

Lista de Exercícios R1

Relatividade Especial - Cinemática

R1.1 Uma barra que está colocada paralelamente ao eixo x de um sistema de referência S desloca-se ao longo deste eixo com velocidade $\frac{4\sqrt{5}}{9}c \approx 0,993808c$. Seu comprimento de repouso é de 18 m. Qual será o comprimento medido no sistema S ?

R.: 2,0 m.

R1.2 Uma barra de comprimento L' em repouso no referencial S' faz um ângulo θ' com o eixo x' .

a) Mostre que o comprimento L medido por um observador em um referencial S , para quem a barra se move com velocidade v na direção x , é dado por $L=L'\sqrt{1-\beta\cos^2\theta'}$, onde $\beta=v/c$.

b) Mostre que o ângulo θ que esta barra em movimento faz com o eixo x do referencial S é dado por $\tan\theta=\gamma\tan\theta'$, onde $\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$ é o fator de Lorentz.

c) Calcule L e $\tan\theta$ para $L'=1,0$ m, $\cos\theta'=3/4$ e $\beta=4/5$.

R.: (c) $L=0,8$ m; $\tan\theta=\frac{5\sqrt{7}}{9}$.

R1.3 Num referencial inercial S' , um evento ocorre nas coordenadas $x'=60$ m, $t'=8\times 10^{-8}$ s, $y'=0$, $z'=0$. O sistema S' move-se ao longo da direção x do sistema S com velocidade $\frac{3}{5}c$. A origem dos sistemas coincidem no instante $t=t'=0$. Quais são as coordenadas do evento em S ?

R.: $(x,t)=(93\text{ m}, 25\times 10^{-8}\text{ s})$.

R1.4 Quando visto de um sistema inercial S , um evento A ocorre no ponto x_A sobre o eixo x , e $1,00\times 10^{-6}$ s mais tarde um outro evento B ocorre no ponto x_B , tal que $x_A-x_B=600$ m.

a) Existe um outro sistema inercial S' , movendo-se com uma velocidade menor do que c paralela ao eixo x , para o qual os dois eventos são simultâneos? Se assim for, qual é o módulo e o sentido da velocidade de S' com relação a S ?

b) Repita a parte (a) para o caso em que A e B estão separados somente de 100 m quando vistos de S .

R.: (a) Sim, $\vec{v}=-0,5c\hat{x}$; (b) $\vec{v}=-3c\hat{x}$, impossível!

R1.5 O tempo de vida média de múons encerrados numa caixa de chumbo num laboratório é de $2,2\ \mu\text{s}$. O tempo de vida média de múons saindo de um acelerador de partículas é de $\frac{8,8}{\sqrt{7}}\ \mu\text{s}=3,3261\ \mu\text{s}$. Determine a velocidade dos múons que saem do acelerador.

R.: $v=0,75c$.

R1.6 Um estudante vai realizar uma prova que deve durar 1 hora. Seu professor está em viagem e passará (sem parar) pela Terra com velocidade constante $v=0,6c$. O aluno propôs que a prova inicie quando o professor passar pela Terra e quando o professor, em seu próprio relógio, verificar que se passou 1 hora do início da prova ele envie um sinal luminoso à Terra. O aluno terminaria a prova quando recebesse o sinal luminoso.

a) Quanto tempo o aluno teria para realizar a prova, de acordo com seu relógio?

b) E quanto tempo o aluno teve para fazer a prova, de acordo com o relógio do professor?

c) Qual desses intervalos de tempo realmente importa?

R.: (a) 2 horas; (b) 2,5 horas; (c) O horário medido pelo aluno, claro!

