Teorema do Limite Central

Bacharelado em Economia - FEA - Noturno

$1^{\underline{o}}$ Semestre 2017

Profs. Gilberto A. Paula e Vanderlei C. Bueno

Sumário

Objetivos da Aula

Soma de Variáveis Aleatórias

O objetivo principal desta aula é estudar empiricamente a distribuição da soma de variáveis aleatórias quantitativas e enunciar o principal teorema da Estatística Teorema do Limite Central (Laplace, 1810).

Notação

Soma de Variáveis Aleatórias

Vamos supor $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição de média μ e variância σ^2 finitas. Vamos estudar a distribuição da soma

Notação

Soma de Variáveis Aleatórias

Vamos supor $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição de média μ e variância σ^2 finitas. Vamos estudar a distribuição da soma

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

Notação

Soma de Variáveis Aleatórias

Vamos supor $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição de média μ e variância σ^2 finitas. Vamos estudar a distribuição da soma

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

à medida que n cresce. Ou seja, vamos construir histogramas para a distribuição de X para diferentes valores de n.

Sumário

Distribuição Binomial

Distribuição Binomial

A distribuição binomial pode ser obtida através de n ensaios independentes de Bernoulli. Isto é, se $X_i \sim \text{Be}(p)$ $(i = 1, \ldots, n)$, então

Distribuição Binomial

Distribuição Binomial

A distribuição binomial pode ser obtida através de n ensaios independentes de Bernoulli. Isto é, se $X_i \sim \text{Be}(p)$ $(i = 1, \ldots, n)$, então

$$X = X_1 + \cdots + X_n \sim \text{B}(n, p).$$

Distribuição Binomial

Distribuição Binomial

A distribuição binomial pode ser obtida através de n ensaios independentes de Bernoulli. Isto é, se $X_i \sim \mathrm{Be}(p)$ $(i = 1, \ldots, n)$, então

$$X = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{B}(n, p).$$

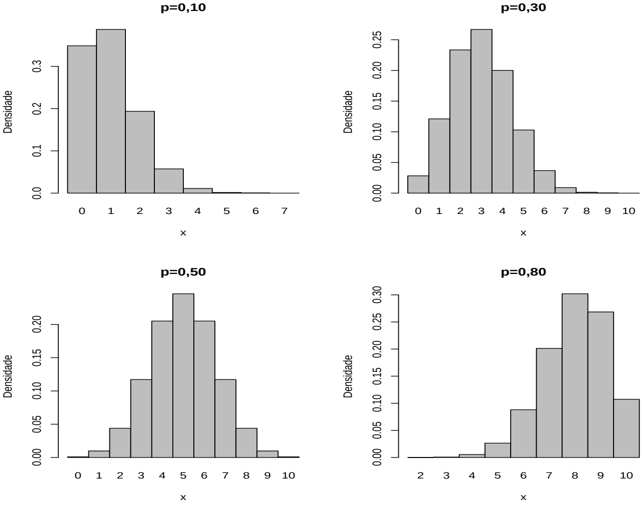
Temos ainda que $\mathrm{E}(X) = np$ e $\mathrm{Var}(X) = np(1 - p)$.

Histogramas Distribuição Binomial

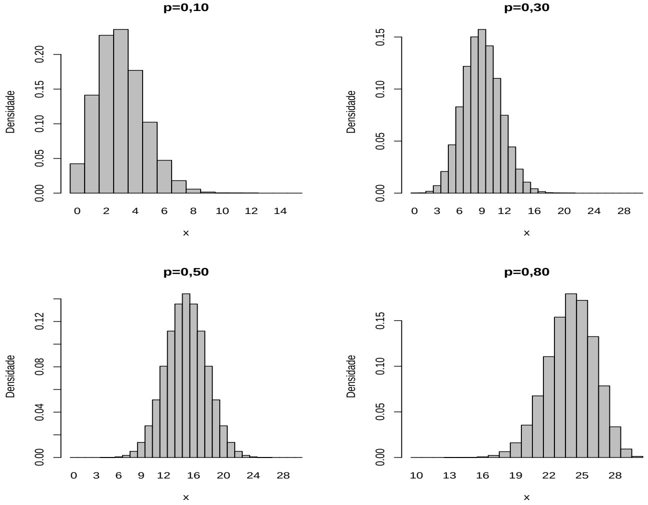
Descrição

A seguir serão construídos histogramas para a distribuição de $X \sim \mathrm{B}(n, p)$ variando-se o número de ensaios n e também a probabilidade de sucesso p.

