Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor
2º termo / 2017 – Professor: Bruno Souza Carmo

Lista de Exercícios 2

1. Usando a linguagem ou ambiente de programação de sua preferência, construa as bases formadas por polinômios de grau até 5, até 10 e até 15, considerando o elemento padrão unidimensional, $\Omega_{st} = \{\xi | -1 \leq \xi \leq 1\}$, considerando polinômios de Legendre, Chebyshev, Jacobi $P_P^{1,1}$ e Lagrange. Trace os gráficos de cada um dos polinômios das bases. Para os polinômios de Lagrange, compare dois casos de escolha de pontos de referência: pontos equispaçados e zeros da regra de integração de Gauss–Lobatto–Legendre.

2. Caso necessário, modifique as bases construídas na questão anterior para que tenham continuidade C^0 entre os elementos. Trace novamente os gráficos.

3. Instale a biblioteca Nektar++, cujo código fonte e instruções de instalação estão disponíveis em `http://www.nektar.info`.

4. Faça o tutorial de integração, disponível em `http://doc.nektar.info/tutorials/latest/fundamentals/integration/fundamentals-integration.html`, até a seção 3.1.

5. Usando o Nektar++, calcule as seguintes integrais:

a) Integre $\int_{-1}^{1} \xi^6 \, \mathrm{d}\xi = \sum_{i=0}^{Q-1} w_i \xi_i^6 = 2/7$, usando $Q = 4, 5$ e 6.

b) Integre $\int_{-1}^{2} x^6 \, \mathrm{d}x = 129/7$ usando $Q = 4, 5$ e 6. Note que é necessário fazer um mapeamento e incluir o jacobiano na operação de forma a levar o domínio $x \in [-1, 2]$ a $\xi \in [-1, 1]$.

c) Calcule a integral $\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x) \, \mathrm{d}x = 1$ para $2 \leq Q \leq 8$ e trace um gráfico do erro $\varepsilon = \mathcal{I} - 1$ em função de Q em um gráfico monolog. Ao usar a quadratura de Gauss o que estamos fazendo fundamentalmente é aproximar a função suave $\operatorname{sen}(x)$ por polinômios de ordem $Q - 1$. O erro, ε, será portanto proporcional a C^Q, sendo C uma constante. Sendo assim, o gráfico de $\log(\varepsilon)$ em função de Q deve tender assintoticamente a uma reta.

6. Faça o tutorial de diferenciação, disponível em `http://doc.nektar.info/tutorials/latest/fundamentals/differentiation/fundamentals-differentiation.html`, até a seção 3.1.

7. Usando o Nektar++, faça os seguintes testes:

a) Calcule a derivada da função $u(\xi) = \xi^7$ nos pontos de quadratura ξ_i de forma a obter $\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi_i} = \sum_{j=0}^{Q-1} D[i][j](\xi_j)^7 = 7\xi_i^6$, usando $Q = 7, 8$ e 9 pontos de quadratura. Verifique quantos pontos de quadratura são necessários para ter uma resposta exata (dentro da precisão numérica estabelecida).

b) Usando a regra da cadeia,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x},$$

calcule $\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_i} = 7x_i^6$ quando $u(x) = x^7$ no intervalo $x \in [2, 10]$ onde $x_i = \chi(\xi_i)$ e χ é um mapeamento linear, dado por

$$\chi(\xi) = 2\frac{(1-\xi)}{2} + 10\frac{(1+\xi)}{2}.$$

c) Calcule $\mathcal{I} = -\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x)\,\mathrm{d}x = 1$ para $2 \leq Q \leq 8$ e, como no exercício anterior, trace um gráfico do erro $\varepsilon = \mathcal{I} - 1$ em função de Q num gráfico monolog.