4320195-Física Geral e Exp. para a Engenharia I - Prova Substitutiva - 05/07/2012

Nome:____ N^o USP: _______________

Professor:____ Turma: _______________

- A duração da prova é de 2 horas.
- Material: lápis, caneta, borracha, régua. O uso de calculadora é proibido
- Deixe indicada a raiz de números que não sejam quadrados perfeitos. Não é necessário fazer aproximações.
- Preencha todas as folhas, inclusive esta, com o seu nome, número USP e o nome do seu professor, de forma legível.
- Resolva cada exercício começando na frente da folha de respostas possuindo o mesmo número que o exercício, utilizando, se for necessário, o verso da folha.
- Justifique todas as suas respostas com comentários, fórmulas e cálculos intermediários, sem esquecer as unidades das grandezas físicas pedidas.
- Deixe sobre a carteira documento de identificação (identidade ou carteira da USP)
- Revisão da prova e resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2}$ $\quad$ $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$

$\int x^n dx = \frac{1}{(n+1)}x^{n+1}$ $\quad$ $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$

---

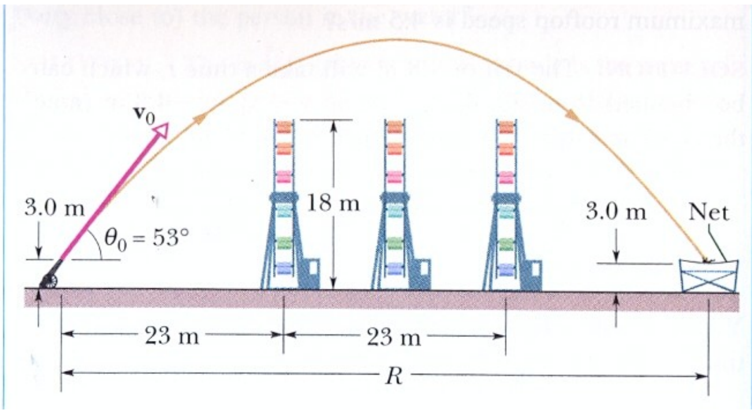
(1) Um homem bala é lançado sobre três rodas gigantes. A primeira roda gigante está posicionada à $23m$ e a última à $46m$ do local de lançamento conforme mostra a figura abaixo, sendo que cada roda gigante tem uma altura de $18m$. O homem bala é lançado com uma velocidade inicial de $v_0 = 26m/s$ formando um ângulo com a horizontal de $\theta_0 = 53°$ e com uma altura inicial de $3,0m$ acima do solo. A rede na qual o homem bala deve cair está posicionada na mesma altura.

(0,75) (a) O homem bala consegue superar a primeira roda gigante? Em caso afirmativo de quanto este supera a roda gigante, ou em caso negativo quanto falta para este superar a primeira roda gigante?

(0,75) (b) Se o homem bala atinge a altura máxima sobre a roda gigante central (segunda), qual é a sua altura sobre o topo desta?

(0,5) (c) Qual o tempo do lançamento?

(0,5) (d) Qual a distância que a rede deve ser posicionada?



Dados: $sen(53°) = 0,80$, $cos(53°) = 0,60$ e $g = 10m/s^2$.

(a) Considerando a origem na base do canhão $x_0 = 0m$ e $y_0 = 3m$.

Movimento na direção horizontal: $x = x_0 + v_{0x}t$

Movimento na direção vertical: $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

$v_{0x} = v_0 cos\theta_0$ e $v_{0y} = v_0 sen\theta_0$

$t = \frac{x}{v_0 cos\theta_0} \Rightarrow y = y_0 + v_0 sen\theta_0 (\frac{x}{v_0 cos\theta_0}) - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_o^2 cos\theta_0^2}$

$y = y_0 + tan\theta_0 x + \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_o^2 cos\theta_0^2}$

$y = 3,0 + \frac{0,8}{0,6}23 + \frac{1}{2}10(\frac{23}{26.0,60})^2 = 3,0 + 30,7 - 10,9 = 22,8m$

O homem bala consegue superar a primeira roda gigante de 4,8 m.