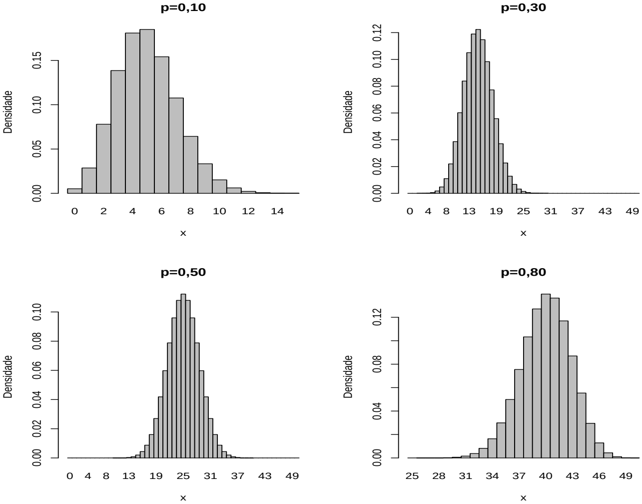
Histogramas B(n, p) para $n = 10$



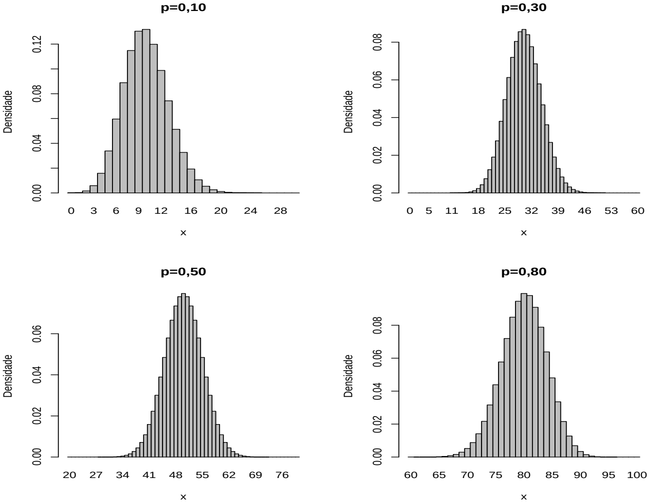
Histogramas B(n, p) para $n = 30$



Histogramas B(n, p) para $n = 50$



Histogramas B(n, p) para $n = 100$



Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de $X \sim \text{B}(n, p)$ se aproxima da distribuição de $Y \sim \text{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ em que $\mu_X = np$ e $\sigma_X^2 = np(1-p)$.

Sumário

Distribuição de Poisson

Definição

Se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ. Isto é, se $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$, então a função de probabilidade de X fica dada por

Distribuição de Poisson

Definição

Se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ. Isto é, se $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$, então a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},$$

Distribuição de Poisson

Definição

Se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ. Isto é, se $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$, então a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

em que $x = 0, 1, \ldots$. Temos ainda que $\mathrm{E}(X) = \lambda$ e $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Histogramas Distribuição de Poisson

Descrição

A seguir serão construídos histogramas para a distribuição de

Histogramas Distribuição de Poisson

Descrição

A seguir serão construídos histogramas para a distribuição de

$$X = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{P}(n\lambda),$$

Histogramas Distribuição de Poisson

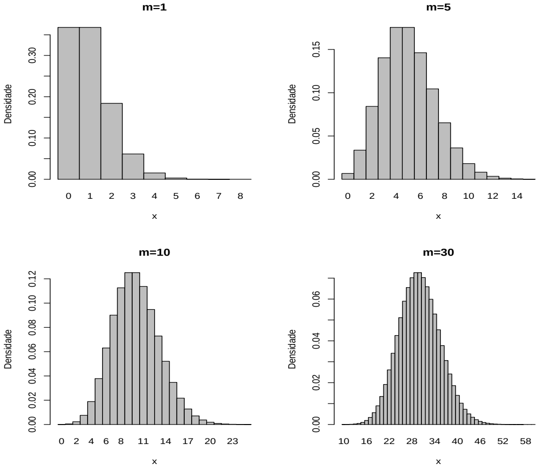
Descrição

A seguir serão construídos histogramas para a distribuição de

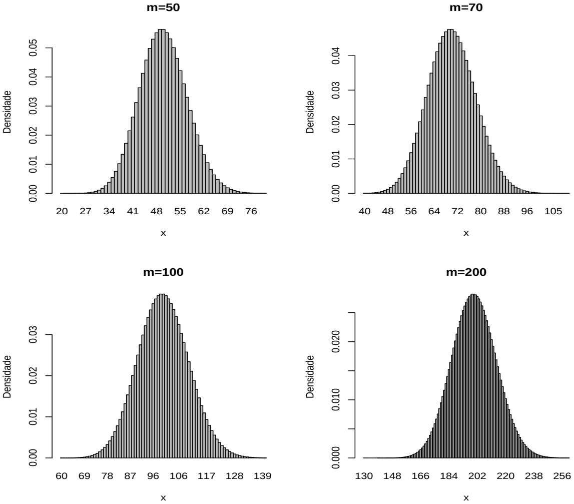
$$X = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{P}(n\lambda),$$

variando-se $m = n\lambda$, em que $X_i \sim \mathrm{P}(\lambda)$ independentes ($i = 1, \ldots, n$).

Histogramas P(m)



Histogramas P(m)



Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que m cresce a distribuição de $X \sim \mathrm{P}(m)$ se aproxima da distribuição de $Y \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ em que $\mu_X = m$ e $\sigma_X^2 = m$.

Sumário

Distribuição Uniforme

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [a,b] ($X \sim \mathrm{U}[a, b]$), então

Distribuição Uniforme

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [a,b] ($X \sim \mathrm{U}[a, b]$), então

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)}, \quad a \leq x \leq b,$$

Distribuição Uniforme

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [a,b] ($X \sim$ U$[a, b]$), então

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)}, \quad a \leq x \leq b,$$

e $f(x) = 0$ em caso contrário.

Distribuição Uniforme

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [a,b] ($X \sim \mathrm{U}[a,b]$), então

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)}, \quad a \leq x \leq b,$$

e $f(x) = 0$ em caso contrário.

Esperança e Variância

Distribuição Uniforme

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [a,b] ($X \sim \mathrm{U}[a,b]$), então

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)}, \quad a \leq x \leq b,$$

e $f(x) = 0$ em caso contrário.

Esperança e Variância

Temos que

Distribuição Uniforme

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [a,b] ($X \sim \mathrm{U}[a, b]$), então

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)}, \quad a \leq x \leq b,$$

e $f(x) = 0$ em caso contrário.

Esperança e Variância

Temos que

- $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$

Distribuição Uniforme

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [a,b] ($X \sim \mathrm{U}[a, b]$), então

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)}, \quad a \leq x \leq b,$$

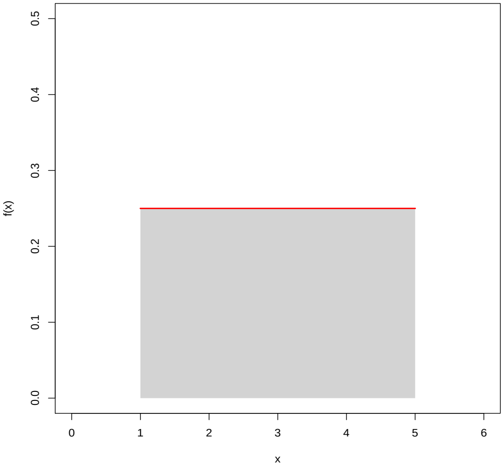
e $f(x) = 0$ em caso contrário.

