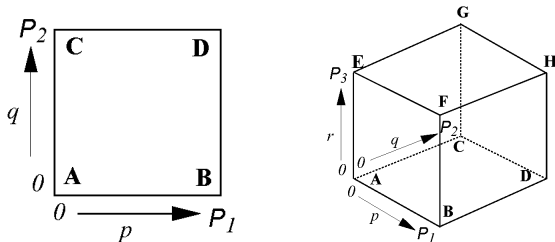
Exp. ort.

Exp. mod.
 c^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

A identificação dos modos de contorno pode ser feita olhando os índices p e q , tomando como referência o sistema das figuras a seguir.



Por exemplo, o modo do vértice A corresponde aos índices $p = 0$, $q = 0$, ou seja, $\phi_{0,0}(\xi_1, \xi_2) = \psi_0^a(\xi_1)\psi_0^a(\xi_2)$. Os modos da aresta AC correspondem aos índices $p = 0$, $0 < q < P_2$, ou seja, $\phi_{0,0}(\xi_1, \xi_2) = \psi_0^a(\xi_1)\psi_q^a(\xi_2)$ ($0 < q < P_2$).



Decomposição contorno–interior III

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

**Decomposição
contorno–
interior**

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.

Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom.
cilíndricos

Dessa forma, os modos de vértice para quadriláteros são:

$$\begin{aligned}\text{Vértice A : } \phi_{0,0}(\xi_1, \xi_2) &= \psi_0^a(\xi_1)\psi_0^a(\xi_2) \\ \text{Vértice B : } \phi_{P_1,0}(\xi_1, \xi_2) &= \psi_{P_1}^a(\xi_1)\psi_0^a(\xi_2) \\ \text{Vértice C : } \phi_{0,P_2}(\xi_1, \xi_2) &= \psi_0^a(\xi_1)\psi_{P_2}^a(\xi_2) \\ \text{Vértice D : } \phi_{P_1,P_2}(\xi_1, \xi_2) &= \psi_{P_1}^a(\xi_1)\psi_{P_2}^a(\xi_2).\end{aligned}$$

os modos de aresta são:

$$\begin{aligned}\text{Aresta AB : } \phi_{p,0}(\xi_1, \xi_2) &= \psi_p^a(\xi_1)\psi_0^a(\xi_2) & (0 < p < P_1) \\ \text{Aresta CD : } \phi_{p,P_2}(\xi_1, \xi_2) &= \psi_p^a(\xi_1)\psi_{P_2}^a(\xi_2) & (0 < p < P_1) \\ \text{Aresta AC : } \phi_{0,q}(\xi_1, \xi_2) &= \psi_0^a(\xi_1)\psi_q^a(\xi_2) & (0 < q < P_2) \\ \text{Aresta BD : } \phi_{P_1,q}(\xi_1, \xi_2) &= \psi_{P_1}^a(\xi_1)\psi_q^a(\xi_2) & (0 < q < P_2).\end{aligned}$$

e os modos de interior:

$$\text{Interior : } \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1)\psi_q^a(\xi_2) \quad (0 < p, q; p < P_1, q < P_2).$$



Expansões tensoriais modais generalizadas I

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.

Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom.
cilíndricos

- Expansões tensoriais para elementos de malhas não-estruturadas; por exemplo, triângulos e tetraedros.
- As expansões são geradas utilizando um sistema de coordenadas baseado no mapeamento de um quadrado num triângulo através do colapso de um dos vértices.
- Estas bases não tem simetria rotacional, mas tem as vantagens de serem tensoriais e cobrem um espaço polinomial idêntico àquele das expansões não-tensoriais com simetria rotacional.



Expansões tensoriais modais generalizadas II

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.
Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

- Portanto, na ausência de erros de integração, elas são equivalentes a qualquer outra base polinomial usada com formulação de Galerkin.
- A falta de simetria rotacional não afeta a construção multi-elementar no caso bidimensional (com triângulos), mas no caso tridimensional, especificamente para tetraedros, impõe uma restrição de orientação que pode ser satisfeita de maneira trivial.



Sistemas de coordenadas: sistema colapsado bidimensional I

Bases multi-dimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord. **Sist. colap. 2d**

Sist. colap. 3d

Exp. ort.