(b) Quando o homem bala atinge a altura máxima $v_y = 0m/s$

$v_y^2 = (v_0 sen\theta_0)^2 - 2g(y - y_0) = 0$

$y = y_0 + \frac{(v_0 sen\theta_0)^2}{2g} = 3,0 + \frac{(26.0,8)^2}{20} = 3,0 + 21,6 = 24,6m$

A sua altura sobre o topo da roda gigante central é de 6,6 m.

(c) $y = y_0 + v_0 sen\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = y_0$

$t = \frac{2v_0 sen\theta_0}{g} = \frac{2.26.0,8}{10} = 4,2s$

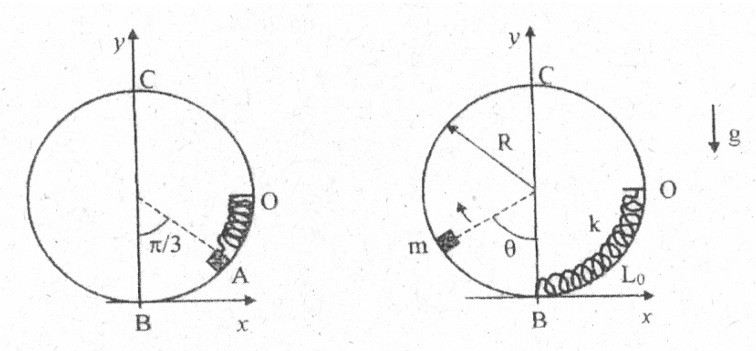
(d) $x = v_0 cos\theta_0 t = 26.0,6.4,2 = 65,5m$

(2) Uma mola, de comprimento natural L_0 e constante elática k, é montada no interior de um aro circular vertical de raio R. Uma das extremidades da mola está fixa no ponto O e a outra está livre no ponto mais baixo do aro. Um bloco de de massa m é empurrado contra a mola, que se desloca de $\pi/3$ ao longo da curva, até o ponto A, como mostrado na figura. O bloco é então liberado, a partir do repouso. O atrito entre o bloco e o aro é desprezível. Adote o referencial da figura, com origem em B.

(1,0) (a) Obtema uma expressão para a energia mecânica do bloco no ponto A em termos de m, R, k, g e π.

(1,0) (b) Determine o valor mínimo de k para que o bloco consiga executar a curva em C.

(0,5) (c) Sabendo-se que a partícula possui energia mecânica E no ponto A, obtenha a expressão para a velocidade do bloco no trecho BC em função do ângulo θ, R, m, E, g.



(a)

$E_m = K + U = K + U_{el} + U_g = 0 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mgh$

$\Delta x = \frac{\pi}{3}R$

$h = R - Rcos(\frac{\pi}{3}) = R(1 - \frac{1}{2}) = \frac{R}{2}$

$E_m = \frac{1}{2}k(\frac{\pi}{3}R)^2 + mg\frac{R}{2}$

$E_m = \frac{\pi^2}{18}kR^2 + \frac{1}{2}mgR$

(b) $E_m = K_A + U_{elA} + U_{gA} = K_C + U_{elC} + U_{gC}$

$\frac{\pi^2}{18}kR^2 + \frac{1}{2}mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 + mg2R$

Em C $\sum \vec{F} = \vec{N} + \vec{P} = \vec{F_{cp}} \Rightarrow N + mg = \frac{mv_B^2}{R}$

$N = m(\frac{v_B^2}{R} - g) > 1 \Rightarrow v_B^2 > Rg$ (ou $v_B > \sqrt{Rg}$)

