Sistemas de Partículas - Centro de Massa (1

Até o momento, estudamos o movimento de uma partícula (ponto material). O único movimento possível é o de translação (deslocamento desse ponto material). Vamos agora introduzir o conceito de sistema de partículas para poder generalizar as leis de Newton e posteriormente poder descrever o movimento de corpo rígido.

Centro de Massa. Vamos definir uma grandeza chamada centro de massa de um sistema de partículas como o ponto cujas coordenadas é dada pelo vetor posição $\vec{r}_{cm}$:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

Onde $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots$ são os vetores posição das partículas de massa $m_1, m_2, \ldots$

Se as partículas do sistema se movimentam o CM também vai se mover, e sua velocidade é dada por:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

podemos obter também a aceleração do CM:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

Sabemos que $\vec{a}_1 = \sum \vec{F}_{1i}$ $a_2 = \sum \vec{F}_{2i}, \ldots$

onde $\{\vec{F}_{2i}\}$ correspondem as forças sobre a partícula 2 e assim por diante

Vamos separar as forças que contribuem p/ a resultante das forças na partícula 1 (F_{1R}) numa parte chamada de forças internas (isto é, devidas às outras partículas) e forças externas, devidas à interação do sistema com o mundo exterior

$$\sum \vec{F}_{1i} = \vec{F}_{1R} = \sum \vec{F}_{1int} + \sum \vec{F}_{1ext}$$

fazendo o mesmo com as forças sobre as outras partículas, teremos:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_{int} + \sum \vec{F}_{ext}$$

A resultante das forças internas ($\sum \vec{F}_{int}$) deve ser sempre nula, devido a 3ª lei de Newton. Portanto, $\vec{F}_R = \sum \vec{F}_{ext}$

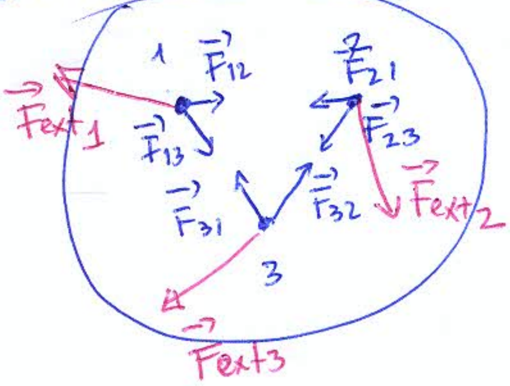
Conservação do Momento Linear - Centro de Massa

2ª Lei de Newton: $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{res.}$
(partícula)

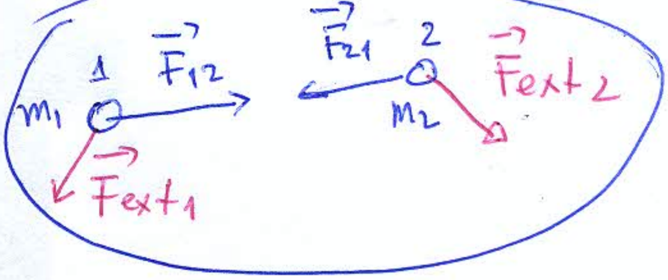
3ª Lei de Newton
(2 partículas interagindo)

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Sistema de Partículas



Caso Particular (2 part.)



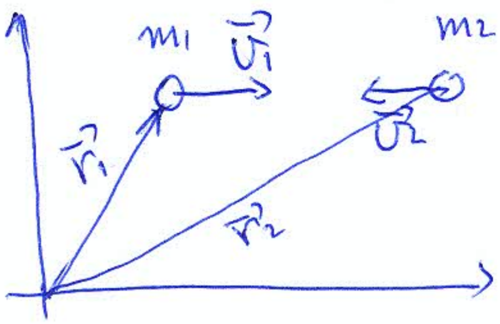
$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{ext\,1} \quad +$$
$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{ext\,2}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d\vec{P}}{dt} = \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}}_{0} + \underbrace{\vec{F}_{ext\,1} + \vec{F}_{ext\,2}}_{\vec{F}_{ext}}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

"Se a resultante das forças externas sobre um sistema de duas partículas for nula, então o momento linear total do sistema ($\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$) se conserva (é constante)."

Como $\vec{p} = m\vec{v}$; temos $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ e $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$



$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \quad \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$

Ou:

$$\vec{P} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = M\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}\right)$$

onde $M = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema e $\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$ é chamado <u>centro de massa</u> do sistema!

$$X_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} \; ; \quad Y_{cm} = \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$$

Como já vimos se a resultante das forças externas em um sistema é nula, $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = 0$ ou então,

como $\vec{P} = M\left(\dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\right) = M\vec{V}_{cm} = cte.$

Portanto, em um sistema onde a resultante das forças externas é nula, a <u>velocidade</u> do C.M. é constante.