Esperança e Variância

Temos que

- $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Distribuição Uniforme U$[1, 5]$



Histogramas Distribuição Uniforme

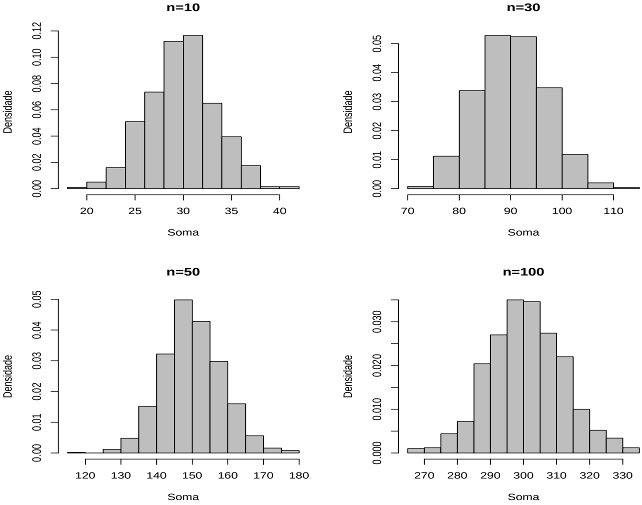
Descrição

Vamos supor que $X_i \sim \mathrm{U}[1,5]$ independentes $(i = 1, \ldots, n)$. A seguir serão construídos histogramas para a distribuição de

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

variando-se o tamanho amostral n.

Histogramas Soma de Uniformes



Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que *n* cresce a distribuição de

Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

se aproxima da distribuição de $Y \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ em que

Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

se aproxima da distribuição de $Y \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ em que

- $\mu_X = \frac{n(1+5)}{2} = 3n$

Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

se aproxima da distribuição de $Y \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ em que

- $\mu_X = \frac{n(1+5)}{2} = 3n$
- $\sigma_X^2 = \frac{n(5-1)^2}{12} = \frac{4n}{3}$

Sumário

Distribuição Triangular

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição triangular no intervalo [a,c,b], notação $X \sim T[a, c, b]$.

Distribuição Triangular

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição triangular no intervalo [a,c,b], notação $X \sim T[a,c,b]$. Então

Distribuição Triangular

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição triangular no intervalo [a,c,b], notação $X \sim T[a, c, b]$. Então

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c, \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c < x \leq b, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Distribuição Triangular

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição triangular no intervalo [a,c,b], notação $X \sim T[a,c,b]$. Então

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c, \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c < x \leq b, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Esperança e Variância

Distribuição Triangular

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição triangular no intervalo [a,c,b], notação $X \sim T[a, c, b]$. Então

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c, \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c < x \leq b, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Esperança e Variância

Temos que

Distribuição Triangular

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição triangular no intervalo [a,c,b], notação $X \sim T[a, c, b]$. Então

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c, \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c < x \leq b, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Esperança e Variância

Temos que

- $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b+c}{3}$

Distribuição Triangular

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição triangular no intervalo [a,c,b], notação $X \sim T[a,c,b]$. Então

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c, \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c < x \leq b, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Esperança e Variância

Temos que

- $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b+c}{3}$
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$

Histogramas Distribuição Triangular

Descrição

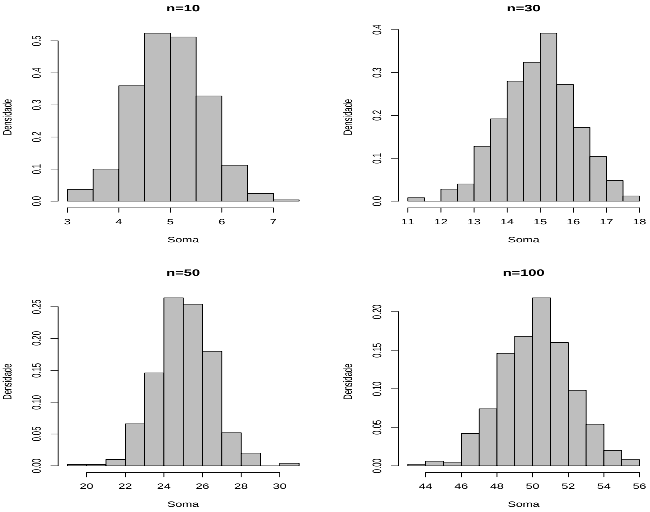
Vamos supor que $X_i \sim T[a, b, c]$ independentes $(i = 1, \ldots, n)$. A seguir serão construídos histogramas para a distribuição de

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

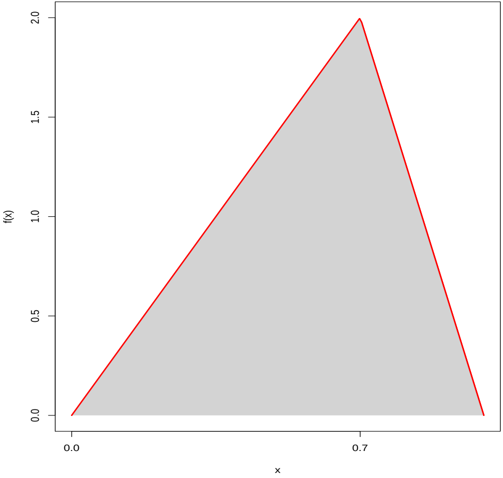
variando-se o tamanho amostral n.