R1.7 Um trem de comprimento próprio L_0 move-se com velocidade $v=0,8c$ em relação à estrada de ferro e dirige-se para uma ponte com extensão d , medida no referencial da estrada (S). No momento em que a dianteira do trem (A) passa pelo ponto O , no início da ponte, dois flashes de luz são disparados simultaneamente no referencial do trem (S'), nas extremidades do trem (A e B). Nesse instante, dois observadores, um em A e outro em O , sincronizam seus cronômetros em $t=t'=0$ com a origem dos sistemas de referência S e S' coincidentes.

a) No referencial da estrada, qual o intervalo de tempo Δt entre os flashes de luz emitidos em A e B ?

b) No referencial da estrada, em que instante t_1 o flash emitido em A atinge o ponto B ?

c) No referencial do trem, quanto tempo ele leva para percorrer completamente a ponte?

R.: (a) $|\Delta t|=\frac{4}{3}\frac{L_0}{c}$; (b) $t_1=\frac{1}{3}\frac{L_0}{c}$; (c) $\Delta t'=\frac{5L_0+3d}{4c}$.

R1.8 Imagine um jogo de futebol relativístico em um universo onde $c=50$ m/s. Um atacante move-se em direção ao gol adversário com velocidade $v=30$ m/s (em relação ao campo de futebol). Em seu referencial, S' , este atacante passa pelo zagueiro adversário em t'_2 e observa seu companheiro na posição $x'_1=-L_0$ lançar a bola à sua frente no instante t'_1 . No referencial S , o juiz e o zagueiro estão na grande área e em repouso com relação ao campo. Nesse referencial, as regras do futebol determinam que seja marcado impedimento se o atacante passar pelo zagueiro (instante t_2) antes de seu companheiro lançar a bola (instante t_1). Para efeitos de resolução deste problema, assuma que as posições dos jogadores e do juiz permanecem colineares, com a mesma coordenada $y=y'=0$.

a) Para o atacante em S' , $L_0=50$ m e ele percebe que ultrapassou o zagueiro antes do lançamento de seu companheiro tal que $\Delta t'=t'_2-t'_1=-0,5$ s. O juiz deve marcar impedimento?

b) No item anterior, existe um comprimento L_0 limite que determina a existência ou não do impedimento? Obtê-lo em caso positivo.

c) Na continuação do lance, o juiz permanece junto ao zagueiro (ainda dentro da grande área) em $x=0$, mas tem sua visão do lance encoberta por ele. No referencial S do juiz, o atacante cai 0,08 s após passar pelo zagueiro. Um movimento brusco do zagueiro sugeriu a intenção de derrubar o atacante. Como critério, o juiz marcaria pênalti se, no referencial S' do atacante, a queda ocorrer após a passagem do atacante pelo zagueiro. Neste caso, determine qual atitude o juiz deve tomar.

d) No item anterior, existe uma velocidade limite de um observador externo onde o jogador cai antes de passar pelo zagueiro? Determine-a em caso positivo.

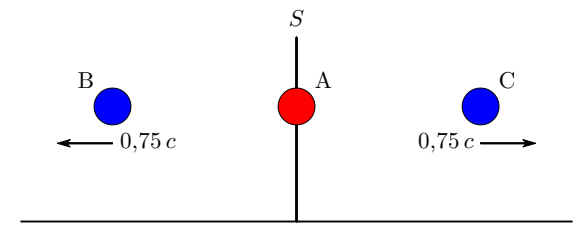
R.: (a) não; (b) sim, $L_0=41,6$ m; (c) marcar o pênalti; (d) não.

R1.9 Uma partícula de raio cósmico aproxima-se da Terra ao longo de seu eixo com uma velocidade de $0,80c$ em direção ao pólo norte e uma outra, com velocidade $0,60c$, em direção ao pólo sul. Qual é a velocidade relativa de aproximação das duas partículas?

R.: $0,9459c$.

R1.10 Considere três galáxias A, B e C, esquematicamente representadas na figura abaixo. Um observador A, em repouso no referencial S , mede as velocidades de C e B, observando que estas se afastam cada uma com velocidade de $0,75c$ relativa a ele mesmo. De acordo as medidas *nesse sistema de referencia*, a distância entre elas aumenta a uma taxa de $1,5c$.