$\frac{\pi^2}{18}kR^2 + \frac{1}{2}mgR = \frac{1}{2}mRg + 0 + mg2R$

$k = \frac{2mgR18}{R^2\pi^2} = \frac{36mg}{R\pi^2}$

(c) E_m é consevada

Depois que o bloco solta a mola

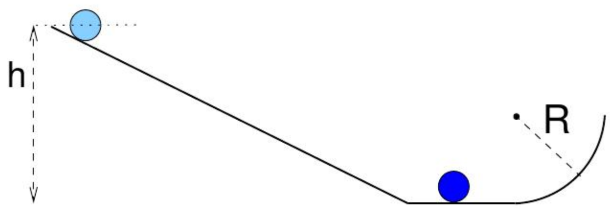
$E = K + U_g = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$

$h = R - Rcos\theta$

$\frac{1}{2}mv^2 = E - mgR(1 - cos\theta)$

$v = \sqrt{\frac{2(E-mgR(1-cos\theta))}{m}} = \sqrt{\frac{2E}{m} - 2gR(1 - cos\theta)}$

(3) Uma bolinha de gude $B1$ de massa m e raio r é solta a partir do repouso de uma altura h (altura do centro-de-massa) em uma rampa. Na parte de baixo da rampa, ocorre uma colisão perfeitamente elástica com uma segunda bolinha ($B2$ idêntica à primeira) inicialmente em repouso, de modo que $B2$ seja posteriormente lançada verticalmente por uma rampa semi-circular de raio R (vide figura). Considere que as bolinhas rolem sem deslizar. Calcule:



(0,5) (a) a velocidade da bolinha $B1$ logo antes da colisão.

(0,5) (b) a velocidade da bolinha $B2$ após a colisão.

(0,75) (c) a altura que a bolinha $B2$ atinge após o lançamento.

(0,75) (d) a velocidade angular da bolinha $B2$ quando esta atinge a altura máxima.

Dados: Esfera de massa m e raio r, eixo de rotação passando pelo centro de massa:$I_{CM} = \frac{2}{5}mr^2$.

(a) Rolamento sem deslizamento $v_{CM} = \omega r$

Conservação da energia mecânica de B1 da altura h (ponto a) até a parte de baixo da rampa (ponto b) $E_{mB1a} = E_{mB1b}$ (notando que a variação de altura do centro de massa será $h' = h - r$).

$E_{mB1a} = K_{B1a} + U_{B1a} = 0 + mgh'$

$E_{mB1b} = K_{B1b} + U_{B1b} = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{v_{CM}^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 = \frac{7}{10}mv_{CM}^2$

$mgh' = \frac{7}{10}mv_{CM}^2$

$v_{CM}^2 = \frac{10}{7} g h'$

ou seja, a velocidade do CM de $B1$ antes da colisão será $\boxed{v_{B1b} = \sqrt{\frac{10}{7} g(h-r)}}$

(também aceito: $v_{B1b} \approx \sqrt{\frac{10}{7} gh}$ se considerar $h \gg r$)

(b) colisão elástica $\vec{P}_{sist} = cte.$, Energia cinética se conserva.

$B1$ é idêntica a $B2$. Sendo v_{B1F} a velocidade de $B1$ após a colisão, temos:

Conservação de momento:

$$m.v_{B1b} = m.v_{B2b} + m.v_{B1F} \Rightarrow v_{B2b} = v_{B1b} - v_{B1F} \tag{1}$$

Conservação de energia cinética:

$$\frac{m}{2} v_{B1b}^2 = \frac{m}{2} v_{B2b}^2 + \frac{m}{2} v_{B1F}^2 \Rightarrow v_{B2b}^2 = v_{B1b}^2 - v_{B1F}^2 = (v_{B1b} + v_{B1F}) \,.\, (v_{B1b} - v_{B1F}) \tag{2}$$

Substituindo 1 em 2, temos $v_{B1b} + v_{B1F} = v_{B1b} - v_{B1F} \Rightarrow v_{B1F} = 0$