Exp. mod. C^0

Exp. Fourier

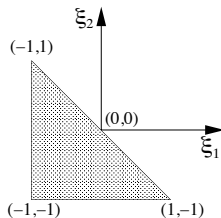
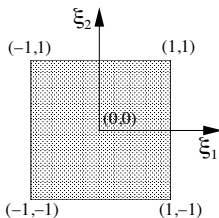
Dir. Hom. Dom. cilíndricos

Relembrando o sistema de coordenadas empregado para um quadrilátero:

$$Q^2 = \{(\xi_1, \xi_2) \mid -1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$$

Para uma região triangular, utilizando o sistema de coordenadas cartesianas, os limites de cada coordenada não são definidos de forma independente:

$$\mathcal{T}^2 = \{(\xi_1, \xi_2) \mid -1 \leq \xi_1, \xi_2; \xi_1 + \xi_2 \leq 0\}$$





Sistemas de coordenadas: sistema colapsado bidimensional II

Bases multi-dimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

Exp. ort.

Exp. mod. C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom. cilíndricos

A utilização de um sistema de coordenadas para o qual a definição dos limites da região padrão utiliza limites para cada coordenada independentes das outras coordenadas é vantajosa na medida em que permite a construção de bases tensoriais.

Um sistema que atende este requisito para elementos triangulares é dado pela transformação:

$$\eta_1 = 2 \frac{1 + \xi_1}{1 - \xi_2} - 1, \quad \eta_2 = \xi_2;$$

que tem a inversa

$$\xi_1 = \frac{(1 + \eta_1)(1 - \eta_2)}{2} - 1, \quad \xi_2 = \eta_2.$$



Sistemas de coordenadas: sistema colapsado bidimensional III

Bases multidimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord. Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

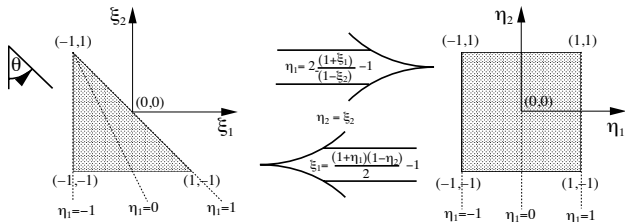
Exp. ort.

Exp. mod. C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom. cilíndricos



Utilizando este sistema de coordenadas (η_1, η_2) , o elemento padrão triangular é definido por:

$$\Omega_{st} = \mathcal{T}^2 = \{(\eta_1, \eta_2) \mid -1 \leq \eta_1, \eta_2 \leq 1\}.$$

A transformação mapeia o domínio triangular num quadrado. Uma consequência é que a coordenada η_1 tem valor múltiplo em $(\eta_1 = 1, \eta_2 = -1)$. Este tipo de singularidade também aparece em sistemas de coordenadas cilíndricos e esféricos, então não representa um problema.



Sistemas de coordenadas: sistemas colapsados tridimensionais I

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.
Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

Para gerar os sistemas de coordenadas para os elementos tridimensionais, aplicamos um procedimento análogo àquele utilizado para gerar o sistema apropriado para o triângulo.

Começando com uma região hexaedral e aplicando a transformação inversa, podemos chegar a um novo sistema de coordenadas na região tetraedral \mathcal{T}^3 :

$$\mathcal{T}^3 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid -1 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq -1\}.$$



Sistemas de coordenadas: sistemas colapsados tridimensionais II

Bases multi-dimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord. Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

Exp. ort. Exp. mod. C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom. Dom. cilíndricos

Começando com o sistema de coordenadas locais (η_1, η_2, η_3) , onde todas as coordenadas são delimitadas por valores constantes $(-1 \leq \eta_1, \eta_2, \eta_3 \leq 1)$, aplicando o colapso de vértice no plano (η_1, η_3) obtemos uma nova ordenada $\overline{\eta}_1$:

$$\overline{\eta}_1 = \frac{(1 + \eta_1)(1 - \eta_3)}{2} - 1, \quad \eta_3 = \eta_3.$$

O novo sistema $(\overline{\eta}_1, \eta_2, \eta_3)$ cobre uma região prismática (de base triangular).

Aplicando agora a transformação inversa no plano (η_2, η_3) , e introduzindo as ordenadas ξ_2 e ξ_3 :

$$\xi_2 = \frac{(1 + \eta_2)(1 - \eta_3)}{2} - 1, \quad \xi_3 = \eta_3,$$

percebemos que as coordenadas $(-1 \leq \overline{\eta}_1, \xi_2, \xi_3 \leq 1)$ cobre uma região piramidal (de base quadrada).