Esses conceitos podem ser facilmente extendidos p/ <u>n</u> partículas:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \text{e tb.}$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = M\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i\right) = M\vec{V}_{cm} \text{, onde}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i \quad \text{ou}$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\vec{P} = M\vec{V}_{cm} = M\frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = cte.$$

(se a resultante das forças externas for nula!)

e portanto, como

$$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

chamando $M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$ a massa total do sistema,

$$M\vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}_{1i} + \sum \vec{F}_{2i} + \sum \vec{F}_{3i} + \cdots = \vec{F}_R$$

$$= \sum \vec{F}_{ext}$$

ou $\boxed{M\vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}_{ext}}$

"O CM de um sistema se move como se fosse uma partícula de massa M igual à soma de todas as massas do sistema, à qual atua uma força igual à soma Resultante de todas as forças externas agindo no sistema".

Corolário: se $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ então o CM se desloca com velocidade constante.

$$\vec{P}_{cm} = M\vec{V}_{cm}$$

$$\frac{d\vec{P}_{cm}}{dt} = \vec{F}_{R\,ext}$$

Cálculo de $\vec{r}_{cm}$.

Em geral:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots \right)$$

ou

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots \right)$$

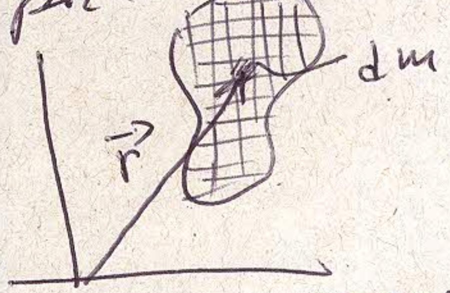
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots \right)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots \right)$$

- Distribuição contínua: Corpos rígidos são tb. formado de partículas (átomos) mas são mais fàcilmente descritos como objetos contínuos.

O CM nesse caso é dado por:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

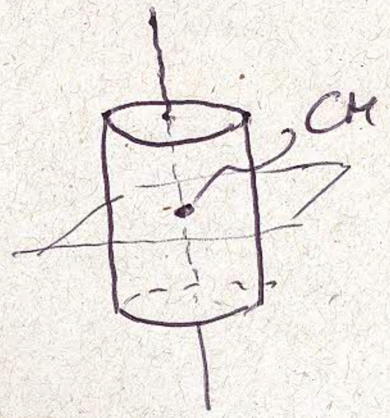


Em muitos casos é possível usar argumentos de simetria para simplificar o calculo do CM.

a) - Se uma distribuição de massas apresenta simetria em relação a um plano, então o seu CM está nesse plano.

b) - Se uma distribuição de massas possui simetria em relação a um eixo, então o seu CM está localizado nesse eixo.

c) Se uma distribuição de massas apresenta simetria em relação à um ponto $\Rightarrow$ o CM está nesse ponto.



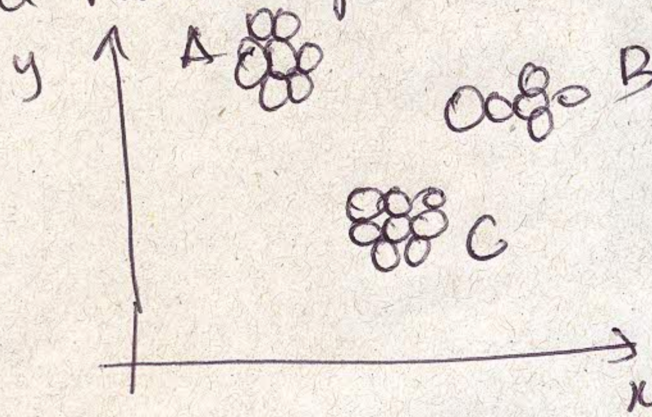
Exemplo

- Cilindro homogêneo

- Simetria em relação a eixo passando pelo centro da base.
- Simetria em relação a plano que corta o cilindro $\perp$ ~~ao~~ seu eixo, passando pela 1/2 da altura
$\Rightarrow$ CM é a interseção da reta c/ o plano

- Disco / Esfera $\Rightarrow$ CM = centro.

