1º semestre de 2017

Gabarito Lista de exercícios 7 – Distribuição Normal

Exercício 1

O tempo de vida útil de uma lavadora de roupas automática tem distribuição aproximadamente Normal, com média de 3,1 anos e desvio padrão de 1,2 anos.

(a) Qual deve ser o valor do tempo de garantia dessa lavadora para que, no máximo, 15% das vendas originais exija substituição?

(b) Se esse tipo de lavadora tiver garantia de 1 ano, que porcentagem das vendas originais exigirá substituição?

Solução

(a) Seja X tempo de vida útil de uma lavadora de roupas automática com X ~ N(3,1; $1,2^2$).

Queremos determinar k de tal forma que

$$P(X \leq k) = 0,15.$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
&P(X \leq k) = 0,15 \\
&\Rightarrow P\left(\frac{X-3,1}{1,2} \leq \frac{k-3,1}{1,2}\right) = 0,15 \\
&\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{k-3,1}{1,2}\right) = 0,15
\end{aligned}$$

em que $z = \frac{k-3,1}{1,2}$. Agora, z é tal que A($-z$) = 0,85. Pela tabela da normal padrão, z=-1,04.

Portanto,

$$\frac{k-3,1}{1,2} = -1,04 \Rightarrow k = 1,852$$

O valor do tempo de garantia dessa lavadora para que, no máximo, 15% das vendas originais exija substituição é 1,852 anos.

(b) Temos que,

$$\begin{aligned}
P(X \leq 1) &= P\left(\frac{X-3,1}{1,2} \leq \frac{1-3,1}{1,2}\right) = P(Z \leq -1,75) = P(Z \geq 1,75) = 1 - A(1,75) \\
&= 1 - 0,9599 = 0,0401
\end{aligned}$$

Portanto, o 4,01% das vendas originais exigirão substituição se essas máquinas tiverem garantia de um ano.

Exercício 2

A distribuição de notas de certo tipo de teste segue distribuição normal de média 65 e desvio padrão 10 para os homens e de média 70 e desvio padrão 8 para as mulheres.

(a) Qual é a porcentagem de homens com nota maior do que 80? e de mulheres?

(b) Se esse teste for proposto numa sala onde o número de homens é o dobro do número de mulheres, qual é a porcentagem de alunos que deverá obter nota maior do que 80?

Solução

(a.1) Seja Y as notas de certo tipo de teste para os homens com $Y \sim N(65; 10^2)$. De modo que,

$$\begin{aligned} P(Y > 80) &= P\left(\frac{Y-65}{10} > \frac{80-65}{10}\right) = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) \\ &= 1 - A(1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668. \end{aligned}$$

Portanto, 6,68% dos homens têm nota maior que 80.

(a.2) Seja W as notas de certo tipo de teste para as mulheres com $W \sim N(70; 8^2)$. Logo,

$$\begin{aligned} P(W > 80) &= P\left(\frac{W-70}{8} > \frac{80-70}{8}\right) = P(Z > 1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) \\ &= 1 - A(1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056. \end{aligned}$$

Portanto, 10,56% das mulheres têm nota maior que 80.

(b) Seja X as notas deste tipo de teste para uma turma em que 2/3 dos alunos são homens e 1/3 mulheres. Defina como H o evento que o aluno é homem. Da regra da probabilidade total e dos itens b e c segue que,

$$\begin{aligned} P(X > 80) &= P(X > 80|H)P(H) + P(X > 80|H^c)P(H^c) \\ &= P(Y > 80) \times \frac{2}{3} + P(W > 80) \times \frac{1}{3} \\ &= 0,0668 \times \frac{2}{3} + 0,1056 \times \frac{1}{3} = 0,07973333 \end{aligned}$$

Portanto, aproximadamente 7,973% dos estudantes desta turma têm nota maior que 80.