Distribuição Triangular $T[0, 1, 0.5]$

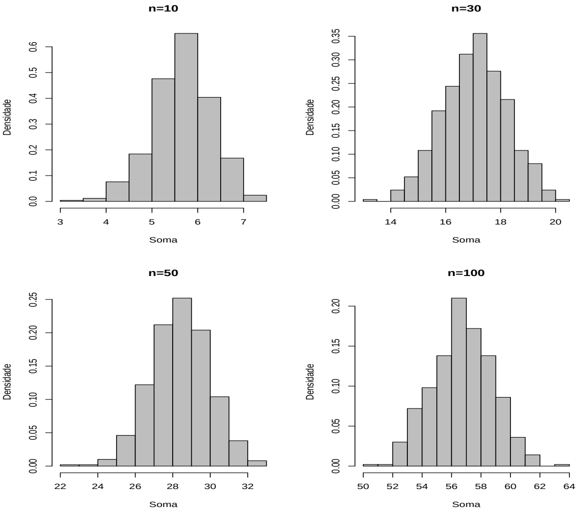
Histogramas Soma de $T[0, 1, 0.5]$



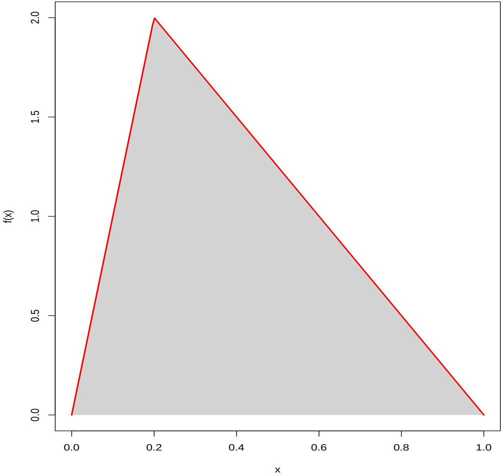
Distribuição Triangular $T[0, 1, 0.7]$



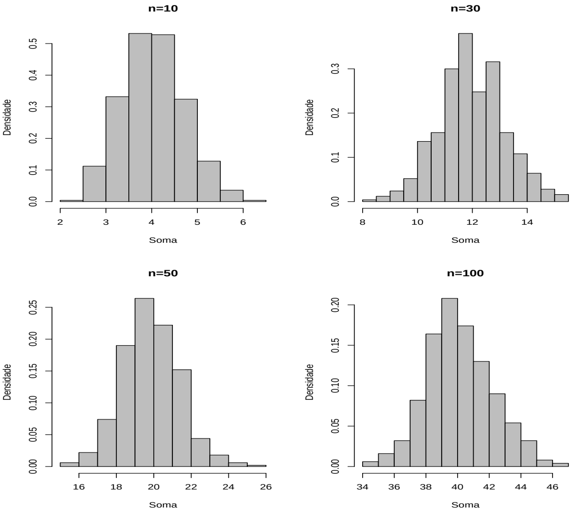
Histogramas Soma de $T[0, 1, 0.7]$



Distribuição Triangular $T[0, 1, 0.2]$



Histogramas Soma de $T[0, 1, 0.2]$



Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de

Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

se aproxima da distribuição de $Y \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$.

Sumário

Distribuição Exponencial

Definição

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, a função densidade de probabilidade de X é definida por

Distribuição Exponencial

Definição

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

Distribuição Exponencial

Definição

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

em que $x > 0$. Notação $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Distribuição Exponencial

Definição

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

em que $x > 0$. Notação $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Esperança e Variância

Distribuição Exponencial

Definição

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

em que $x > 0$. Notação $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Esperança e Variância

Temos que

Distribuição Exponencial

Definição

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

em que $x > 0$. Notação $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Esperança e Variância

Temos que

- $\text{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

Distribuição Exponencial

Definição

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

em que $x > 0$. Notação $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Esperança e Variância

Temos que

- $\text{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Histogramas Distribuição Exponencial

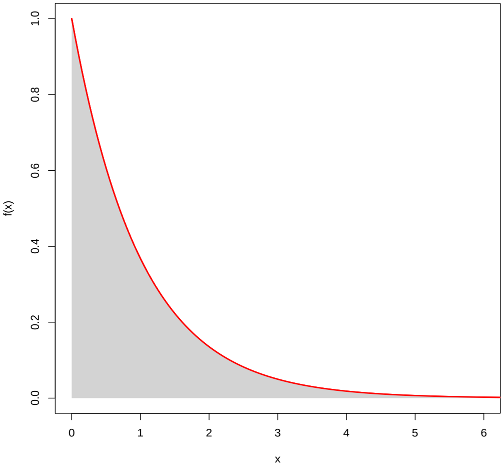
Definição

Vamos supor que $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ independentes ($i = 1, \ldots, n$). A seguir serão construídos histogramas para a distribuição de

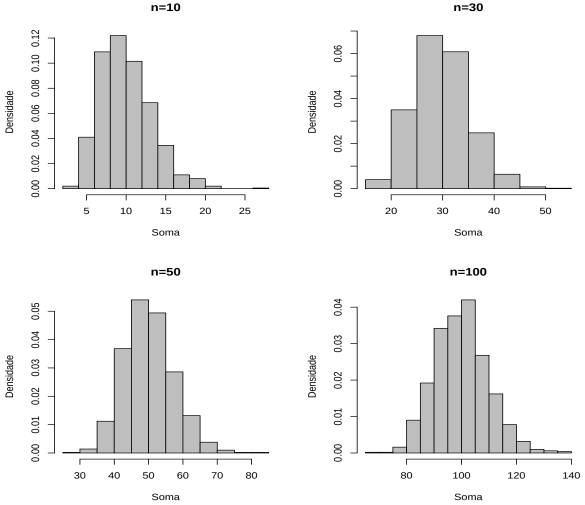
$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

variando-se λ e o tamanho amostral n.