Logo:

$v_{B2b} = v_{B1b}$

$\boxed{v_{B2b} = \sqrt{\frac{10}{7} g(h-r)}}$ (também aceito: $v_{B2b} \approx \sqrt{\frac{10}{7} gh}$ se considerar $h \gg r$)

(c) Conservação da energia mecânica

Do ponto b até a extremidade da rampa (ponto c):

$E_{mB2b} = K_{B2b} + U_{B2b} = E_{mB1a} = mg(h-r)$

$E_{mB2c} = K_{B2c} + U_{B2c} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega_c^2 + \frac{1}{2} m v_{B2c}^2 + mg(R-r)$

$E_{mB2c} = \frac{7}{10}.m.v_{B2c}^2 + mg(R-r)$

Como há conservação de energia, $E_{mB2c} = E_{mB2b} = E_{mB1a}$. Logo:

$mg(h-r) = \frac{7}{10} m v_{CM}^2 + mg(R-r)$

$v_{B2c}^2 = \frac{10}{7} g(h - r - R + r)$

$v_{B2c} = \sqrt{\frac{10}{7} g(h-R)}$

A altura máxima de um lançamento (ponto d):

$E_{mB2d} = \frac{1}{2}I_{CM}\omega_d^2 + mgh_1$. Como não há mais rolamento entre o ponto c e o ponto d, $\omega_c = \omega_d$. Assim:

$E_{mB2d} = E_{mB2c} \Rightarrow m.g.h_1 = \frac{mv_{B2c}^2}{2} + m.g.(R-r)$, ou seja:

$h_1 = \frac{v_{B2c}^2}{2g} + (R-r) = \frac{10}{7}g(h-R)\frac{1}{2g} + R - r \Rightarrow \boxed{h_1 = \frac{1}{7}(5h+2R) - r}$ ou $\boxed{h_1 \approx \frac{1}{7}(5h+2R)}$

(d)

Entre o ponto c e o ponto d: $\vec{\tau}_{res}^{ext} = 0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{L} = cte.$

Portanto a velocidade angular permanece constante da extremidade da rampa até a altura máxima.

$v_{B2c} = \omega_c r \Rightarrow \omega_c = \omega_d = \frac{v_{B2c}}{r} \Rightarrow \boxed{\omega_d = \sqrt{\frac{10}{7}g\frac{(h-R)}{r^2}}}$

(4) Uma gota de chuva de massa inicial m_0 começa a cair do repouso sobre a influência da acaleração da gravidade. Assuma que a gota de chuva ganha massa das nuvens a uma taxa proporcional ao seu momento, $\frac{dm_g}{dt} = km_g v_g$, onde m_g é a massa instantânea da gota de chuva, v_g é a velocidade instantânea da gota de chuva, e k é uma constante. Despreze a resistência do ar.

(1,0) (a) Determine a equação diferencial para a velocidade da gota de chuva.

(0,5) (b) Determine a aceleração da gota de chuva.

(1,0) (c) Mostre que a velocidade da gota de chuva a um certo ponto se tornará efetivamente constante e determine a sua velocidade terminal.

(a) Para um sistema de massa variável temos:

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$

$\vec{F} = m_g g\hat{j}$

$m_g g\hat{j} = m_g\frac{d\vec{v_g}}{dt} + \frac{dm_g}{dt}\vec{v}$

$m_g g = m_g\frac{dv_g}{dt} + km_g v_g^2$

$g = \frac{dv_g}{dt} + kv_g^2$

(b)

$a_g = \frac{dv_g}{dt} = g - kv_g^2$

(c)

A aceleração não é uniforme. Vai diminuinto proporcionalmente a v_g^2 até eventualmente chegar a zero assim atingindo uma velocidade terminal.

$$a_g = g - kv_g^2 = 0 \Rightarrow v_{gterminal} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$