Sistemas de coordenadas: sistemas colapsados tridimensionais III

Bases multidimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

Exp. ort.

Exp. mod. C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom. cilíndricos

Por fim, aplicamos a transformação inversa no plano $(\overline{\eta}_1, \xi_2)$ definindo a ordenada ξ_1 :

$$\xi_1 = \frac{(1 + \overline{\eta}_1)(1 - \eta_2)}{2} - 1, \quad \xi_2 = \xi_2.$$

Desse modo, a transformação de coordenadas apropriada para elementos tetraedrais é

$$\eta_1 = \frac{2(1 + \xi_1)}{-\xi_2 - \xi_3} - 1, \quad \eta_2 = \frac{2(1 + \xi_2)}{1 - \xi_3} - 1, \quad \eta_3 = \xi_3,$$

de forma que a região \mathcal{T}^3 tem limites constantes

$$\mathcal{T}^3 = \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \mid -1 \leq \eta_1, \eta_2, \eta_3 \leq 1\}.$$



Sistemas de coordenadas: sistemas colapsados tridimensionais IV

Bases multidimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

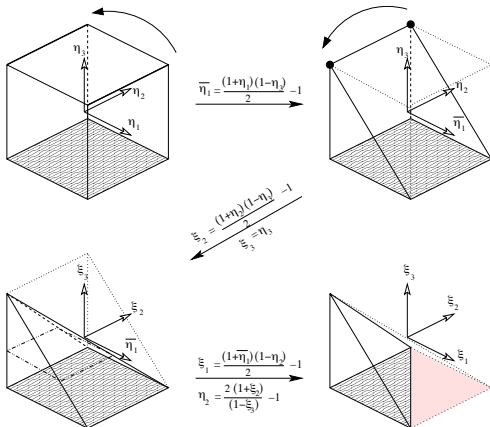
Sist. coord. Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

Exp. ort. Exp. mod. C^0

Exp. Fourier Dir. Hom. Dom. cilíndricos

Domínios piramidais e prismáticos são gerados parando a sequência de transformações no passo intermediário apropriado.





Sistemas de coordenadas: sistemas colapsados tridimensionais V

Bases multidimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

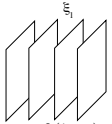
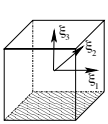
Exp. ort.

Exp. mod. c^0

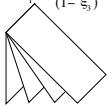
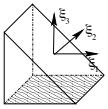
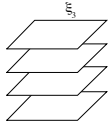
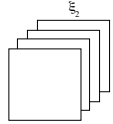
Exp. Fourier

Dir. Hom.

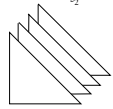
Dom. cilíndricos



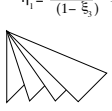
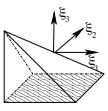
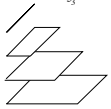
$$\bar{\eta}_1 = \frac{2(1 + \eta_1)}{(1 - \eta_1)} - 1$$



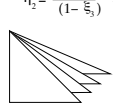
$$\bar{\eta}_1 = \frac{2(1 + \eta_1)}{(1 - \eta_1)} - 1$$



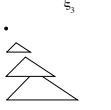
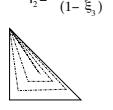
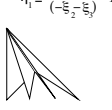
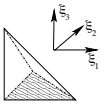
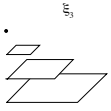
$$\eta_2 = \frac{2(1 + \eta_2)}{(1 - \eta_2)} - 1$$



$$\eta_1 = \frac{2(1 + \eta_1)}{(\frac{1}{\eta_1} - \eta_1)} - 1$$



$$\eta_2 = \frac{2(1 + \eta_2)}{(1 - \eta_2)} - 1$$





Expansões ortogonais bidimensionais I

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.

Exp. mod.
c⁰

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom.
cilíndricos

No caso bidimensional, ou seja, para elementos triangulares, a expansão ortogonal é construída a partir do produto de um tensor unidimensional $\tilde{\psi}_p^a(x)$ com um tensor bidimensional $\tilde{\psi}_{pq}^b(x)$:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{\psi}_p^a(\eta_1)\tilde{\psi}_{pq}^b(\eta_2).$$

Na prática, o que isso significa é que para cada valor de p da função principal $\tilde{\psi}_p^a(\eta_1)$, $\tilde{\psi}_{pq}^b(\eta_2)$ tem uma forma diferente.