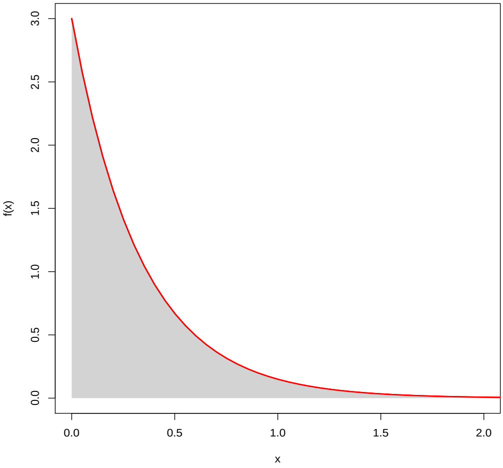
Distribuição Exponencail $\lambda = 1$



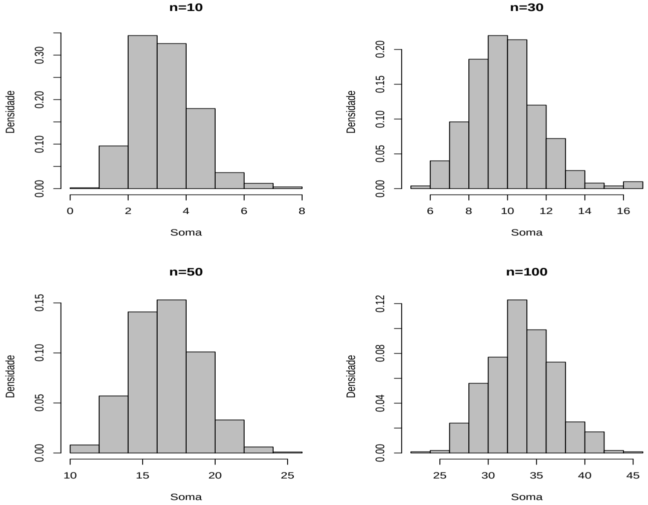
Histogramas Soma de Exponenciais com $\lambda = 1$



Distribuição Exponencial $\lambda = 3$



Histogramas Soma de Exponenciais com $\lambda = 3$



Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de

Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

se aproxima da distribuição de $Y \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ em que

Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

se aproxima da distribuição de $Y \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ em que

- $\mu_X = n\frac{1}{\lambda} = \frac{n}{\lambda}$

Conclusões

Conclusões

Nota-se pelos gráficos que à medida que n cresce a distribuição de

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

se aproxima da distribuição de $Y \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ em que

- $\mu_X = n\frac{1}{\lambda} = \frac{n}{\lambda}$
- $\sigma_X^2 = n\frac{1}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}$

Sumário

Teorema do Limite Central

Enunciado para a Soma Amostral

Para variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ independentes e com mesma distribuição de média μ e variância σ^2 finitas, a distribuição da soma

Teorema do Limite Central

Enunciado para a Soma Amostral

Para variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ independentes e com mesma distribuição de média μ e variância σ^2 finitas, a distribuição da soma

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

Teorema do Limite Central

Enunciado para a Soma Amostral

Para variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ independentes e com mesma distribuição de média μ e variância σ^2 finitas, a distribuição da soma

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

se aproxima à medida que n cresce da distribuição de $Y \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, em que $\mu_x = n\mu$ e $\sigma_X^2 = n\sigma^2$.

Teorema do Limite Central

Aproximação para *n* Grande

$$P(a \leq X \leq b) \quad \cong \quad P(a \leq Y \leq b)$$

Teorema do Limite Central

Aproximação para n Grande

$$
\begin{aligned}
P(a \leq X \leq b) &\cong P(a \leq Y \leq b) \\
&= P\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}
$$

Teorema do Limite Central

Aproximação para n Grande

$$\begin{aligned} P(a \le X \le b) &\cong P(a \le Y \le b) \\ &= P\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le Z \le \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

em que $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

Teorema do Limite Central

Aproximação para n Grande

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &\cong P(a \leq Y \leq b) \\ &= P\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

em que $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

Observação: correção de continuidade pode ser aplicada apenas para variáveis aleatórias discretas, tais como binomial e Poisson.

Teorema do Limite Central

Média Amostral

Para a média amostral

Teorema do Limite Central

Média Amostral

Para a média amostral $\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ temos que

Teorema do Limite Central

Média Amostral

Para a média amostral $\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ temos que

$$E(\bar{X}) = \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n}$$

Teorema do Limite Central

Média Amostral

Para a média amostral $\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ temos que

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n} \\ &= \frac{n\mu}{n} = \mu \end{aligned}$$

Teorema do Limite Central

Média Amostral

Para a média amostral $\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ temos que

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n} \\ &= \frac{n\mu}{n} = \mu \ \text{ e} \\ \mathrm{Var}(\bar{X}) &= \frac{\mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)}{n^2} \end{aligned}$$

Teorema do Limite Central

Média Amostral

Para a média amostral $\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\bar{X}) &= \frac{\mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n)}{n} \\ &= \frac{n\mu}{n} = \mu \text{ e} \\ \mathrm{Var}(\bar{X}) &= \frac{\mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)}{n^2} \\ &= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Teorema do Limite Central

Enunciado para a Média Amostral

Para variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ independentes e com mesma distribuição de média μ e variância σ^2 finitas, a distribuição da média amostral

Teorema do Limite Central

Enunciado para a Média Amostral

Para variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ independentes e com mesma distribuição de média μ e variância σ^2 finitas, a distribuição da média amostral

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Teorema do Limite Central

Enunciado para a Média Amostral

Para variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ independentes e com mesma distribuição de média μ e variância σ^2 finitas, a distribuição da média amostral