- Suponha agora um ~~corpo~~ sistema formado de vários pontos:



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=n+1}^{m} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=m+1}^{N} m_i \vec{r}_i\right)$$

Onde as somas foram arranjados de modo que cada uma corresponda às partículas que formam os sub-sistemas A, B e C. Portanto, sabemos que

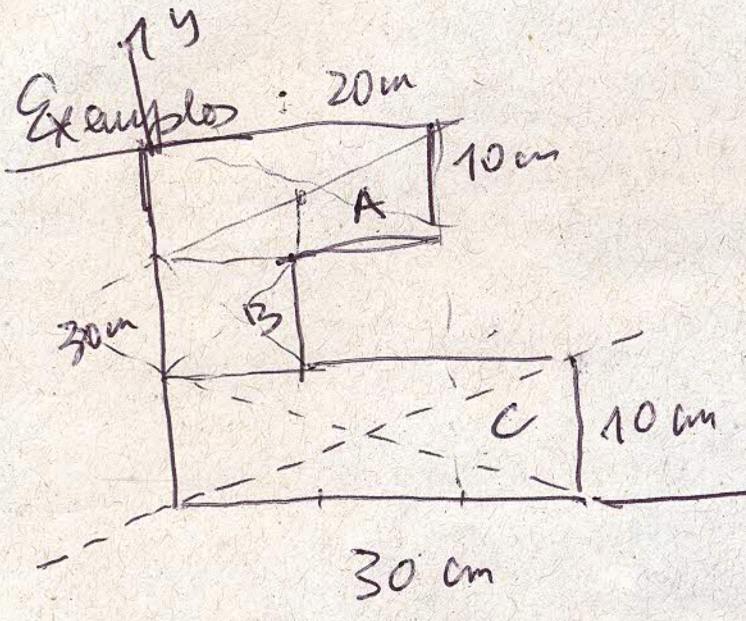
$$\vec{r}_{CMA} = \frac{1}{M_A}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad \vec{r}_{CMB} = \frac{1}{M_B}\sum_{i=n+1}^{m} m_i \vec{r}_i$$

$$\text{e} \quad \vec{r}_{CMC} = \frac{1}{M_C}\sum_{i=m+1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

portanto,

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\left(M_A \vec{r}_{cmA} + M_B \vec{r}_{cmB} + M_C \vec{r}_{cmC}\right)}$$

Exemplos:



$X_A = 10 \quad Y_A = 25$

$X_B = 5 \quad Y_B = 15$

$X_C = 15 \quad Y_C = 5$

$M_A = \frac{2}{3}M$

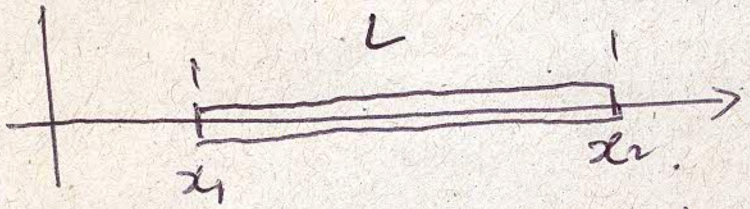
$M_B = \frac{1}{6}M$

$M_C = \frac{1}{2}M$

$$X_{cm} = \frac{1}{M}\left(\frac{2}{3}M \cdot 10 + \frac{1}{6}M \cdot 5 + \frac{1}{2}M \cdot 15\right) = \frac{70}{6}\text{ cm}$$

$$Y_{cm} = \frac{1}{M}\left(\frac{2}{3}M \cdot 25 + \frac{1}{6}M \cdot 15 + \frac{1}{2}M \cdot 5\right) = \frac{80}{6}\text{ cm}$$

λ = densidade linear



$\lambda = \frac{dm}{dx}$

$$X_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$X_{cm} = \frac{1}{M}\int_{x_1}^{x_2} x \cdot \lambda\,dx = \frac{\lambda}{M}\cdot\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

$M = \lambda \cdot L \quad , \quad x_2 = x_1 + L$

$$X_{cm} = \frac{1}{2L}\left((x_1+L)^2 - x_1^2\right) = \frac{1}{2L}\left(\cancel{x_1^2} + 2Lx_1 + L^2 - \cancel{x_1^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2L}\left(L^2 + 2Lx_1\right) = \frac{1}{2}L + x_1$$

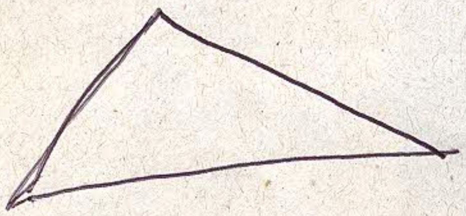
se a barra não for de densidade constante:

p. ex. se $\lambda = 50+20x$ (g/cm)

