PME3222 – 10ª aula

Teorema de Transporte de Reynolds e Leis Integrais

EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Prof. Marcos Tadeu Pereira, 2017

Equação da Quantidade de Movimento na forma integral

2ª Lei de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext}\Big|_{sist} = m\vec{a}\Big|_{sist} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_{sist} = \frac{dm\vec{v}}{dt}\Big|_{sist}$$

$$\left(pois\, \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} \;\; , e \;\; \frac{dm}{dt} = 0\right)$$

∴ *2ª lei de Newton:* “a “soma das forças externas que atuam no sistema = taxa de variação temporal da quantidade de movimento χ no sistema” :

$$\sum \vec{F}_{ext}\Big|_{sist} = \frac{d\chi}{dt}\Big|_{sist}$$

Como $m\vec{v} = \vec{\chi}$, pode-se usar no Teorema de Transporte de Reynolds:

$$N = \vec{\chi} = m\vec{v} \quad e \;\; \eta = \frac{N}{m} = \frac{\vec{\chi}}{m} = \vec{v}$$

E se tem a **Equação Integral da Quantidade de Movimento**:

$$\left.\frac{dm\vec{v}}{dt}\right|_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{v}\rho d\forall + \int_{SC} \vec{v}\rho\vec{v}.\vec{n}dS$$

Para usar o TTR, o volume de controle deve ser coincidente com o sistema em um dado instante, então as forças que atuam no sistema e as forças que atuam no volume de controle são iguais, neste instante:

$$\vec{F}_{ext}\Big|_{sist} = \vec{F}_{ext}\Big|_{VC}$$

O que gera a Equação Geral da Quantidade de Movimento:

$$\underbrace{\sum \vec{F}_{ext}}_{sistema} \quad \underbrace{= \sum \vec{F}_d + \sum \vec{F}_c}_{\substack{\Sigma\ das\ forças\ externas \\ à\ distância\ (g, \beta, E)\ e\ de \\ contato\ (pressão\ e\ atrito) \\ atuando\ sobre\ o\ VC}} \quad = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{v} d\forall}_{\substack{taxa\ de\ variação \\ da\ QDM\ no\ VC}} + \underbrace{\int_{SC} \vec{v}\rho\vec{v}.\vec{n}dS}_{\substack{fluxo\ da\ QDM \\ através\ da\ SC}}$$

<u>**Equação geral**, restrita a um VC inercial, qdo VC≡Sistema</u>

Observações importantes:

1) A velocidade $\vec{v}$ é referida a um sistema de coord. inercial
2) O fluxo da QDM através de elemento de área ds é um vetor $(\vec{v}\rho\vec{v}.\vec{n}ds)$, onde:

2.1) $\rho\vec{v}.\vec{n}ds$ tem o sinal de $\vec{v}.\vec{n}$:

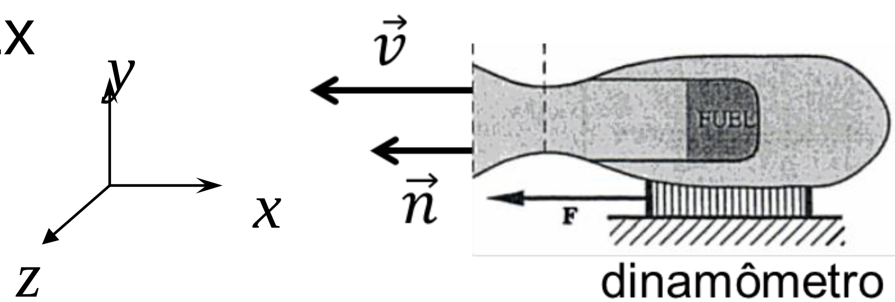
>0 nas saídas

<0 nas entradas

$\equiv 0$ quando $\vec{v} = 0 \; ou \; \vec{v} \perp \vec{n}$

2.2) a direção da QDM é dada por $\vec{v}$ e/ou $\vec{n}$, que dependem só do sistema de coordenadas escolhido

Ex



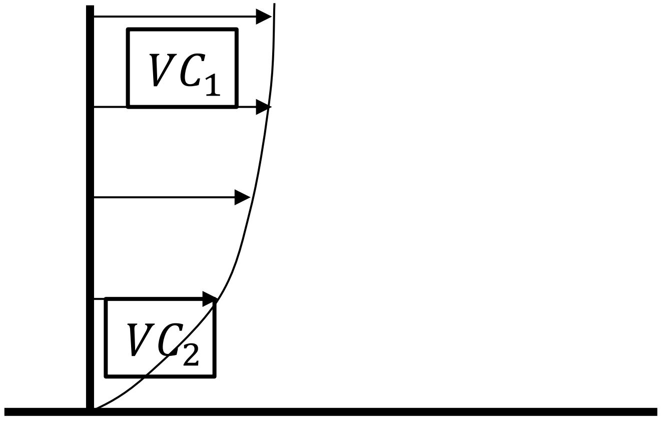
$$\rho\vec{v}.\vec{n}ds > 0 \; e$$
$$\vec{\chi} = (-v)(\rho v S)\vec{i}$$

Cuidado com o termo de fluxo $\int_{SC} \vec{v}\rho\vec{v}.\vec{n}dS$.