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

se aproxima à medida que n cresce da distribuição de $Y \sim \mathrm{N}(\mu_{\bar{X}}, \sigma^2_{\bar{X}})$, em que $\mu_{\bar{X}} = \mu$ e $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Teorema do Limite Central

Aproximação para n Grande

$$P(a \leq \bar{X} \leq b) \;\; \cong \;\; P(a \leq Y \leq b)$$

Teorema do Limite Central

Aproximação para n Grande

$$
\begin{aligned}
P(a \leq \bar{X} \leq b) &\cong P(a \leq Y \leq b) \\
&= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}
$$

Teorema do Limite Central

Aproximação para n Grande

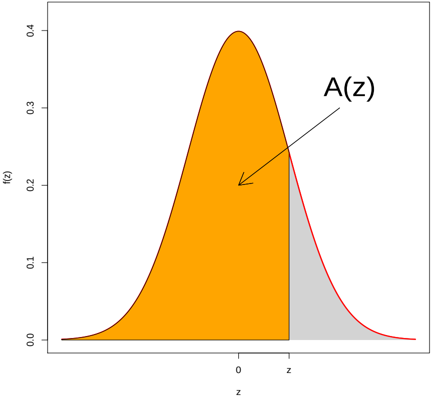
$$
\begin{aligned}
P(a \leq \bar{X} \leq b) &\cong P(a \leq Y \leq b) \\
&= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}
$$

em que $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Sumário

Cálculo de Probabilidades

Descrição de $A(z) = P(Z \leq z)$, $z \geq 0$



Distribuição Normal Padrão: Valores de $A(z) = P(Z \leq z)$

	Segunda Decimal de z									
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817

Distribuição Normal Padrão: Valores de $A(z) = P(Z \leq z)$

	Segunda Decimal de z									
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Sumário

Exemplo 1

Exemplo 1

Uma loja recebe em média 16 clientes por dia com desvio padrão de 4 clientes. Calcule aproximadamente a probabilidade

Exemplo 1

Exemplo 1

Uma loja recebe em média 16 clientes por dia com desvio padrão de 4 clientes. Calcule aproximadamente a probabilidade

- de num período de 30 dias a loja receber mais do que 500 clientes

Exemplo 1

Exemplo 1

Uma loja recebe em média 16 clientes por dia com desvio padrão de 4 clientes. Calcule aproximadamente a probabilidade

- de num período de 30 dias a loja receber mais do que 500 clientes
- de nesse mesmo período de 30 dias a média de clientes ultrapassar 18 clientes

Exemplo 1

Dados do Problema

Seja U:número de clientes que a loja recebe num dia. Temos que

Exemplo 1

Dados do Problema

Seja U:número de clientes que a loja recebe num dia. Temos que

- $\mathrm{E}(U) = \mu = 16$

Exemplo 1

Dados do Problema

Seja U:número de clientes que a loja recebe num dia. Temos que

- $\mathrm{E}(U) = \mu = 16$
- $\mathrm{Var}(U) = \sigma^2 = 4^2 = 16$

Exemplo 1

Dados do Problema

Seja U:número de clientes que a loja recebe num dia. Temos que

- $\mathrm{E}(U) = \mu = 16$
- $\mathrm{Var}(U) = \sigma^2 = 4^2 = 16$

Soma Amostral

Seja X:número de clientes que a loja recebe em 30 dias.

Exemplo 1

Dados do Problema

Seja U:número de clientes que a loja recebe num dia. Temos que

- $\mathrm{E}(U) = \mu = 16$
- $\mathrm{Var}(U) = \sigma^2 = 4^2 = 16$

Soma Amostral

Seja X:número de clientes que a loja recebe em 30 dias. Temos que

Exemplo 1

Dados do Problema

Seja U:número de clientes que a loja recebe num dia. Temos que

- $\mathrm{E}(U) = \mu = 16$
- $\mathrm{Var}(U) = \sigma^2 = 4^2 = 16$

Soma Amostral

Seja X:número de clientes que a loja recebe em 30 dias. Temos que

- $\mu_X = n \times \mu = 30 \times 16 = 480$

Exemplo 1

Dados do Problema

Seja U:número de clientes que a loja recebe num dia. Temos que

- $\mathrm{E}(U) = \mu = 16$
- $\mathrm{Var}(U) = \sigma^2 = 4^2 = 16$

Soma Amostral

Seja X:número de clientes que a loja recebe em 30 dias. Temos que

- $\mu_X = n \times \mu = 30 \times 16 = 480$
- $\sigma_X^2 = n \times \sigma^2 = 30 \times 16 = 480$

Exemplo 1

Dados do Problema

Seja U:número de clientes que a loja recebe num dia. Temos que

- $\mathrm{E}(U) = \mu = 16$
- $\mathrm{Var}(U) = \sigma^2 = 4^2 = 16$

Soma Amostral

Seja X:número de clientes que a loja recebe em 30 dias. Temos que

- $\mu_X = n \times \mu = 30 \times 16 = 480$
- $\sigma_X^2 = n \times \sigma^2 = 30 \times 16 = 480$
- $\sigma_X = \sqrt{480} \cong 21,91$

Exemplo 1

Média Amostral

Seja $\bar{X}$:número médio de clientes que a loja recebe em 30 dias.

