1º semestre de 2017

Gabarito Lista de exercícios 8 – Aproximação da Binomial pela Normal

Exercício 1

Em uma determinada faixa etária, 40% das pessoas apreciam o refrigerante da marca Cola. Calcule a probabilidade (exata) de que, em uma amostra de 200 pessoas dessa faixa etária, haja:

(a) entre 65 e 90 (inclusive os extremos) apreciadores do refrigerante da marca Cola;

(b) no máximo 70 apreciadores do refrigerante da marca Cola;

(c) mais do que 68 apreciadores do refrigerante da marca Cola.

Repita os itens (a) (b) e (c) usando a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal (com e sem correção de continuidade) e compare os resultados.

Solução

(a) Seja X o número de pessoas que apreciam o refrigerante da marca Cola, $X \sim Bin(200; 0,4)$. Logo,

$$P(X = x) = \binom{200}{x}(0,4)^x(0,6)^{200-x}, \qquad X \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 200\}.$$

Portanto,

$$P(65 \leq X \leq 90) \quad = \quad P(X \leq 90) - P(X \leq 64)$$

Do *software* estatístico R (pacote Rcommander(Rcmdr): Distribuições/Distribuição Binomial/ Probabilidades binomiais acumuladas) temos que $P(X \leq 90) = 0,9345$ e $P(X \leq 64) = 0,0119$, portanto,

$$P(65 \leq X \leq 90) = P(X \leq 90) - P(X \leq 64) = 0,9345 - 0,0119 = 0,9226.$$

(b) Temos que,

$$P(X \leq 70) \quad = \quad \binom{200}{0}(0,4)^0(0,6)^{200} + \binom{200}{1}(0,4)^1(0,6)^{199} + \cdots + \binom{200}{70}(0,4)^{70}(0,6)^{130}$$

Do *software* estatístico R (pacote Rcommander(Rcmdr): Distribuições/Distribuição Binomial/ Probabilidades binomiais acumuladas) obtemos que

$$P(X \leq 70) = 0,0844.$$

(c) Temos que,

$$\begin{aligned}
P(X > 68) &= 1 - P(X \leq 68) \\
&= 1 - \left\{\binom{200}{0}(0,4)^0(0,6)^{200} + \binom{200}{1}(0,4)^1(0,6)^{199} + \cdots + \binom{200}{68}(0,4)^{68}(0,6)^{132}\right\} \\
&= 1 - 0,0475 \\
&= 0,9525 \\
&= P(X \geq 69)
\end{aligned}$$

Utilizando o Rcmdr do *software* estatístico R (Distribuições/Distribuição Binomial/ Probabilidades binomiais acumuladas) temos que

$$P(X \leq 68) = 0,0475.$$

Vamos agora repetir os itens (a) (b) e (c) usando a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal, com e sem correção de continuidade. Temos que

$$\text{E}[X] = \text{np} = 200 \times 0,4 = 80 \text{ e}$$

$$\text{Var}[X] = \text{np(1-p)} = 200 \times 0,4 \times 0,6 = 48.$$

Pode-se aproximar a variável X pela variável Y, em que $Y \sim N(80, 48)$ e então $Z = \frac{Y-80}{6,93} \sim N(0;1)$. Assim,

(a) – Sem correção de continuidade,

$$\begin{aligned}
P(65 \leq X \leq 90) \approx P(65 \leq Y \leq 90) &= P\left(\frac{65-80}{6,93} \leq \frac{Y-80}{6,93} \leq \frac{90-80}{6,93}\right) \\
&= P(-2,164 \leq Z \leq 1,443) \\
&= P(Z \leq 1,443) - P(Z \leq -2,164) \\
&= P(Z \leq 1,443) - [1 - P(Z \leq 2,164)] \\
&= A(1,443) - [1 - A(2,164)] \\
&= 0,9251 - [1 - 0,9846] \\
&= 0,9097.
\end{aligned}$$

– Com correção de continuidade,

$$\begin{aligned}
P(65 \leq X \leq 90) \approx P(65 - 0,5 \leq Y \leq 90 + 0,5) &= P\left(\frac{64,5-80}{6,93} \leq \frac{Y-80}{6,93} \leq \frac{90,5-80}{6,93}\right) \\
&= P(-2,237 \leq Z \leq 1,515) \\
&= P(Z \leq 1,515) - P(Z \leq -2,237) \\
&= P(Z \leq 1,515) - [1 - P(Z \leq 2,237)] \\
&= A(1,515) - [1 - A(2,237)] \\
&= 0,9345 - [1 - 0,9904] \\
&= 0,9249.
\end{aligned}$$

