ESPERANÇA CONDICIONAL

Definição 1: Sejam X e Y variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. A esperança condicional de X dado $\{Y = y\}$ é definida por

$$E(X \mid Y = y) = \int x \, dF_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \sum\limits_x x \, P(X = x \mid Y = y) & \text{se } X \text{ discreta} \\ \int x \, f_{X|Y}(x \mid y) \, dx & \text{se } X \text{ contínua} \end{cases}$$

Propriedades:

1. $E(X \mid Y) = h(Y)$ é uma variável aleatória em função de Y, isto é, $E(X \mid Y)$ é $\sigma(Y)$-mensurável.
2. $E(E(X \mid Y)) = E(X)$

Exemplo 1: Soma **aleatória** de variáveis aleatórias

Seja $\{X_1, X_2, \ldots\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média $E(X) = \mu < \infty$.

Seja N uma variável aleatória inteira e não-negativa independente da sequência $\{X_i\}_i$.

Uma variável que surge comumente em aplicações é $S_N = X_1 + \cdots X_N$ que é uma soma **aleatória** de variáveis aleatórias.

Mostre que $E(S_N) = E(N) \cdot E(X)$

Exemplo 2: Ruína do jogador

Considere dois jogadores A e B (B pode representar a banca), em que o jogador A possui inicialmente \$ a, $a \geq 0$. O jogador A ganha cada partida valendo \$ 1 com probabilidade p, $0 < p < 1$. Isto é, representando por X_i o ganho do jogador A na $i-$ésima partida, então $X_i \in \{-1, +1\}$, com $P(X_i = +1) = p = 1 - P(X_i = -1)$. Considere $S_o = a$ e $S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1} + X_n$, $n \geq 1$, o capital inicial e o capital do jogador A após n partidas, respectivamente. Considere também que o jogador A deixa o jogo apenas se for a ruina (ter capital zero) ou se tiver um capital de \$ N.

Estamos interessados em

π_a, a probabilidade do jogador A ir à ruina se iniciou o jogo com \$ a e

T_a o tempo de duração do jogo se o capital inicial do jogador A é de \$ a, isto é,
$T_a = \min\{n \geq 0 : S_n = 0 \text{ ou } S_n = N\}$.

- Obtenha a equação de diferença abaixo (use condicionamento), com $q = 1 - p$.

$$\pi_k = p\,\pi_{k+1} + q\,\pi_{k-1} \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq N-1,$$

  com condições de fronteira $\pi_0 = 1$ e $\pi_N = 0$.

- Mostre que

$$\pi_a = \begin{cases} 1 - \dfrac{a}{N} & \text{se } p = q = 1/2\,, \\[2ex] \dfrac{(q/p)^a - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N} & \text{se } p \neq q\,. \end{cases}$$

- Assuma que $\mu_a = E(T_a) < \infty$, então mostre que μ_a satisfaz a equação de diferença

$$\mu_a = 1 + p\,\mu_{a+1} + q\,\mu_{a-1}\,, \quad a = 1, \ldots, N-1$$

  com condições de fronteira $\mu_0 = 0$ e $\mu_N = 0$.

- Mostre que

$$\mu_a = E(T_a) = \begin{cases} a(N-a) & \text{se } p = q = 1/2\,, \\[2ex] \dfrac{a}{q-p} - \dfrac{N}{q-p}\left(\dfrac{1-(q/p)^a}{1-(q/p)^N}\right) & \text{se } p \neq q\,. \end{cases}$$

Definição 2: Seja X uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ com $E(|X|) < \infty$. Seja $\mathcal{G}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$, então existe uma variável aleatória Z que satisfaz

1. Z é $\mathcal{G}-$mensurável;
2. para todo $G \in \mathcal{G}$ temos que
$$\int_G Z\ dP = \int_G X\ dP$$
3. $E(|Z|) < \infty$.

Além disso, se $\bar{Z}$ é uma outra variável aleatória que satisfaz as condições acima, então $\bar{Z} \overset{q.c.}{=} Z$, isto é, $P(\bar{Z} = Z) = 1$.

A variável aleatória Z que satisfaz (1), (2) e (3) acima é chamada de uma **versão da esperança condicional** de X dada a $\sigma-$álgebra $\mathcal{G}$ $(E(X \mid \mathcal{G}))$ e escrevemnos

$$Z = E(X \mid \mathcal{G}) \quad \text{quase certamente}$$

Observações:

- Considerando $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, a Propriedade 1 que segue da Definição 1: $E(X \mid Y)$ é $\mathcal{G}$-mensurável como requer o item 1 da Definição 2 acima.
- Considerando $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, o item 2 acima pode ser reescrito como
$$E\left[\mathbb{1}_A E(X \mid Y)\right] = E\left[\mathbb{1}_A X\right] \quad \text{para todo } A \in \sigma(Y)$$
Para o caso em que $A = \Omega$, temos a Propriedade 2 que segue da Definição 1.
- É fácil de ver que o item 3 é satisfeito, usando $G = \Omega \in \mathcal{G}$,
$$E(Z) = E(E(X \mid \mathcal{G})) = E(X)$$
e o fato que (para qualquer v.a.) $E(X) < \infty \Longleftrightarrow E(|X|) < \infty$
(isso vale desde que $E(X) = E(X^+) - E(X^-)$ e $E(|X|) = E(X^+) + E(X^-)$.

Para ter uma melhor intuição das propriedades de esperança condicional (com respeito a uma σ-álgebra) vamos primeiro descrever as propriedades com respeito a uma variável aleatória Y.

Propriedades

1. $E(X) = E(E(X \mid Y))$

2. Para $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$
$$E(h(Y)X \mid Y) = h(Y)E(X \mid Y)$$

3. Como $E(X \mid Y)$ é função de Y, então
$$E[E(X \mid Y) \mid Y] = E(X \mid Y) \cdot E(1 \mid Y) = E(X \mid Y)$$
o que implica que
$$E[X - E(X \mid Y) \mid Y] = 0$$

4. Usando as propriedade (1) e (3) acima
$$E[h(Y)(X - E(X \mid Y))] = E\{E[h(Y)(X - E(X \mid Y))] \mid Y\} =$$
$$E\left\{h(Y)E[X - E(X \mid Y) \mid Y]\right\} = 0$$

5. Para $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$
$$E[(X - f(Y))^2] = E\left\{[(X - E(X \mid Y)) + (E(X \mid Y) - f(Y))]^2\right\} =$$
$$E[(X - E(X \mid Y)^2] + 2E\{[X - E(X \mid Y)][E(X \mid Y) - f(Y)]\} + E[(E(X \mid Y) - f(Y))^2] =$$
$$E[(X - E(X \mid Y)^2] + E[(E(X \mid Y) - f(Y))^2] =$$
pois o termo cruzado é zero pela propriedade 4.

6. Essa sequência de resultados, mostra que $E(X \mid Y)$ é a projeção de X em $L^2(\Omega, \sigma(Y))$, pois
$$E[(X - E(X \mid Y))^2] = \min_{f(Y)} E[(X - f(Y))^2]$$