Alguns MODOS DE CONVERGÊNCIA

DEFINIÇÃO: Sejam X e $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias com, respectivamente funções de distribuições $F, F_1, F_2, \ldots$. Dizemos que X_n converge **em distribuição** ou **em lei** para X se

$$\lim_{n\to\infty} F_n(X) = F(X) \qquad \text{para todo ponto } X \text{ de continuidade de } \quad F,$$

e denotamos por $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ ou $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} F$, ou ainda, $\mathcal{L}(X_n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$.

Esse modo de convergência diz respeito apenas à convergência das <u>funções de distribuição</u>, portanto não necessita que as variáveis estejam definidas num mesmo espaço de probabilidade. E, portanto, é equivalente à convergência das respectivas <u>funções geradores de momentos</u> ou <u>funções características</u>.

Para as próximas definições considere uma sequência de v.a. $\{X_n, n \geq 1\}$ e X definidas num <u>mesmo espaço de probabilidade</u> $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

DEFINIÇÃO: Dizemos que X_n converge para X **em probabilidade** se para todo $\varepsilon > 0$,

$$P\{\mid X_n - X \mid \geq \varepsilon\} \longrightarrow 0, \qquad \text{quando} \quad n \to \infty;$$

e denotamos por $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$.

DEFINIÇÃO: Dizemos que X_n converge para X **quase certamente** ou **com probabilidade 1** se,

$$P\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1, \quad \text{isto é} \quad P\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$$

e denotamos por $X_n \xrightarrow{q.c.} X$.

DEFINIÇÃO: Dizemos que X_n converge para X em **r−ésima média** ou na **norma L^r** se para algum $r \geq 1$, com $E(|X_n^r|) < \infty$ para todo n e $E(|X^r|) < \infty$, tem-se que

$$E\left(\mid X_n - X \mid^r\right) \longrightarrow 0, \qquad \text{quando} \quad n \to \infty;$$

e denotamos por $X_n \xrightarrow{r} X$ ou $X_n \xrightarrow{L^r} X$.

Quando $r = 1$ denomina-se *convergência em média absolulta.*
Quando $r = 2$ denomina-se *convergência em média quadrática.*

TEOREMA (relação geral entre esses modos de convergência)

$$\begin{array}{ccccc} X_n \xrightarrow{q.c.} X & \Longrightarrow & X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X & \Longrightarrow & X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \\ & & \Uparrow & & \\ & & X_n \xrightarrow{L^r} X & & \end{array}$$

TEOREMA LIMITE CENTRAL

TEOREMA LIMITE CENTRAL para o caso i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas)

Sejam $X_1, X_2, X_3 \ldots$ variáveis aleatórias **independentes e identicamente distribuídas**, com $E(X_1) = \mu < \infty$ e $0 < Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$, e seja $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, então

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0,1) \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Note que isso é equivalente à convergência em distribuição da média amostral $\bar{X}_n$, isto é,

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0,1) \quad \text{quando } n \to \infty.$$

LEI DOS GRANDES NÚMEROS

Definição: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e $S_n = X_1 + \cdots + X_n, n \geq 1$.

- Dizemos que $\{X_n, n \geq 1\}$ satisfaz a *lei fraca dos grandes números* se
$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0.$$
- Dizemos que $\{X_n, n \geq 1\}$ satisfaz a *lei forte dos grandes números* se
$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{q.c.} 0.$$

LEI FRACA DOS GRANDES NÚMEROS de Khintchine
Sejam $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias **independentes e identicamente distribuídas** tais que $E(X_1) = \mu < \infty$, então $\{X_n, n \geq 1\}$ satisfaz a Lei Fraca dos Grandes Números, ou seja,

$$\frac{S_n - n\mu}{n} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \text{ ou equivalentemente } \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mu.$$

LEI FORTE DOS GRANDES NÚMEROS de Kolmogorov/Khintchine
Sejam $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias **independentes e identicamente distribuídas**. Então

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \mu \quad \text{se e somente se} \quad E(|X_1|) < \infty \text{ e } E(X_1) = \mu.$$