As funções $\tilde{\psi}_p^a(\eta_1)$, $\tilde{\psi}_{pq}^b(\eta_2)$ e $\tilde{\psi}_{pqr}^c$ são chamadas de *funções principais ortogonais*, e tem a seguinte forma:

$$\tilde{\psi}_p^a(x) = P_p^{0,0}(x), \quad \tilde{\psi}_{pq}^b(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^p P_q^{2p+1,0}(x),$$

$$\tilde{\psi}_{pqr}^c(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^{p+q} P_r^{2p+2q+2,0}(x).$$



Expansões ortogonais bidimensionais II

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.

Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

Pode-se então definir as expansões apropriadas para cada tipo de elemento a partir de um produto tensorial generalizado. Com isso, as expansões bidimensionais são definidas da seguinte forma:

$$\text{quadriláteros: } \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{\psi}_p^a(\xi_1)\tilde{\psi}_q^a(\xi_2),$$

$$\text{triângulos: } \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{\psi}_p^a(\eta_1)\tilde{\psi}_{pq}^b(\eta_2),$$

onde

$$\eta_1 = 2\frac{1 + \xi_1}{1 - \xi_2} - 1, \quad \eta_2 = \xi_2.$$



Expansões ortogonais bidimensionais III

Bases multidimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

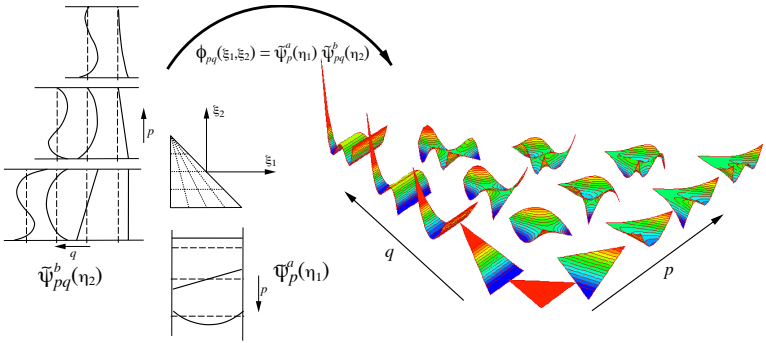
Exp. ort.

Exp. mod. C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom. cilíndricos





Expansões ortogonais tridimensionais

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.

Exp. mod.
c⁰

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom.
cilíndricos

Já as expansões tridimensionais são definidas em termos das funções principais do seguinte modo:

$$\text{hexaedros: } \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \tilde{\psi}_p^a(\xi_1)\tilde{\psi}_q^a(\xi_2)\tilde{\psi}_r^a(\xi_3),$$

$$\text{prismas: } \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \tilde{\psi}_p^a(\bar{\eta}_1)\tilde{\psi}_q^a(\xi_2)\tilde{\psi}_{pr}^b(\xi_3),$$

$$\text{pirâmides: } \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \tilde{\psi}_p^a(\bar{\eta}_1)\tilde{\psi}_q^a(\eta_2)\tilde{\psi}_{pqr}^c(\eta_3),$$

$$\text{tetraedros: } \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \tilde{\psi}_p^a(\eta_1)\tilde{\psi}_{pq}^b(\eta_2)\tilde{\psi}_{pqr}^c(\eta_3),$$

onde

$$\eta_1 = 2\frac{1+\xi_1}{-\xi_2-\xi_3} - 1, \quad \bar{\eta}_1 = 2\frac{1+\xi_1}{1-\xi_3} - 1, \quad \eta_2 = 2\frac{1+\xi_2}{1-\xi_3} - 1, \quad \eta_3 = \xi_3.$$

Estas expansões são polinômios tanto em termos das coordenadas locais colapsadas quanto em termos das coordenadas cartesianas.



Expansões ortogonais 2d: cobertura do espaço polinomial

Bases multi-dimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

Exp. ort.