(b) – Sem correção de continuidade,

$$\begin{aligned}
P(X \leq 70) \approx P(Y \leq 70) &= P\left(\frac{Y-80}{6,93} \leq \frac{70-80}{6,93}\right) \\
&= P(Z \leq -1,443) \\
&= 1 - P(Z \leq 1,443) \\
&= 1 - A(1,443) \\
&= 1 - 0,9251 \\
&= 0,0749.
\end{aligned}$$

- Com correção de continuidade,

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 70) \approx P(Y \leq 70 + 0,5) &= P\left(\frac{Y-80}{6,93} \leq \frac{70,5-80}{6,93}\right) \\
&= P(Z \leq -1,371) \\
&= 1 - P(Z \leq 1,371) \\
&= 1 - A(1,371) \\
&= 1 - 0,9147 \\
&= 0,0853.
\end{aligned}
$$

(c) – Sem correção de continuidade,

$$
\begin{aligned}
P(X > 68) = P(X \geq 69) \approx P(Y \geq 69) &= P\left(\frac{Y-80}{6,93} \geq \frac{69-80}{6,93}\right) \\
&= P(Z \geq -1,587) \\
&= P(Z \leq 1,587) \\
&= A(1,587) \\
&= 0,9441.
\end{aligned}
$$

- Com correção de continuidade,

$$
\begin{aligned}
P(X > 68) = P(X \geq 69) \approx P(Y \geq 69 - 0,5) &= P\left(\frac{Y-80}{6,93} \geq \frac{68,5-80}{6,93}\right) \\
&= P(Z \geq -1,659) \\
&= P(Z \leq 1,659) \\
&= A(1,659) \\
&= 0,9515.
\end{aligned}
$$

Comparando as probabilidades obtidas aproximadas pela distribuição normal(com e sem correção de continuidade) com as probabilidades exatas calculadas anteriormente vemos que elas não são muito distantes. Mas quando consideramos a correção de continuidade temos uma melhor aproximação.

Item	Prob. Exata	Aprox. Normal(s/correção)	Aprox. Normal(c/correção)
a)	0,9226	0,9097	0,9249
b)	0,0844	0,0749	0,0853
c)	0,9525	0,9441	0,9515

1º semestre de 2017

Gabarito Lista de exercícios 8 – Aproximação da Binomial pela Normal

Exercício 2

Sabe-se que cerca de 8% da população brasileira adulta é analfabeta. Uma amostra aleatória de 300 brasileiros adultos será investigada quanto ao nível de escolaridade, qual é a probabilidade aproximada de ocorrerem:

(a) pelo menos 20, mas não mais do que 30 indivíduos analfabetos;

(b) no máximo 40 analfabetos;

(c) Se X é o número de analfabetos encontrados na amostra dos 270 brasileiros adultos, determine o valor k tal que, P(14 ≤ X ≤ k) = 0,15.

Solução

Seja X o número de indivíduos analfabetos dos 300 brasileiros amostrados. Assim, X ~ Bin(300; 0,08) e temos que

$$\text{E}[X] = \text{np} = 300 \times 0,08 = 24 \ \text{ e}$$

$$\text{Var}[X] = \text{np(1-p)} = 300 \times 0,08 \times 0,92 = 22,08 \approx 4,699^2.$$

Então, X pode ser aproximada por Y~ N(24 ; 22,08) e então Z $= \frac{Y-24}{\sqrt{22,08}} \sim$ N(0; 1).

(a) $P(20 \leq X \leq 30) \approx P(20 \leq Y \leq 30)$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{20-24}{4,699} \leq \frac{Y-24}{4,699} \leq \frac{30-24}{4,699}\right) &= P(-0,8512 \leq Z \leq 1,2769) \\ &= P(Z \leq 1,2769) - P(Z \leq -0,8512) \\ &= P(Z \leq 1,2769) - [1 - P(Z \leq 0,8512)] \\ &= A(1,2769) - [1 - A(0,8512)] \\ &= 0,9162 - [1 - 0,8023] \\ &= 0,7185 \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade aproximada de encontrar entre 20 e 30 indivíduos analfabetos na amostra de 300 brasileiros é igual a 0,7185.

(b) Temos que,

$$\begin{aligned} P(X \leq 40) &\approx P(Y \leq 40) = P\left(\frac{Y-24}{4,699} \leq \frac{40-24}{4,699}\right) \\ &= P(Z \leq 3,4050) \\ &= 0,9997. \end{aligned}$$

A probabilidade aproximada de que amostra de 300 brasileiros contenha um máximo 40 indivíduos analfabetos é igual a 0,9997.