Exercício 3

Suponha que X, o diâmetro interno (em milímetros) de um bocal, seja uma variável aleatória normalmente distribuída com média 13 e variância 1. Se X não atender a determinadas especificações, o fabricante sofrerá prejuízo. Especificamente, suponha que o lucro L (por bocal) seja a seguinte função de X:

$$L = \begin{cases} 20 \text{ reais} & \text{se } 12 \leq X \leq 14, \\ -3 \text{ reais} & \text{se } X < 12, \\ -2 \text{ reais} & \text{se } X > 14. \end{cases}$$

Qual o lucro esperado por bocal?

Solução

Temos que,

$$\begin{aligned}
E(L) &= 20 \times P(12 \leq X \leq 14) - 3 \times P(X < 12) - 2 \times P(X > 14) \\
&= 20 \times P\left(\frac{12-13}{1} \leq \frac{X-13}{1} \leq \frac{14-13}{1}\right) - 3 \times P\left(\frac{X-13}{1} < \frac{12-13}{1}\right) \\
&\quad -2 \times P\left(\frac{X-13}{1} > \frac{14-13}{1}\right) \\
&= 20 \times P(-1 \leq Z \leq 1) - 3 \times P(Z < -1) - 2 \times P(Z > 1) \\
&= 20 \times [P(Z \leq 1) - P(Z < -1)] - 3 \times P(Z < -1) - 2 \times P(Z > 1) \\
&= 20 \times [P(Z \leq 1) - P(Z > 1)] - 3 \times P(Z > 1) - 2 \times P(Z > 1) \\
&= 20 \times \{P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)]\} - 3 \times [1 - P(Z \leq 1)] - 2 \times [1 - P(Z \leq 1)] \\
&= 20 \times \{A(1) - [1 - A(1)]\} - 3 \times [1 - A(1)] - 2 \times [1 - A(1)] \\
&= 20 \times [0,8413 - (1 - 0,8413)] - 3 \times [1 - 0,8413] - 2 \times [1 - 0,8413] \\
&= 20 \times [0,8413 - 0,1587] - 3 \times [0,1587] - 2 \times [0,1587] = 12,8585
\end{aligned}$$

O lucro esperado pelo bocal é de 12,8585.

Exercício 4

Estudos meteorológicos indicam que a precipitação pluviométrica mensal em períodos de seca numa certa região pode ser considerada como seguindo uma distribuição Normal de média 30 mm e desvio padrão de 4mm.

(a) Qual a probabilidade de que a precipitação pluviométrica mensal no período da seca esteja entre 24 e 38 mm?

(b) Qual seria o valor da precipitação pluviométrica de modo que exista apenas 10% de chance de haver uma precipitação inferior a esse valor?

Solução

(a) Seja X a precipitação pluviométrica mensal em períodos de seca numa certa região, $X \sim N(30,4^2)$.
Temos que,

$$\begin{aligned}
P(24 < X < 38) &= P\left(\frac{24-30}{4} < \frac{X-30}{4} < \frac{38-30}{4}\right) \\
&= P(-1,5 < Z < 2) \\
&= P(Z < 2) - P(Z \leq -1,5) \\
&= P(Z < 2) - P(Z \geq 1,5) \\
&= P(Z < 2) - [1 - P(Z < 1,5)] \\
&= A(2) - [1 - A(1,5)] \\
&= 0,9772 - [1 - 0,9332] = 0,9104
\end{aligned}$$

(b) Queremos determinar k de tal forma que

$$P(X \leq k) = 0,10.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} & P(X \leq k) = 0,10 \\ & \Rightarrow P\left(\frac{X-30}{4} \leq \frac{k-30}{4}\right) = 0,10 \\ & \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{k-30}{4}\right) = 0,10 \end{aligned}$$

Fazendo $-z = \frac{k-30}{4}$, z é tal que A$(z) = 0,90$. Pela tabela da normal padrão, -z=-1,28. Logo, $\frac{k-30}{4} = -1,28 \Rightarrow k = 24,88$. Portanto, o valor da precipitação pluviométrica de modo que exista apenas 10% de chance de haver uma precipitação inferior a esse valor é 24,88.