Exp. mod. C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom. cilíndricos

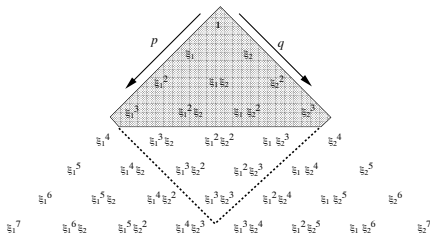
Os espaços polinomiais cobertos para as expansões bidimensionais são definidos por

$$\mathcal{P} = \text{Span}\{\xi_1^p \xi_2^q\}_{(p,q) \in \Upsilon},$$

onde Υ é definido para cada tipo de elemento

quadriláteros: $\Upsilon = \{(pq) | 0 \leq p, q, p \leq P_1, q \leq P_2\},$

triângulos: $\Upsilon = \{(pq) | 0 \leq p, q, p \leq P_1, p + q \leq P_2, P_1 \leq P_2\}.$





Expansões ortogonais 3d: cobertura do espaço polinomial

Bases multi-dimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.
Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

Já para expansões tridimensionais, os espaços polinomiais são

$$\mathcal{P} = \text{Span}\{\xi_1^p \xi_2^q \xi_3^r\}_{(pqr) \in \Upsilon},$$

onde Υ é definido para cada tipo de elemento

hexaedros:

$$\Upsilon = \{(pqr) | 0 \leq p, q, r; p \leq P_1; q \leq P_2; r \leq P_3\},$$

prismas:

$$\Upsilon = \{(pqr) | 0 \leq p, q, r; p \leq P_1; q \leq P_2; p + r \leq P_3; P_1 \leq P_3\},$$

pirâmides:

$$\Upsilon = \{(pqr) | 0 \leq p, q, r; p \leq P_1; q \leq P_2; p + q + r \leq P_3; P_1, P_2 \leq P_3\},$$

tetraedros:

$$\Upsilon = \{(pqr) | 0 \leq p, q, r; p \leq P_1; p + q \leq P_2; p + q + r \leq P_3; P_1 \leq P_2 \leq P_3\}.$$



Expansões modificadas C^0

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.

**Exp. mod.
 C^0**

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom.
cilíndricos

Assim como no caso de elementos estruturados, é interessante modificar as bases ortogonais de modo a facilitar a imposição de continuidade C^0 nas expansões globais sem prejudicar as boas qualidades da base do ponto de vista numérico.

Apresentamos a seguir as funções principais modificadas, $\psi_i^a(x)$, $\psi_{ij}^b(x)$ e $\psi_{ijk}^c(x)$ ($0 \leq i \leq I$, $0 \leq j \leq J$, $0 \leq k \leq K$):



Funções principais modificadas I

Bases multi-dimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

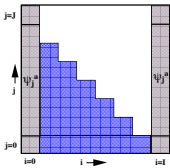
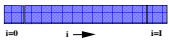
Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord. Sist. colap. 2d Sist. colap. 3d

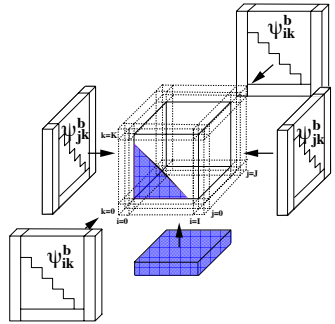
Exp. ort. Exp. mod. c^0

Exp. Fourier Dir. Hom. Dom. cilíndricos



ψ_i^a

ψ_{ij}^b



ψ_{ijk}^c

$$\psi_i^a(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2}, & i = 0, \\ \frac{1-x}{2} \frac{1+x}{2} P_{i-1}^{1,1}(x), & 1 \leq i < l, \\ \frac{1+x}{2}, & i = l. \end{cases}$$



Funções principais modificadas II

Bases multi-dimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

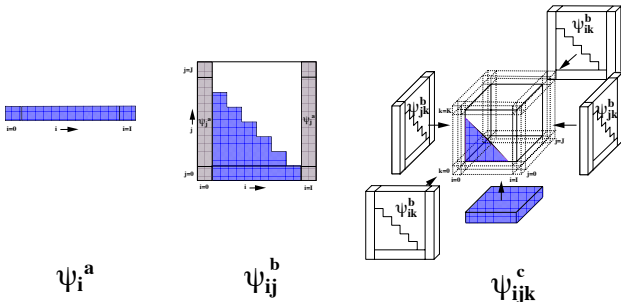
Exp. ort.