(c) Seja X o número de indivíduos analfabetos dos 270 brasileiros amostrados. Assim, X ∼ Bin(270; 0,08) e temos que

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{np} = 270 \times 0,08 = 21,6 \ \text{ e}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{np(1\text{-}p)} = 270 \times 0,08 \times 0,92 = 19,872 \approx 4,4578^2.$$

Então, X pode ser aproximada por Y∼ N(21,6 ; 19,872) e então Z $=\frac{Y-21,6}{\sqrt{19,872}}$ ∼ N(0; 1).

$$\begin{aligned}
& P(14 \le X \le k) = 0,15 \\
\Rightarrow\ & P(14 \le X \le k) \approx P(14 \le Y \le k) = P\left(\frac{14-21,6}{4,4578} \le \frac{Y-21,6}{4,4578} \le \frac{k-21,6}{4,4578}\right) = 0,15 \\
\Rightarrow\ & P\left(-1,704 \le Z \le \frac{k-21,6}{4,4578}\right) = 0,15 \\
\Rightarrow\ & P\left(Z \le \frac{k-21,6}{4,4578}\right) - P\left(Z \le -1,705\right) = 0,15 \\
\Rightarrow\ & P\left(Z \le \frac{k-21,6}{4,4578}\right) - P\left(Z > 1,705\right) = 0,15 \\
\Rightarrow\ & P\left(Z \le \frac{k-21,6}{4,4578}\right) - \left[1 - P\left(Z \le 1,705\right)\right] = 0,15 \\
\Rightarrow\ & P\left(Z \le \frac{k-21,6}{4,4578}\right) - \left[1 - A\left(1,705\right)\right] = 0,15 \\
\Rightarrow\ & P\left(Z \le \frac{k-21,6}{4,4578}\right) - \left[1 - 0,9554\right] = 0,15 \\
\Rightarrow\ & A\left(\frac{k-21,6}{4,4578}\right) = \left[1 - 0,9554\right] + 0,15 \\
\Rightarrow\ & A\left(\frac{k-21,6}{4,4578}\right) = 0,1946.
\end{aligned}$$

Fazendo $z = \frac{k-21,6}{4,4578}$, z é tal que A$(-z) = 1 - 0,1946 = 0,8054$ Pela tabela da normal padrão, z=-0,86.

Portanto,

$$\frac{k-21,6}{4,4578} = -0,86 \Rightarrow k = 17,76629.$$

A probabilidade aproximada de que amostra contenha entre 14 e 18 individuos analfabeto é de 0,15.

1º semestre de 2017

Gabarito Lista de exercícios 8 – Aproximação da Binomial pela Normal

Exercício 3

O peso de pacotes de um certo tipo de pó de café tem distribuição normal com média 1000 g e desvio padrão 10 g.

(a) Um pacote é considerado dentro do padrão se apresentar conteúdo entre 980 e 1020 g. Selecionando-se ao acaso um pacote desse tipo de pó de café, qual é a probabilidade do mesmo estar dentro do padrão ?

(b) Numa amostra de 500 pacotes, qual é a probabilidade aproximada de pelo menos 480 estarem dentro do padrão ?

(c) Serão retirados do mercado os pacotes com conteúdo inferior à 980 g. Qual é a probabilidade de um pacote selecionado ao acaso ser retirado do mercado ?

(d) Numa amostra de 100 pacotes, calcule a probabilidade aproximada de que no máximo 4 sejam retirados do mercado.

Solução

(a) Seja X o peso de pacotes de um certo tipo de pó de café. Então, $X \sim N(1000; 10^2)$

$$\begin{aligned}
P(980 \leq X \leq 1020) &= P\left(\frac{980-1000}{10} \leq \frac{X-1000}{10} \leq \frac{1020-1000}{10}\right) \\
&= P(-2 \leq Z \leq 2) \\
&= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) \\
&= P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 2)] \\
&= 2P(Z \leq 2) - 1 \\
&= 2A(2) - 1 \\
&= 2(0,9772) - 1 \\
&= 0,9544.
\end{aligned}$$

A probabilidade de um pacote estar dentro do padrão é 0,9544.