Exemplo 1

Média Amostral

Seja $\bar{X}$:número médio de clientes que a loja recebe em 30 dias.
Temos que

Exemplo 1

Média Amostral

Seja $\bar{X}$:número médio de clientes que a loja recebe em 30 dias.
Temos que

- $\mu_{\bar{X}} = \mu = 16$

Exemplo 1

Média Amostral

Seja $\bar{X}$:número médio de clientes que a loja recebe em 30 dias.
Temos que

- $\mu_{\bar{X}} = \mu = 16$
- $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{16}{30} \cong 0,533$

Exemplo 1

Média Amostral

Seja $\bar{X}$:número médio de clientes que a loja recebe em 30 dias.
Temos que

- $\mu_{\bar{X}} = \mu = 16$
- $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{16}{30} \cong 0,533$
- $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{0,533} \cong 0,73$

Exemplo 1

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da loja receber mais do que 500 clientes em 30 dias fica dada por

Exemplo 1

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da loja receber mais do que 500 clientes em 30 dias fica dada por

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 501) &\cong P\left(Z \geq \frac{501 - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\
&= P\left(Z \geq \frac{501 - 480}{21,91}\right) \\
&= P(Z \geq 0,96)
\end{aligned}
$$

Exemplo 1

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da loja receber mais do que 500 clientes em 30 dias fica dada por

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 501) &\cong P\left(Z \geq \frac{501-\mu_X}{\sigma_X}\right) \\
&= P\left(Z \geq \frac{501-480}{21,91}\right) \\
&= P(Z \geq 0,96) \\
&= 1 - P(Z \leq 0,96) \\
&= 1 - A(0,96) \\
&= 1 - 0,8315
\end{aligned}
$$

Exemplo 1

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da loja receber mais do que 500 clientes em 30 dias fica dada por

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 501) &\cong P\left(Z \geq \frac{501 - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\
&= P\left(Z \geq \frac{501 - 480}{21,91}\right) \\
&= P(Z \geq 0,96) \\
&= 1 - P(Z \leq 0,96) \\
&= 1 - A(0,96) \\
&= 1 - 0,8315 \\
&= 0,1685 (16,85\%).
\end{aligned}
$$

Exemplo 1

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da média de clientes ultrapassar 18 clientes em 30 dias fica dada por

Exemplo 1

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da média de clientes ultrapassar 18 clientes em 30 dias fica dada por

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 18) &\cong P\left(Z > \frac{18 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{18 - 16}{0,73}\right) \\ &= P(Z > 2,74) \end{aligned}$$

Exemplo 1

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da média de clientes ultrapassar 18 clientes em 30 dias fica dada por

$$
\begin{aligned}
P(\bar{X} > 18) &\cong P\left(Z > \frac{18 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right) \\
&= P\left(Z > \frac{18 - 16}{0,73}\right) \\
&= P(Z > 2,74) \\
&= 1 - P(Z \leq 2,74) \\
&= 1 - A(2,74) \\
&= 1 - 0.9969
\end{aligned}
$$

Exemplo 1

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da média de clientes ultrapassar 18 clientes em 30 dias fica dada por

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 18) &\cong P\left(Z > \frac{18 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{18 - 16}{0,73}\right) \\ &= P(Z > 2,74) \\ &= 1 - P(Z \leq 2,74) \\ &= 1 - A(2,74) \\ &= 1 - 0.9969 \\ &= 0,0031(0,31\%). \end{aligned}$$

Exemplo 2

Exemplo 2

Sabe-se que numa corrida de revesamento de 42 km com 8 atletas (cada um correndo 5,25 km) o tempo que cada atleta demora para completar o percurso tem distribuição aproximadamente normal de

Exemplo 2

Exemplo 2

Sabe-se que numa corrida de revesamento de 42 km com 8 atletas (cada um correndo 5,25 km) o tempo que cada atleta demora para completar o percurso tem distribuição aproximadamente normal de média 30 minutos e desvio padrão de 8 minutos.

Exemplo 2

Exemplo 2

Sabe-se que numa corrida de revesamento de 42 km com 8 atletas (cada um correndo 5,25 km) o tempo que cada atleta demora para completar o percurso tem distribuição aproximadamente normal de média 30 minutos e desvio padrão de 8 minutos.

Se 8 atletas são escolhidos ao acaso para uma prova:

Exemplo 2

Exemplo 2

Sabe-se que numa corrida de revesamento de 42 km com 8 atletas (cada um correndo 5,25 km) o tempo que cada atleta demora para completar o percurso tem distribuição aproximadamente normal de média 30 minutos e desvio padrão de 8 minutos.

Se 8 atletas são escolhidos ao acaso para uma prova:

- qual a probabilidade da equipe completar o percurso em menos de 3 horas?

Exemplo 2

Exemplo 2

Sabe-se que numa corrida de revesamento de 42 km com 8 atletas (cada um correndo 5,25 km) o tempo que cada atleta demora para completar o percurso tem distribuição aproximadamente normal de média 30 minutos e desvio padrão de 8 minutos.

Se 8 atletas são escolhidos ao acaso para uma prova:

- qual a probabilidade da equipe completar o percurso em menos de 3 horas?
- E em mais de 4 horas?

Exemplo 2

Exemplo 2

Sabe-se que numa corrida de revesamento de 42 km com 8 atletas (cada um correndo 5,25 km) o tempo que cada atleta demora para completar o percurso tem distribuição aproximadamente normal de média 30 minutos e desvio padrão de 8 minutos.

Se 8 atletas são escolhidos ao acaso para uma prova:

- qual a probabilidade da equipe completar o percurso em menos de 3 horas?
- E em mais de 4 horas?
- Qual é tempo que apenas 5% das equipes farão abaixo dele?

Exemplo 2

Dados do Problema

Seja T:tempo que um atleta demora para completar o percurso.

Exemplo 2

Dados do Problema

Seja T:tempo que um atleta demora para completar o percurso.
Temos que

Exemplo 2

Dados do Problema

Seja T:tempo que um atleta demora para completar o percurso.
Temos que

- $\mathrm{E}(T) = \mu = 30$

Exemplo 2

Dados do Problema

Seja T:tempo que um atleta demora para completar o percurso.
Temos que

- $\mathrm{E}(T) = \mu = 30$
- $\mathrm{Var}(T) = \sigma^2 = 8^2 = 64$

Exemplo 2

Dados do Problema

Seja T:tempo que um atleta demora para completar o percurso.
Temos que

- $\mathrm{E}(T) = \mu = 30$
- $\mathrm{Var}(T) = \sigma^2 = 8^2 = 64$

Soma Amostral

Seja X:tempo que a equipe (de 8 atletas) demora para completar o percurso.