Exp. mod. c^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom. cilíndricos



$$\psi_{ij}^{b,j}(x) = \begin{cases} \psi_j^a(x), & i = 0, 0 \leq j \leq J, \\ \left(\frac{1-x}{2}\right)^{i+1}, & 1 \leq i < l, j = 0, \\ \left(\frac{1-x}{2}\right)^{i+1} \frac{1+x}{2} P_{j-1}^{2i+1,1}(x), & 1 \leq i < l, 1 \leq j < J, \\ \psi_j^a(x), & i = l, 0 \leq j \leq J. \end{cases}$$



Funções principais modificadas III

Bases multi-dimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

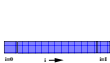
Exp. ort.

Exp. mod. c^0

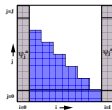
Exp. Fourier

Dir. Hom.

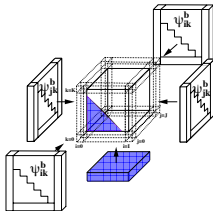
Dom. cilíndricos



ψ_i^a



ψ_{ij}^b



ψ_{ijk}^c

$$\psi_{ijk}^c(x) = \begin{cases} \psi_{jk}^b(x), & i = 0, 0 \leq j \leq J, 0 \leq k \leq K, \\ \psi_{ik}^b(x), & 0 \leq i \leq I, j = 0, 0 \leq k \leq K, \\ \left(\frac{1-x}{2}\right)^{i+j+1}, & 1 \leq i < I, 1 \leq j < J, k = 0, \\ \left(\frac{1-x}{2}\right)^{i+j+1} \frac{1+x}{2} P_{k-1}^{2i+2j+1,1}(x), & 1 \leq i < I, 1 \leq j < J, 1 \leq k < K, \\ \psi_{ik}^b(x), & 0 \leq i \leq I, j = J, 0 \leq k \leq K, \\ \psi_{jk}^b(x), & i = I, 0 \leq j \leq J, 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$



Expansões modificadas C^0 bi e tridimensionais

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.
Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

As expansões apropriadas, C^0 , para cada elemento são então, para elementos bidimensionais:

$$\text{quadriláteros: } \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1)\psi_q^a(\xi_2),$$

$$\text{triângulos: } \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\eta_1)\psi_{pq}^b(\eta_2),$$

e para elementos tridimensionais:

$$\text{hexaedros: } \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \psi_p^a(\xi_1)\psi_q^a(\xi_2)\psi_r^a(\xi_3),$$

$$\text{prismas: } \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \psi_p^a(\overline{\eta_1})\psi_q^a(\xi_2)\psi_{pr}^b(\xi_3),$$

$$\text{pirâmides: } \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \psi_p^a(\overline{\eta_1})\psi_q^a(\eta_2)\psi_{pqr}^c(\eta_3),$$

$$\text{tetraedros: } \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \psi_p^a(\eta_1)\psi_{pq}^b(\eta_2)\psi_{pqr}^c(\eta_3),$$



Expansão modificada C^0 : elemento triangular I

Bases multi-dimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord. Sist. colap. 2d

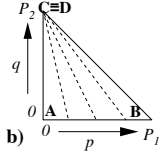
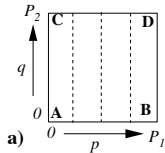
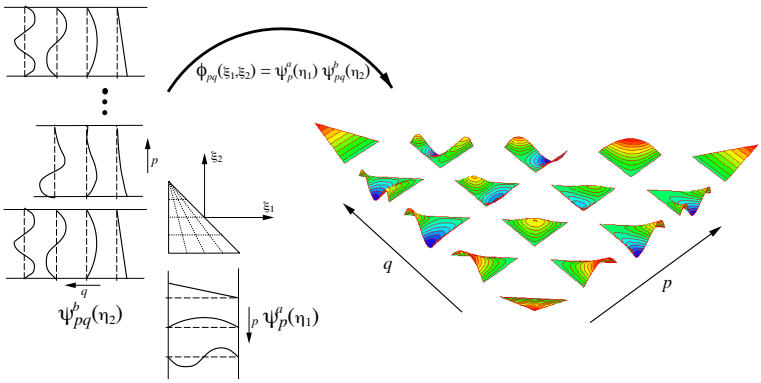
Sist. colap. 3d

Exp. ort.