(b) Seja Y o número de pacotes que estão dentro do padrão dos 500 amostrados e a probabilidade de um pacote estar dentro do padrão (obtida no item anterior) é 0,9544.
Logo, $Y \sim Bin(500; 0,9544)$ e temos que

$$\text{E}[Y] = \text{np} = 500 \times 0,9544 = 477,2 \text{ e}$$

$$\text{Var}[Y] = \text{np(1-p)} = 500 \times 0,9544 \times 0,0456 = 21,8.$$

Considerando que Y pode ser aproximada pela distribuição normal por $W \sim N(477,2; 21,8)$ e então Z=$\frac{W-477,2}{4,67}$ ~ N(0; 1), temos

$$\begin{aligned} P(Y \geq 480) \approx P(W \geq 480) &= P\left(\frac{W-477,2}{4,67} \geq \frac{480-477,2}{4,67}\right) \\ &= P(Z \geq 0,5996) \\ &= 1 - P(Z < 0,5996) \\ &= 1 - A(0,5996) \\ &= 1 - 0,7257 \\ &= 0,2743 \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade aproximada de pelo menos 480 pacotes estarem dentro do padrão é 0,2743.

(c) Considerando, X é o peso do pacotes de um certo tipo de pó de café. Então, $X \sim N(1000; 10^2)$, temos que,

$$\begin{aligned} P(X \leq 980) &= P\left(\frac{X-1000}{10} \leq \frac{980-1000}{10}\right) \\ &= P(Z \leq -2) \\ &= 1 - P(Z \leq 2) \\ &= 1 - A(2) \\ &= 1 - (0,9772) \\ &= 0,0228 \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de um pacote selecionado ao acaso ser retirado do mercado é 0,228.

(d) Seja V o número de pacotes com conteúdo inferior a 980 g dos 100 amostrados. Do item (c) obtemos que a probabilidade de um pacote ter conteúdo inferior a 980 gramas é 0,228, logo, $V \sim Bin(100; 0,0228)$. Assim, temos que

$$\text{E}[V] = \text{np} = 100 \times 0,0228 = 2,28 \ \text{ e}$$

$$\text{Var}[V] = \text{np(1-p)} = 100 \times 0,0228 \times 0,9772 = 2,23.$$

Então, V pode se aproximar da distribuição normal por $W \sim N(2,28; 2,23)$ e consideramos Z=$\frac{W-2,28}{1,49}$ ~ N(0; 1), temos

$$\begin{aligned} P(V \leq 4) \approx P(W \leq 4) &= P\left(\frac{W-2,28}{1,49} \leq \frac{4-2,28}{1,49}\right) \\ &= P(Z \leq 1,154) \\ &= A(1,15) \\ &= 0,8749 \end{aligned}$$

Concluimos que em uma amostra de 100 pacotes, a probabilidade aproximada de que no máximo 4 sejam retirados do mercado é 0,8749.

Exercício 4

Um distribuidor de sementes sabe, através de experiências anteriores, que 95% das sementes que comercializa germinam. Ele vende pacotes de 200 sementes, com garantia de que pelo menos 180 germinarão. Qual é a probabilidade aproximada de um pacote não satisfazer à garantia.

Solução

Seja X o número de sementes que germinam das 200 vendidas e sabemos que o 95% das sementes que comercializa germinam. Logo, $X \sim Bin(200; 0,95)$ e temos que

$$\text{E}[X] = \text{np} = 200 \times 0,95 = 190 \text{ e}$$

$$\text{Var}[X] = \text{np(1-p)} = 200 \times 0,95 \times 0,05 = 9,5.$$

Então, X pode ser aproximada a $Y \sim N(190; 9,5)$ e considerando $\text{Z}=\frac{W-190}{\sqrt{9,5}} \sim \text{N}(0;1)$ temos,

$$\begin{aligned}
P(X < 180) = P(X \leq 179) \approx P(Y \leq 179) &= P\left(\frac{Y-190}{\sqrt{9,5}} \leq \frac{179-190}{\sqrt{9,5}}\right) \\
&= P(Z \leq -3,57) \\
&= 1 - P(Z \leq 3,57) \\
&= 1 - A(3,57) \\
&= 1 - 0,9998 \\
&= 0,0002
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade aproximada de um pacote não satisfazer a garantia é 0,0002.

Exercício 5

Numa cidade do litoral de São Paulo sabe-se 20% dos habitantes tem algum tipo de alergia. Sabe-se também que no grupo de alérgicos 50% praticam algum tipo de atividade física enquanto que no grupo de não alérgicos essa proporção é de 40%. Responda às seguintes questões:

(a) qual é a proporção de pessoas que praticam algum tipo de atividade física nesta cidade?

(b) Se sortearmos aleatoriamente 200 pessoas dessa cidade, qual a probabilidade de pelo menos 90 praticarem algum tipo de atividade física?