Podem-se obter forças bem diferentes com soluções diferentes e específicas para cada situação.

Observe que a **QDM é completamente diferente** nos volumes de controle tomados na figura abaixo.

Use o VC para obter as forças de interesse.



3) Como a QDM é vetorial, pode ser escrita na forma de equações escalares das componentes x, y e z

$$\sum F_{ext_x} = \sum F_{d_x} + \sum F_{c_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} v_x\,\rho d\,\forall + \int_{SC} v_x\,\rho\vec{v}.\vec{n}dS$$

$$\sum F_{ext_y} = \sum F_{d_y} + \sum F_{c_y} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} v_y\,\rho d\,\forall + \int_{SC} v_y\,\rho\vec{v}.\vec{n}dS$$

$$\sum F_{ext_z} = \sum F_{d_z} + \sum F_{c_z} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} v_z\,\rho d\,\forall + \int_{SC} v_z\,\rho\vec{v}.\vec{n}dS$$

Casos particulares

Hipótese 1. As **forças de campo** se restringem à força peso:

$$\sum \vec{F}_d = \vec{G} = \int_m \vec{g}\,dm = \int_{\forall C} \vec{g}\rho d\forall \quad (\mathbf{1})$$

e as **forças de contato** são as viscosas e as de pressão

$$\sum \vec{F}_c = \int_{SC} \vec{\tau}\,dS - \int_S p\vec{n}\,dS \qquad (\mathbf{2})$$

o sinal é negativo por causa da convenção de $\vec{n}$ apontar sempre para fora da SC

$SC = \sum S_e + \sum S_s + \Sigma$,onde Σ é a soma das superfícies laterais do corpo

Com a hipótese de forças de campo e de contato, pode-se reescrever a equação geral da QDM:

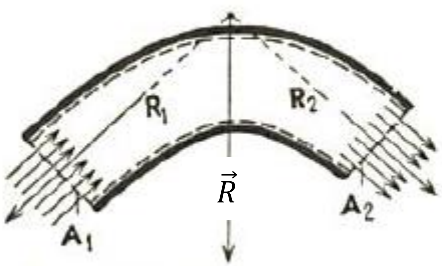
$$\sum \vec{F}_{ext} = \underbrace{\int_{\sum S_e} -p_e\vec{n}dS_e + \int_{\sum S_s} -p_s\vec{n}dS_s + \int_{\sum S_e + \sum S_s} \vec{\tau}dS}_{\substack{forças\ atuando\ em\ \sum S_e\ e\ \sum S_s \\ (entradas\ e\ saidas\ de\ fluidos)}} + \underbrace{\int_{\Sigma} -p_\Sigma\vec{n}dS_\Sigma + \int_{\Sigma} \vec{\tau}_\Sigma dS_\Sigma}_{\substack{atuando\ em\ \Sigma \\ (paredes)}}$$

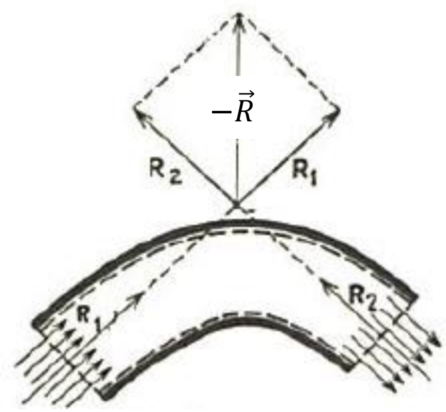
Pode-se definir ainda:

$$\vec{R} = \int_{\Sigma} -p_\Sigma\vec{n}dS_\Sigma + \int_{\Sigma} \vec{\tau}_\Sigma dS_\Sigma \qquad \mathbf{(3)}$$

$onde\ \vec{R}$ é $a\ resultante\ das\ forças\ do\ \boldsymbol{duto\ sobre\ o\ fluido}$

Observe que, normalmente, o projetista está interessado em descobrir o valor da força do fluido sobre a tubulação, ou seja, em $-\vec{R}$:

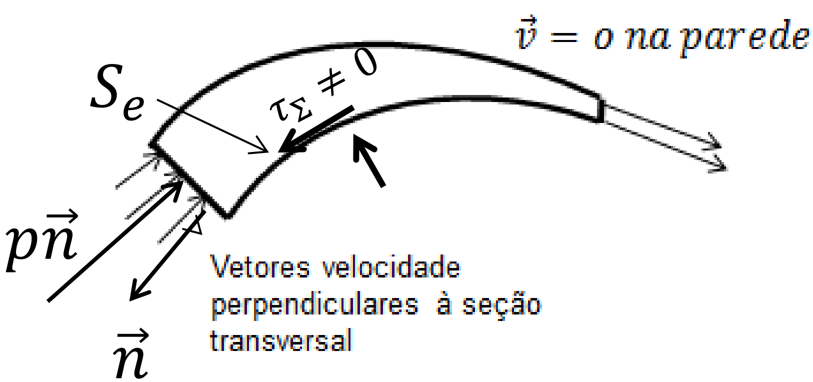


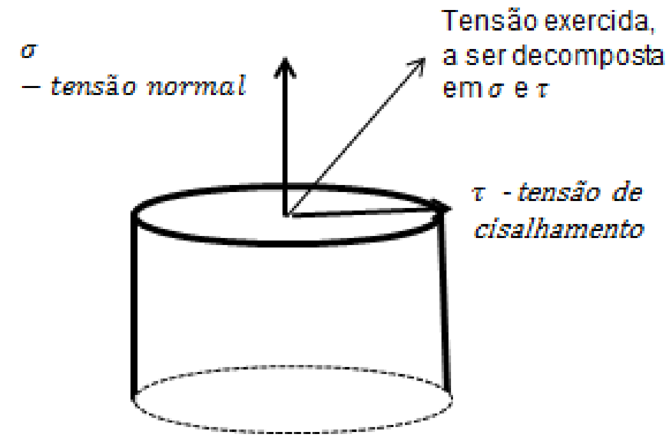


$\overrightarrow{R}$: $força\ do\ duto\ sobre\ o\ fluido$

$-\overrightarrow{R}$: $força\ do\ fluido\ sobre\ o\ duto$

Hipótese 2: trajetórias retilíneas e paralelas em todas S_e e S_s





Trajetórias retilíneas e paralelas nas entradas e saídas ⟶ as tensões nas superfícies $\sum S_e\ \ e\ \sum S_s$ se reduzem apenas às tensões normais devidas às forças de pressão. Isto ocorre quando se considera a distribuição de velocidades uniforme, o que ocorre aproximadamente nos escoamentos turbulentos:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \cong 0 \ \rightarrow \int_{\sum S_e} \tau dS = \int_{\sum S_s} \tau dS = 0 \qquad \mathbf{(4)}$$

Usa-se o fator de correção do fluxo de momento $\boldsymbol{\beta}$ para corrigir perfis de velocidade diferentes desta hipótese.

Pela hipótese 2 podem-se escrever os termos da equação geral da QDM em termos dos valores médios (equações 5)

$$\int_{\sum S_e} -p_e \vec{n} dS_e = \sum -p_e \vec{n}_e S_e$$

$$\int_{\sum S_s} -p_s \vec{n} dS_s = \sum -p_s \vec{n}_s S_s$$

$$\int_{\sum S_e} \vec{v} \rho \vec{v}.\vec{n} dS = \sum \beta_e v_e \dot{m}_e \vec{n}_e$$

$$\int_{\sum S_s} \vec{v} \rho \vec{v}.\vec{n} dS = \sum \beta_s v_s \dot{m}_s \vec{n}_s$$

$$\int_{\sum} \vec{v} \rho \vec{v}.\vec{n} dS = 0 \qquad (\vec{v} = 0 \; ou \; \vec{v} \perp \vec{n})$$

(5)

$$\beta = \frac{1}{s} \int_s \left(\frac{v}{V}\right)^2 dS \qquad laminar \rightarrow \frac{4}{3} < \beta < 1 \leftarrow turbulento\ desenvolvido$$

Substituindo as equações (1) a (5) na Equação Geral da QDM, resulta

$$\vec{\boldsymbol{G}} + \vec{\boldsymbol{R}} = \sum (\boldsymbol{p_e S_e} + \boldsymbol{\beta_e V_e \dot{m}_e})\overrightarrow{\boldsymbol{n_e}} + \sum (\boldsymbol{p_s S_s} + \boldsymbol{\beta_s V_s \dot{m}_s})\overrightarrow{\boldsymbol{n_s}} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}} \int_{\forall C} \boldsymbol{\rho \vec{v} d} \forall$$

onde $\boldsymbol{S_i}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{V_i}$ são valores médios. Lembre-se que $\boldsymbol{\dot{m}_i = \rho_i V_i S_i}$

Alguns definem ainda a Função Impulso: $\emptyset = pS + \beta \dot{m} v$, com dimensão de força. Lembre-se que a equação geral da QDM é:

$$\underbrace{\sum \vec{F}_{ext}}_{sistema} = \underbrace{\sum \vec{F}_d + \sum \vec{F}_c}_{\substack{\Sigma\ das\ forças\ externas \\ à\ distância\ (g, \beta, E)\ e\ de \\ contato\ (pressão\ e\ atrito) \\ atuando\ sobre\ o\ VC}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \vec{v} d \forall}_{\substack{taxa\ de\ variação \\ da\ QDM\ no\ VC}} + \underbrace{\int_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} . \vec{n} dS}_{\substack{fluxo\ da\ QDM \\ através\ da\ SC}}$$