Lista de Exercícios R2

Relatividade Especial - Dinâmica

R2.1 Determine a quantidade de trabalho que deve ser fornecida a um elétron, inicialmente em repouso com massa $m_0 = 0{,}50\ \mathrm{MeV}/c^2$, para que ele atinja as seguintes velocidades:
a) $0{,}60\,c$, (b) $0{,}98\,c$, (c) $0{,}99999\,c$.

R.: (a) $0{,}125$ MeV; (b) $2{,}01$ MeV; (c) 111 MeV.

R2.2 Considere uma partícula movendo-se relativisticamente, ou seja, com uma velocidade u muito próxima da velocidade da luz.

a) Mostre que u difere da velocidade da luz c por
$$\Delta u = c - u \approx \tfrac{1}{2}c\left(m_0c^2/E\right)^2,$$
onde E é a sua energia total.

b) Esta é uma aproximação útil para altas energias. Encontre esta quantidade para um elétron cuja energia cinética é 250 MeV e 50 GeV. Interprete o significado das velocidades obtidas.

Obs: $m_e \approx 0{,}5\ \mathrm{MeV}/c^2$, $1\ \mathrm{GeV} = 10^3\ \mathrm{MeV}$.

R.: 600 m/s, $1{,}5$ cm/s.

R2.3 Mostre que a expressão relativística para a energia cinética pode também ser escrita como:
$$K = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}m_0u^2 \text{ ou } K = \frac{p^2}{(1+\gamma)m_0}.$$
Observe que estas expressões reproduzem a expressão da mecânica clássica para $\gamma = 1$.

R2.4 Encontre o fator de Lorentz e o parâmetro de velocidade β para uma partícula com energia cinética $K = 10$ MeV se a partícula é:

a) um elétron ($m_e \approx 0{,}5\ \mathrm{MeV}/c^2$),

b) um próton ($m_p \approx 1\ \mathrm{GeV}/c^2$).

R.: (a) $\gamma = 21$, $\beta = 0{,}9989$; (b) $\gamma = 1{,}01$, $\beta = 0{,}14$.

R2.5 Duas partículas idênticas, cada uma com massa de repouso m_0, movendo-se com velocidades iguais mas opostas de $0{,}60\,c$ no referencial do laboratório, colidem e "grudam" formando uma única partícula de massa de repouso M_0. Expresse M_0 em termos de m_0.

R.: $M_0 = 2{,}5\,m_0$.

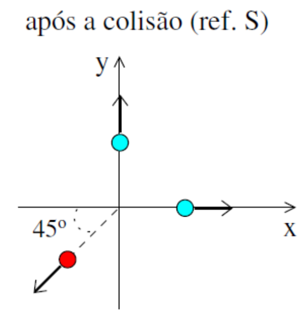
R2.6 a) Qual a mínima energia cinética que um próton deve ter para que ao colidir com outro próton de mesma energia, mas movendo-se em sentido contrário, crie no estado final mais um próton e um anti-próton? No estado final haverá três prótons e um anti-próton e a mínima energia corresponde à situação em que todas as partículas estão em repouso.

b) Determine a energia cinética de um dos prótons originais no referencial em que o outro próton se encontra em repouso.

Obs.: Use para a massa de repouso do próton e do antipróton $M_0 = 1\ \mathrm{GeV}/c^2$.

R.: a) 1 Gev; b) 6 GeV

R2.7 Uma partícula e sua anti-partícula, ambas com massa de repouso m_0 tal que m_0c^2=2,4 MeV colidem, aniquilando-se mutuamente, e gerando 3 fótons (partículas de massa nula e energia $hf = hc/\lambda$, onde f é a frequência, λ o comprimento de onda da radiação, e h a constante de Planck). A anti-partícula se desloca na direção y. A velocidade inicial da partícula em um dado referencial S é $v_i = 0{,}6\,c$ na direção x. Um dos fótons é emitido nesta mesma direção (no sentido positivo de x), outro na direção y (também no sentido positivo), ambos com mesmo comprimento de onda λ, e o terceiro fóton é emitido na diagonal (a 45° com do eixo x), na direção do quadrante de x e y negativos (figura).