Exp. mod. C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom. Dom. cilíndricos





Expansão modificada C^0 : elemento triangular II

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.
Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

Assim como foi feito para um quadrilátero, num triângulo podemos discernir os modos de contorno e interior através dos índices dos tensores. Por exemplo, os modos dos vértices A e B da figura são:

$$\text{Vértice A} : \phi_{0,0}(\eta_1, \eta_2) = \psi_0^a(\eta_1)\psi_{00}^b(\eta_2)$$

$$\text{Vértice B} : \phi_{P_1,0}(\eta_1, \eta_2) = \psi_{P_1}^a(\eta_1)\psi_{P_10}^b(\eta_2)$$

No vértice colapsado CD, somamos as contribuições relativas aos índices correspondentes aos vértices C e D, ou seja:

$$\phi_{0P_2}(\eta_1, \eta_2) + \phi_{P_1P_2}(\eta_1, \eta_2) = \psi_0^a(\eta_1)\psi_{0P_2}^b(\eta_2) + \psi_{P_1}^a(\eta_1)\psi_{P_1P_2}^b(\eta_2).$$

Da definição de $\psi_{pq}^b(\eta_2)$ vemos que $\psi_{0P_2}^b(\eta_2) = \psi_{P_1P_2}^b(\eta_2)$, portanto:

$$\text{Vértice CD: } (\psi_0^a(\eta_1) + \psi_{P_1}^a(\eta_1))\psi_{0P_2}^b(\eta_2).$$



Expansão modificada C^0 : elemento triangular III

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d
Sist. colap.
3d

Exp. ort.
Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

Mas

$$\psi_0^a(\eta_1) + \psi_{P_1}^a(\eta_1) = \frac{1 - \eta_1}{2} + \frac{1 + \eta_1}{2} = 1,$$

portanto

$$\text{Vértice CD: } \psi_{0P_2}^b(\eta_2) = \frac{1 + \eta_2}{2}.$$

Por fim, os modos de aresta são

$$\text{Aresta AB: } \phi_{p,0}(\eta_1, \eta_2) = \psi_p^a(\eta_1)\psi_{p0}^b(\eta_2) \quad (0 < p < P_1)$$

$$\text{Aresta AC: } \phi_{0,q}(\eta_1, \eta_2) = \psi_0^a(\eta_1)\psi_{0q}^b(\eta_2) \quad (0 < q < P_2)$$

$$\text{Aresta BD: } \phi_{P_1,q}(\eta_1, \eta_2) = \psi_{P_1}^a(\eta_1)\psi_{P_1q}^b(\eta_2) \quad (0 < q < P_2).$$

os de interior ($0 < p, q; p < P_1; p + q < P_2; P_1 \leq P_2$):

$$\phi_{pq}(\eta_1, \eta_2) = \psi_p^a(\eta_1)\psi_{pq}^b(\eta_2).$$



Expansão modificada C^0 : elemento triangular IV

Bases multi-dimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

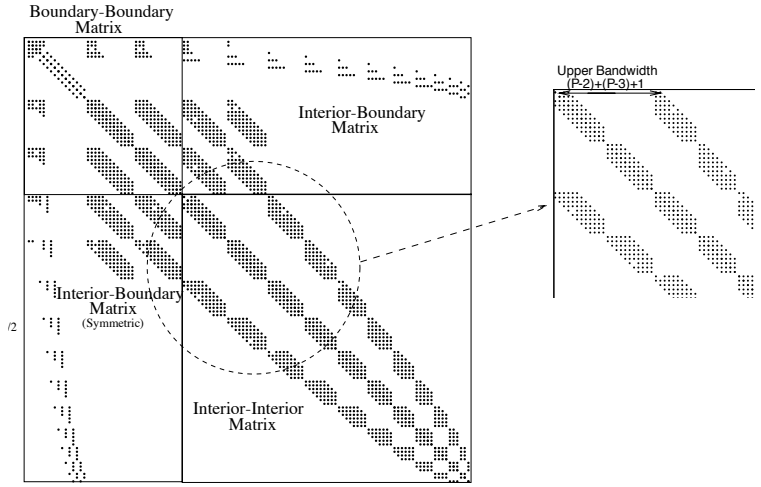
Exp. ort.

Exp. mod. C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom. cilíndricos





Expansões modificadas C^0 : elementos tridimensionais

Bases multidimensionais

Bruno S. Carmo

Introdução

Exp. tens.: quad e hex

Decomposição contorno-interior

Exp. tens. modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap. 2d

Sist. colap. 3d

Exp. ort.