- a) Qual é a velocidade de A medida por B?
- b) Qual é a velocidade de C observada por B?



R.: (b) $|u|=0,96c$.

R1.11 Um observador em S vê uma estrela com uma elevação angular θ em relação à horizontal Ox . Um segundo observador S' caminha na direção Ox com velocidade v relativa a S .

- a) Calcule o ângulo de elevação θ' da estrela, visto por S' , em relação a $O'x'$, sem utilizar os resultados da Teoria da Relatividade Restrita (cálculo clássico, conhecido pelos astrônomos como “aberração da luz estelar”).
- b) Calcule novamente o ângulo θ' , desta vez utilizando a Teoria da Relatividade Restrita.
- c) Compare os resultados dos itens anteriores para $v/c \ll 1$.

R.: (a) $\text{tg}(\theta') = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta) + v/c}$; (b) $\text{tg}(\theta') = \frac{1}{\gamma} \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta) + v/c}$

R1.12 Um satélite artificial, deslocando-se com relação à Terra a uma velocidade de $0,90c$ comunica-se por transmissão numa frequência (medida no referencial do satélite) de 100 MHz. Para que frequência deve a Terra ajustar seus receptores para receber este sinal?

R.: 22,94 MHz.

R1.13 Observações da luz emitida por um certo quasar mostraram um deslocamento para o vermelho (“red shift”) de uma certa linha espectral de 130 nm para 500 nm. Ele está se aproximando ou se afastando de nós? Qual é a velocidade do quasar?

R.: $0,873c$.

R1.14 Num referencial S duas espaçonaves, A e B movem-se com velocidades de módulo $u=0,5c$ na mesma direção, mas em sentidos opostos. Cada espaçonave tem comprimento próprio igual a 100 m. Quando a espaçonave A passa pela origem O , um feixe de luz é emitido partindo de O , formando um ângulo $\theta=60^\circ$ em relação ao eixo Ox .

- a) Determine a velocidade da espaçonave A em relação a B.
- b) Qual a inclinação θ' do feixe de luz medido pelo observador na espaçonave B?
- c) Os resultados obtidos nos itens anteriores são compatíveis com os postulados da relatividade? Explique.

R.: (a) $u'_A=0,8c$; (b) $\theta' = \arctan(3/4)$; (c) Sim, é compatível: a velocidade escalar do raio de luz permanece sendo c .

R1.15 Mostre que o quadrado do intervalo espaço-tempo $(\Delta s)^2$ associado a dois eventos é um invariante sob transformações de Lorentz. Ou seja, mostre que

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

R1.16 A simetria espaço-tempo da relatividade é parcialmente oculta pelo fato das variáveis espaço e tempo serem medidas em unidades diferentes. Contudo, podemos introduzir uma nova variável tempo que tenha as mesmas unidades de medida que o espaço, ou seja, podemos medir o tempo em metros. Esta nova variável é geralmente denominada x_0 e definida como $x_0=ct$ (logo, por exemplo, $1 \mu s$ equivale a ≈ 300 m). Mostre que, em termos desta nova variável, a primeira e a quarta equação das transformações de Lorentz podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta x_0) \\ x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x) \end{aligned}$$

as quais são certamente mais simétricas na aparência do que a representação padrão.

R1.17 As equações de Maxwell resultam na seguinte equação de ondas eletromagnéticas:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad \text{onde } \phi = E_y, E_z, B_y \text{ ou } B_z.$$

a) Mostre que esta equação não é invariante por transformações de Galileu:

$$x' = x - Vt, \quad t' = t.$$

b) Mostre que a invariância desta equação de onda pode ser obtida para

$$x' = \alpha(x - Vt), \quad t' = \alpha(t - Vx/c^2),$$

onde α é um fator que depende apenas de $\beta=V/c$. Obtenha a expressão para α .