Utilizando sempre o referencial S:

a) Calcule a energia E_1 da partícula e seu momento linear p_1.

b) Determine as componentes x e y do momento linear $\vec{p}_2$ da anti-partícula e sua energia E_2.

c) Determine a energia total dos fótons emitidos.

d) Determine a energia de cada fóton.

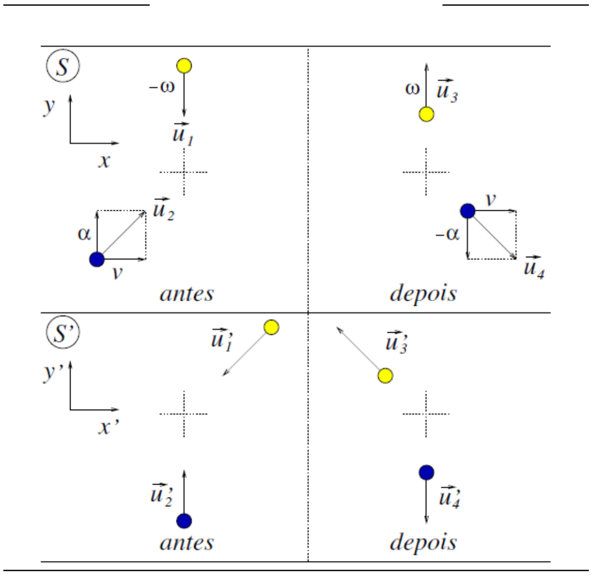
e) Calcule a variação da energia cinética entre os estados inicial e final.

Obs: Dêe suas respostas em unidades de MeV e MeV/c, conforme o caso.

R.: (a) p_1=1,8 MeV/c, E_1=3 MeV;
(b) $\vec{p}_2 = 1{,}8\ \mathrm{MeV}/c\,\hat{y}$, $E_2 = 3$ MeV4;
(c) $E_{\text{fótons}} = 6$ MeV; (d) E_{f1}=E_{f2}=2,5 MeV; (e) 4,8 MeV.

R2.8 Considere duas velocidades relativísticas u_a, u_b, e uma terceira velocidade u_d que se relaciona com as duas anteriores através de
$$u_d = \sqrt{u_a^2 + \left(\frac{u_b}{\gamma_a}\right)^2}, \quad \text{onde} \quad \gamma_a = \gamma(u_a) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_a^2}{c^2}}}.$$
Mostre que
$$\gamma_a\gamma_b = \gamma_d.$$

R2.9 Considere duas partículas, A e B, com a mesma massa de repouso m_0, participando de uma colisão elástica conforme a figura abaixo.



a) Obtenha as componentes das velocidades $\vec{u}'_1$, $\vec{u}'_2$, $\vec{u}'_3$ e $\vec{u}'_4$ no referencial S' em função das variáveis ω, v e α indicadas na figura, e do fator de Lorentz $\gamma_v = \gamma(v)$.

Assuma que, qualquer que seja a definição do momento linear $\vec{p}$, no sistema S a soma das componentes na direção y antes e depois da colisão é nula.

b) Com a definição newtoniana do momento linear, $\vec{p}(\vec{u}) = m_0\vec{u}$, obtenha α em função de ω e v. A soma dos momentos lineares na direção y se conserva em S'? (Note que $v \neq 0$.)

c) Repita o item anterior com a definição relativística do momento linear. Sugestão: escreva $\alpha = \sigma/\gamma_v$, onde σ é uma velocidade a ser determinada, e use a relação obtida no exercício R2.8.

R.: (a) $\vec{u}'_1 = (-v, -\omega/\gamma_v, 0)$, $\vec{u}'_2 = (0, +\gamma_v\omega, 0)$,
$\vec{u}'_3 = (-v, +\omega/\gamma_v, 0)$, $\vec{u}'_4 = (0, -\gamma_v\omega, 0)$
(b) $\alpha = \omega$ (c) $\alpha = \omega/\gamma_v$, sim.