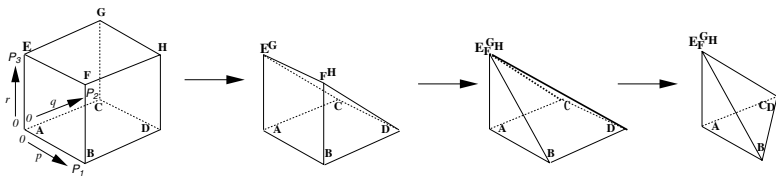
Exp. mod. C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.

Dom. cilíndricos

Para os elementos tridimensionais, podemos usar o mesmo procedimento utilizado para o triângulo, tendo em mente que além de vértices, aresta são colapsadas.



Finalmente, o espaço polinomial coberto pelas expansões que utilizam a base modificada é o mesmo daquele coberto pelas expansões ortogonais.



Domínios com uma ou mais direções homogêneas

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.
Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

Em muitas aplicações, tais como o escoamento entre placas paralelas ou ao redor de um cilindro, há ao menos uma direção homogênea, ou seja, uma direção sem um comprimento característico.

Chamando esta direção de ξ_3 , podemos construir uma base tridimensional $\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ em termos de qualquer uma das bases bidimensionais discutidas anteriormente $\phi_{pq}^{2d}(\xi_1, \xi_2)$, multiplicada por uma expansão completa em ξ_3 , representada por $\varphi_r(\xi_3)$:

$$\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{pq}^{2d}(\xi_1, \xi_2)\varphi_r(\xi_3).$$

Esta expressão é um produto tensorial da base bidimensional com a expansão $\varphi_r(\xi_3)$. Como não há um comprimento característico na direção ξ_3 , é vantajoso utilizar uma expansão puramente espectral, ou seja, somente do tipo p , como $\varphi_r(\xi_3)$.



Domínios com uma ou mais direções homogêneas: escolha da expansão

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.

Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.

Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

Se condições de contorno do tipo Dirichlet ou Neumann são necessárias nos extremos da direção homogênea, então diversas expansões polinomiais podem ser utilizadas, como polinômios de Legendre ou de Chebyshev.

Se o domínio é periódico na direção homogênea, então normalmente se usa uma expansão de Fourier:

$$\varphi_r(\xi_3) = e^{ir\beta\xi_3}, \quad \text{onde } \beta = \frac{2\pi}{L_{\xi_3}}$$

e L_{ξ_3} é o comprimento periódico. A grande vantagem é o uso de FFT para ir do espaço transformado para o espaço físico.



Domínios com uma ou mais direções homogêneas: uso de expansão de Fourier

Bases multi-
dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d

Sist. colap.
3d

Exp. ort.
Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

Além disso, considerando operadores diferenciais lineares, notamos que

$$\nabla \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [\tilde{\nabla}_r] \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ ir\beta \end{bmatrix} \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [\tilde{\nabla}_r^2] \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} - r^2 \beta^2 \right) \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned}$$

A introdução dos operadores $\tilde{\nabla}_r$ e $\tilde{\nabla}_r^2$ significa que um problema tridimensional linear pode ser reduzido a uma série de r problemas bidimensionais nos planos de Fourier.



Domínios cilíndricos: expansões com séries de Fourier

Bases multi-dimensionais

Bruno S.
Carmo

Introdução

Exp. tens.:
quad e hex

Decomposição
contorno-
interior

Exp. tens.
modais gen.

Sist. coord.
Sist. colap.
2d
Sist. colap.
3d

Exp. ort.
Exp. mod.
 C^0

Exp. Fourier

Dir. Hom.
Dom.
cilíndricos

- Utilização de uma expansão de Fourier na direção azimutal.
- As equações de transporte devem ser formuladas em coordenadas cilíndricas.
- Singularidade para $r = 0$ pode ser tratada utilizando uma base que tenha decomposição contorno-interior. As mudanças importantes se referem às condições de contorno para $r = 0$ e também à regra de quadratura utilizada nos elementos que tocam o eixo ($r = 0$).¹

¹Referência: Blackburn H. M. & Sherwin S. J. (2004) *Formulation of a Galerkin spectral element-Fourier method for three-dimensional incompressible flows in cylindrical geometries*, Journal of Computational Physics, **197**(2): 759-778.