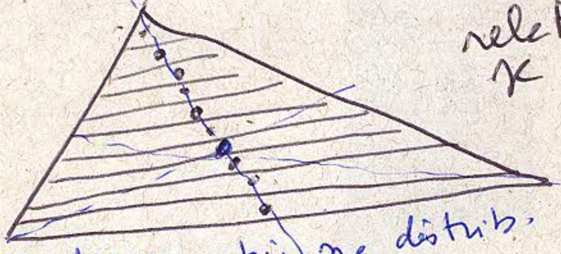
$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_{x_1}^{x_2}(50+20x)\cdot x\,dx = \frac{1}{M}\left(\frac{50}{2}(x_2^2-x_1^2)+\frac{20}{3}(x_2^3-x_1^3)\right)$$

$$M=\int dm = \int_{x_1}^{x_2}\lambda\,dx = \int_{x_1}^{x_2}(50+20x)\,dx = 50(x_2-x_1)+\frac{20}{2}(x_2^2-x_1^2)$$

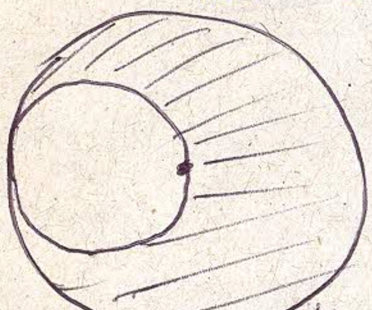
Ex: triângulo irregular



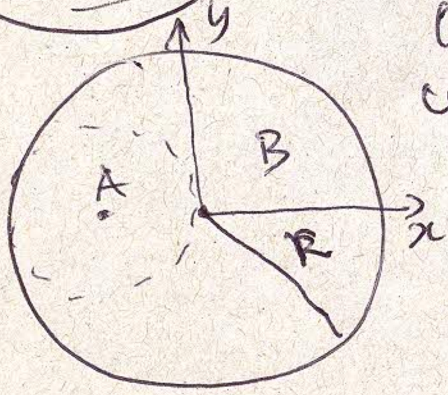
- divide-se em tiras ∥ a um dos lados



- o CM de cada tira é relativamente simples de se calcular / estimar (MEDIANA)
- faz-se o mesmo p/ os outros 2 lados.



Ex. disco homogêneo, do qual foi retirado uma parte conforme mostra a figura.



O disco completo pode ser considerado como composto das partes A e B

$M_A = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\cdot\rho$

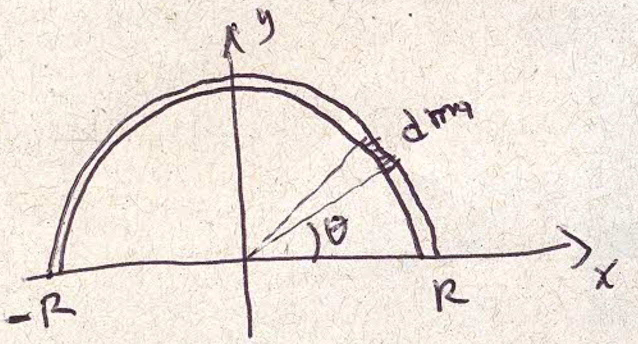
$M_B = (\pi R^2\rho - M_A)$

$$X_{cm\,Disco} = \frac{1}{M_{disco}} \left(M_A X_A + M_B X_B \right)$$

Sabemos $X_{cm\,Disco} = 0$ e $X_{cm\,A} = -\frac{R}{2}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{M_{disco}} \left(-M_A \frac{R}{2} + M_B X_B \right)$$

$$\Rightarrow M_B X_B = M_A \frac{R}{2} \Rightarrow \boxed{X_B = \frac{M_A}{M_B} \frac{R}{2}}$$



$x_{cm} = 0$

$y_{cm} = ?$

$\lambda = \frac{dm}{dl}$ $\quad dm = \lambda\, dl$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y\, dm$$

$dl = R\, d\theta$

$y = R \operatorname{sen}\theta$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^{\pi} y R \lambda\, d\theta$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^{\pi} R^2 \lambda \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

mas $\boxed{\lambda = \frac{M}{\pi R}}$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \frac{M}{\pi R} \cdot R^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{R}{\pi} \cdot 2 = \underline{\underline{0{,}64R}}$$