Solução

(a) Seja A o grupo de habitantes de uma cidade do litoral de São Paulo que tem algum tipo de alergia e A^c o grupo de habitantes que não são alérgicos. Logo, temos que

$$P(A) = 0,2 \text{ e } P(A^c) = 1 - P(A) = 0,8.$$

Agora, seja B o grupo de habitantes que práctica algum tipo de atividade física. Pela informação entregada temos que

$$P(B \mid A) = 0,5 \text{ e } P(B \mid A^c) = 0,4$$

Então, lembrando o teorema de bayes temos que,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c) \\ &= 0,5 \times 0,2 + 0,4 \times 0,8 \\ &= 0,42 \end{aligned}$$

Portanto, a proporção de pessoas que praticam algum tipo de atividade física nesta cidade é de 42%.

(b) Seja X o numero de pessoas que praticarem algum tipo de atividade de física de um grupo de 200 pessoas dessa cidade(sorteadas aleatoriamente).
Sabemos do item (a), que a probabilidade de praticar algum tipo de atividade física nesta cidade é de 0,42.
Assim, $X \sim Bin(200; 0,42)$ e temos que

$$\text{E}[X] = \text{np} = 200 \times 0,42 = 84 \text{ e}$$

$$\text{Var}[V] = \text{np(1-p)} = 200 \times 0,42 \times 0,58 = 48,72.$$

Então X pode-se aproximar da distribuição normal por $Y \sim N(84; 48,72)$ e consideramos Z=$\frac{W-84}{\sqrt{48,72}}$ ~ N(0; 1), temos.

$$\begin{aligned} P(X \geq 90) \approx P(Y \geq 90) &= P\left(\frac{Y-84}{6,98} \geq \frac{90-84}{6,98}\right) \\ &= P(Z \geq 0,8596) \\ &= 1 - P(Z \leq 0,8596) \\ &= 1 - A(0,8596) \\ &= 1 - 0,8051 = 0,1949 \end{aligned}$$

A probabilidade aproximada de pelo menos 90 pessoas praticarem algum tipo de atividade física de um grupo de 200 pessoas é 0,1949.

Exercício 6

Sabe-se que 60% dos passageiros de vôos internacionais da companhia aérea Beta preferem carne em suas refeições. Suponha um vôo com 300 passageiros.

1. Calcule a probabilidade de pelo menos 170 e não mais do que 190 passageiros pedirem refeição com carne neste vôo.

2. Se neste vôo a companhia aérea dispõe de 200 refeições com carne, qual a probabilidade de todos os passageiros que pedirem carne serem atendidos?

Solução

1. Seja X : Número de pessoas que preferem carne em suas refeições.

   Suposição: $X \sim B(300; 0.6)$. Então

- $E(X) = n\,p = 300 \times 0,6 = 180$
- $Var(X) = n\,p\,(1-p) = 300 \times 0,6 \times 0,4 = 72$
- $DP(X) = \sqrt{72} \cong 8,48$

Assim, a distribuição de X pode ser aproximada por $Y \sim N(180; 8,48^2)$ e note que $Z = \dfrac{Y-180}{8,48} \sim N(0;1)$.

Logo,

$$\begin{aligned}
P(170 \leq X \leq 190) &\cong P(170 \leq Y \leq 190)\\
&= P\left(\frac{170-180}{8,48} \leq \frac{Y-180}{8,48} \leq \frac{190-180}{8,48}\right)\\
&= P(-1,18 \leq Z \leq 1,18)\\
&= P(Z \leq 1,18) - P(Z \leq -1,18)\\
&= P(Z \leq 1,18) - (1 - P(Z \leq 1,18))\\
&= 2P(Z \leq 1,18) - 1\\
&= 2A(1,18) - 1\\
&= 2(0,8810) - 1\\
&= 0,762
\end{aligned}$$

portanto, a probabilidade de pelo menos 170 e não mais do que 190 passageiros pedirem refeição com carne neste vôo é de 0,762.

2. Agora precisamos achar $P(X \leq 200)$ e usando os resultados obtidos no item (1) tem-se que

$$\begin{aligned}
P(X \leq 200) &\cong P(Y \leq 200)\\
&= P\left(\frac{Y-180}{8,48} \leq \frac{200-180}{8,48}\right)\\
&= P(Z \leq 2,36)\\
&= A(2,36)\\
&= 0,9909
\end{aligned}$$

portanto a probabilidade de todos os passageiros que pedirem carne serem atendidos é de 0,9909.