Exercício 5

Em indivíduos sadios o consumo renal de oxigênio segue distribuição Normal de média 12 cm3/min e desvio padrão 1,5 cm3/min. Determine:

(a) A proporção de indivíduos sadios com consumo inferior a 10 cm^3/min; superior a 8 cm^3/min; entre 9,4 e $13,2\, cm^3/min$.

(b) O valor do consumo renal que é superado por 98,5% dos indivíduos sadios.

c) Uma faixa em torno do valor médio que contenha 90% dos valores do consumo renal dos indivíduos sadios.

Solução

Seja X o consumo renal de oxigênio em indivíduos sadios, X~N(12;$1,5^2$).

a.1)

$$\begin{aligned} P(\mathrm{X} < 10) &= P\left(\frac{\mathrm{X}-12}{1,5} < \frac{10-12}{1,5}\right) \\ &= P(\mathrm{Z} < -1,3333) \\ &= P(\mathrm{Z} > 1,3333) \\ &= 1 - P(\mathrm{Z} \leq 1,3333) \\ &= 1 - \mathrm{A}(1,33) \\ &= 1 - 0,9082 = 0,0918 \end{aligned}$$

Logo, a proporção de individuos sadios com consumo inferior a $10\, cm^3/min$ é $9,18\%$.

a.2)

$$\begin{aligned} P(X>8) &= P(X>8) = P\left(\frac{X-12}{1,5} > \frac{8-12}{1,5}\right) \\ &= P\left(Z > -2,6667\right) \\ &= P\left(Z \leq 2,6667\right) \\ &= A\left(2,67\right) \\ &= 0,9962 \end{aligned}$$

Logo, a proporção de individuos sadios com consumo superior a $8\,cm^3/min$ é $99,62\%$.

a.3)

$$\begin{aligned} P(9,4 < X < 13,2) &= P\left(\frac{9,4-12}{1,5} < \frac{X-12}{1,5} < \frac{13,2-12}{1,5}\right) \\ &= P\left(-1,7333 < Z < 0,8\right) \\ &= P\left(Z < 0,8\right) - P\left(Z \leq -1,7333\right) \\ &= P\left(Z < 0,8\right) - P\left(Z \geq 1,7333\right) \\ &= P\left(Z < 0,8\right) - \left[1 - P\left(Z < 1,7333\right)\right] \\ &= A\left(0,8\right) - \left[1 - A\left(1,7333\right)\right] \\ &= 0,7881 - \left[1 - 0,9582\right] = 0,7463 \end{aligned}$$

Logo, a proporção de individuos sadios com consumo entre entre $9,4\,cm^3/min$ e $13,2\,cm^3/min$ é $74,63\%$.

b) Queremos determinar k de tal forma que

$$P(X \geq k) = 0,985.$$

Similar ao exercicio anterior, temos que

$$\begin{aligned} &P(X \geq k) = 0,985 \\ &\Rightarrow P\left(\frac{X-12}{1,5} \geq \frac{k-12}{1,5}\right) = 0,985 \\ &\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{k-12}{1,5}\right) = 0,985 \\ &\Rightarrow P\left(Z < -\frac{k-12}{1,5}\right) = 0,985 \end{aligned}$$

Aqui z é tal que A(z) $= 0,985$. Pela tabela da normal padrão, z=2,17. Logo, $\frac{k-12}{1,5} = -2,17 \Rightarrow k = 8,745$. Portanto, o valor do consumo renal que é superado por 98,5% dos indivíduos sadios é 8,745.

c)

$$P(k_1 < X < k_2) = 0,9$$

$$P(k_1 < X < k_2) \quad = \quad P\left(\frac{k_1 - 12}{1,5} < \frac{X - 12}{1,5} < \frac{k_2 - 12}{1,5}\right)$$

Queremos determinar z tal que $\mathrm{A}(z) = 0,95$. Pela tabela da normal padrão, z=1.65. Então, temos

$$\left(\frac{k_1 - 12}{1,5}\right) \quad = \quad -1.65 \Rightarrow k_1 = -1.65 \times 1,5 + 12 = 9,525$$

$$\left(\frac{k_2 - 12}{1,5}\right) \quad = \quad 1.65 \Rightarrow k_1 = 1.65 \times 1,5 + 12 = 14,475.$$

Portanto, a faixa em torno do valor médio que contem 90% dos valores do consumo renal dos indivíduos sadios é dada por o intervalo $[9,525; 14,475]$.