Exemplo 2

Dados do Problema

Seja T:tempo que um atleta demora para completar o percurso. Temos que

- $\mathrm{E}(T) = \mu = 30$
- $\mathrm{Var}(T) = \sigma^2 = 8^2 = 64$

Soma Amostral

Seja X:tempo que a equipe (de 8 atletas) demora para completar o percurso. Temos que

Exemplo 2

Dados do Problema

Seja T:tempo que um atleta demora para completar o percurso. Temos que

- $\mathrm{E}(T) = \mu = 30$
- $\mathrm{Var}(T) = \sigma^2 = 8^2 = 64$

Soma Amostral

Seja X:tempo que a equipe (de 8 atletas) demora para completar o percurso. Temos que

- $\mu_X = n \times \mu = 8 \times 30 = 240$

Exemplo 2

Dados do Problema

Seja T:tempo que um atleta demora para completar o percurso.
Temos que

- $\mathrm{E}(T) = \mu = 30$
- $\mathrm{Var}(T) = \sigma^2 = 8^2 = 64$

Soma Amostral

Seja X:tempo que a equipe (de 8 atletas) demora para completar o percurso. Temos que

- $\mu_X = n \times \mu = 8 \times 30 = 240$
- $\sigma_X^2 = n \times \sigma^2 = 8 \times 64 = 512$

Exemplo 2

Dados do Problema

Seja T:tempo que um atleta demora para completar o percurso.
Temos que

- $\mathrm{E}(T) = \mu = 30$
- $\mathrm{Var}(T) = \sigma^2 = 8^2 = 64$

Soma Amostral

Seja X:tempo que a equipe (de 8 atletas) demora para completar o percurso. Temos que

- $\mu_X = n \times \mu = 8 \times 30 = 240$
- $\sigma_X^2 = n \times \sigma^2 = 8 \times 64 = 512$
- $\sigma_X = \sqrt{512} \cong 22,63$

Exemplo 2

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da equipe completar o percurso em menos de 3 horas (180 minutos) fica dada por

Exemplo 2

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da equipe completar o percurso em menos de 3 horas (180 minutos) fica dada por

$$\begin{aligned} P(X < 180) &= P\left(Z < \frac{180 - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{180 - 240}{22,63}\right) \\ &= P(Z < -2,65) \end{aligned}$$

Exemplo 2

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da equipe completar o percurso em menos de 3 horas (180 minutos) fica dada por

$$
\begin{aligned}
P(X < 180) &= P\left(Z < \frac{180 - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\
&= P\left(Z < \frac{180 - 240}{22,63}\right) \\
&= P(Z < -2,65) \\
&= P(Z > 2,65) \\
&= 1 - P(Z \leq 2,65) \\
&= 1 - 0,996
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da equipe completar o percurso em menos de 3 horas (180 minutos) fica dada por

$$
\begin{aligned}
P(X < 180) &= P\left(Z < \frac{180 - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\
&= P\left(Z < \frac{180 - 240}{22,63}\right) \\
&= P(Z < -2,65) \\
&= P(Z > 2,65) \\
&= 1 - P(Z \leq 2,65) \\
&= 1 - 0,996 \\
&= 0,004 (0,4\%).
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da equipe completar o percurso em mais de 4 horas (240 minutos) fica dada por

Exemplo 2

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da equipe completar o percurso em mais de 4 horas (240 minutos) fica dada por

$$\begin{aligned} P(X > 240) &= P\left(Z > \frac{240 - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{240 - 240}{22,63}\right) \\ &= P(Z > 0) \end{aligned}$$

Exemplo 2

Cálculo da Probabilidade

A probabilidade da equipe completar o percurso em mais de 4 horas (240 minutos) fica dada por

$$\begin{aligned} P(X > 240) &= P\left(Z > \frac{240 - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{240 - 240}{22,63}\right) \\ &= P(Z > 0) \\ &= 0,5(50\%). \end{aligned}$$

Exemplo 2

Cálculo do Tempo

Seja t_0 o tempo superado por 95% das equipes (apenas 5% das equipes fazem abaixo desse tempo).

Exemplo 2

Cálculo do Tempo

Seja t_0 o tempo superado por 95% das equipes (apenas 5% das equipes fazem abaixo desse tempo). Temos que

Exemplo 2

Cálculo do Tempo

Seja t_0 o tempo superado por 95% das equipes (apenas 5% das equipes fazem abaixo desse tempo). Temos que

$$\begin{aligned} P(X < t_0) &= P\left(Z < \frac{t_0 - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{t_0 - 240}{22,63}\right) \\ &= P(Z < a) = 0,05, \end{aligned}$$

Exemplo 2

Cálculo do Tempo

Seja t_0 o tempo superado por 95% das equipes (apenas 5% das equipes fazem abaixo desse tempo). Temos que

$$\begin{aligned} P(X < t_0) &= P\left(Z < \frac{t_0 - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{t_0 - 240}{22,63}\right) \\ &= P(Z < a) = 0,05, \end{aligned}$$

em que $a = (t_0 - 240)/22,63$. Pela tabela normal $a = -1,64$.

Exemplo 2

Cálculo do Tempo

Seja t_0 o tempo superado por 95% das equipes (apenas 5% das equipes fazem abaixo desse tempo). Temos que

$$\begin{aligned} P(X < t_0) &= P\left(Z < \frac{t_0 - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{t_0 - 240}{22,63}\right) \\ &= P(Z < a) = 0,05, \end{aligned}$$

em que $a = (t_0 - 240)/22,63$. Pela tabela normal $a = -1,64$. Assim, obtemos $t_0 = 240 - 1,64 \times 22,63 \cong 203$ minutos.