Exercício 6

Numa região, a altura das pessoas segue distribuição aproximadamente Normal com desvio padrão de 8 cm e tal que 20% da população é constituída de pessoas com menos de 168cm de altura. Calcule a proporção de pessoas com altura:

a) superior a 190 cm.

b) Entre 170 e 185 cm.

c) Qual é a altura que é superada por apenas 1% das pessoas?

Solução

Seja X a altura das pessoas em uma região, X~N(μ;8^2). Para determinar a média, μ, consideramos a informação que 20% da população é constituída de pessoas com menos de 168cm de altura. Isto é,

$$\begin{aligned}
&P(X \leq 168) = 0,2 \\
&\Rightarrow P\left(\frac{X - \mu}{8} \leq \frac{168 - \mu}{8}\right) = 0,2 \\
&\Rightarrow P\left(Z > \frac{168 - \mu}{8}\right) = 1 - 0,2 \\
&\Rightarrow P\left(Z < -\frac{168 - \mu}{8}\right) = 0,8
\end{aligned}$$

Aqui z é tal que $\mathrm{A}(z) = 0,8$. Pela tabela da normal padrão, z=0,84. Logo, $\frac{168-\mu}{8} = -0,84 \Rightarrow \mu = 174,72$.

a)

$$\begin{aligned}
&P(X > 190) = P\left(\frac{X - 174,72}{8} > \frac{190 - 174,72}{8}\right) \\
&\Rightarrow P\left(Z > 1,91\right) \\
&\Rightarrow 1 - P\left(Z < 1,91\right) = 1 - A\left(1,91\right) = 1 - 0,9719 = 0,0281
\end{aligned}$$

A proporção de pessoas com altura superior a 190 cm é de $2,81\%$.

b)

$$\begin{aligned}
P(170 < \mathrm{X} < 185) &= P\left(\frac{170-174,72}{8} < \frac{\mathrm{X}-174,72}{8} < \frac{185-174,72}{8}\right)\\
&= P\left(-0,59 < \mathrm{Z} < 1,285\right)\\
&= P\left(\mathrm{Z} < 1,285\right) - P\left(\mathrm{Z} \leq -0,59\right)\\
&= P\left(\mathrm{Z} < 1,285\right) - P\left(\mathrm{Z} \geq 0,59\right)\\
&= P\left(\mathrm{Z} < 1,285\right) - \left[1 - P\left(\mathrm{Z} < 0,59\right)\right]\\
&= A\left(1,285\right) - \left[1 - A\left(0,59\right)\right]\\
&= 0,8997 - \left[1 - 0,7224\right] = 0.6221
\end{aligned}$$

A proporção de pessoas com altura Entre 170 e 185 cm é de $62,21\%$.

c)

$$P(X \geq k) = 0,1.$$

Similar ao exercicio anterior, temos que

$$\begin{aligned}
&P(X \geq k) = 0,1\\
&\Rightarrow P\left(\frac{X-174,72}{8} \geq \frac{k-174,72}{8}\right) = 0,1\\
&\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{k-174,72}{8}\right) = 0,1\\
&\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{k-174,72}{8}\right) = 0,1\\
&\Rightarrow P\left(Z < \frac{k-174,72}{8}\right) = 0,9
\end{aligned}$$

Aqui z é tal que $\mathrm{A}(z) = 0,9$. Pela tabela da normal padrão, z=1,28.
Logo, $\frac{k-174,12}{8} = 1,28 \Rightarrow k = 184,44$. Portanto, à altura que é superada por apenas 1% das pessoas é 184,44 cm.