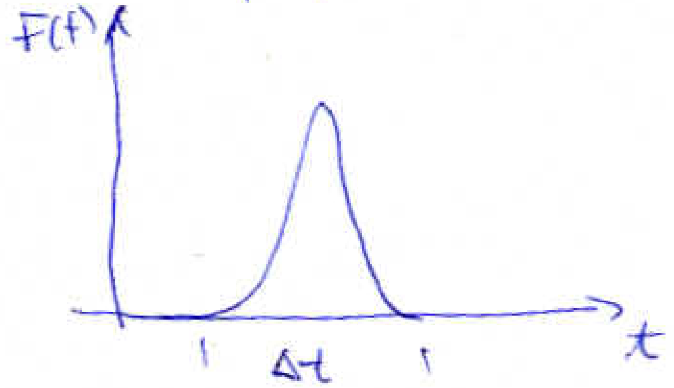
# Colisoes



Forças impulsivas. No caso das colisões, bem como em vários situações, a interação entre os corpos (ou partículas) ocorre somente durante um curto intervalo de tempo. As forças atuando entre as partículas nesses casos, são chamadas forças impulsivas e em geral variam rapidamente durante o intervalo de tempo em que atuam, de modo que em geral só conhecemos o seu valor médio (e as vezes nem mesmo isso).

A figura abaixo mostra a intensidade da força entre duas bolas de bilhar, durante o intervalo de tempo em que se tocam (a direção é perpendicular à superfície das bolas, no ponto de contato).




Supondo ser a única força agindo em cada uma das bolas, podemos escrever para uma delas:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t) \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}(t)\,dt \quad \text{ou}$$

$$\int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \, .$$

A integral à direita é conhecida como impulso da força $\vec{F}(t)$:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt \quad \text{e portanto} \quad \boxed{\vec{\Delta p} = \vec{I}}$$

essa expressão é conhecida como o Teorema do Impulso.

Como $\vec{F}(t)$ em geral é desconhecida, muitas vezes o teorema do impulso é escrito em termos do valor médio de $\vec{F}(t)$:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt = \vec{F}_{med} \cdot \Delta t \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{\Delta p} = \vec{F}_{méd} \Delta t}$$

Exemplos de Forças Impulsivas.

As forças impulsivas têm duração muito pequena e intensidade muito grande. P. ex. a força entre o martelo e o prego, entre o taco e a bola de golfe, a chuteira e a bola de futebol, na cobrança do pênalti, etc. Na resolução de problemas envolvendo forças impulsivas, em geral podemos desconsiderar outras forças agindo no sistema, como p. ex. a força gravitacional, durante a duração da força impulsiva. P. ex. no saque do tênis, a bola pode atingir velocidade inicial de mais de 200 km/h. O contato bola-raquete dura uma fração de segundo. Desse modo, a força impulsiva média agindo na bola é $\vec{F}_{medio} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \approx$ ~~[illegible]~~ $\frac{m \Delta v}{\Delta t}$

$= 0{,}06\,kg \times \frac{60\,m/s}{0{,}1\,s} = 36\,N$, enquanto seu peso é 0,6N.

# Colisões

Um sistema interessante onde se aplicam os conceitos aqui descritos é o em que duas partículas colidem entre si. Em geral, as forças atuando durante o pequeno intervalo de tempo de colisão são muito maiores que as outras forças envolvidas (p.ex., peso), de modo que o sistema formado pelas duas partículas é aproximadamente isolado.

a) Colisão frontal (unidimensional)

Quando as direções dos momentos das duas partículas estão sobre uma mesma reta, a colisão é dita frontal e o processo é unidimensional.

As colisões são classificadas como elásticas (quando há conservação da energia mecânica) ou inelásticas, quando parte da energia mecânica é transformada em outro tipo de energia (som, calor, deformação etc).

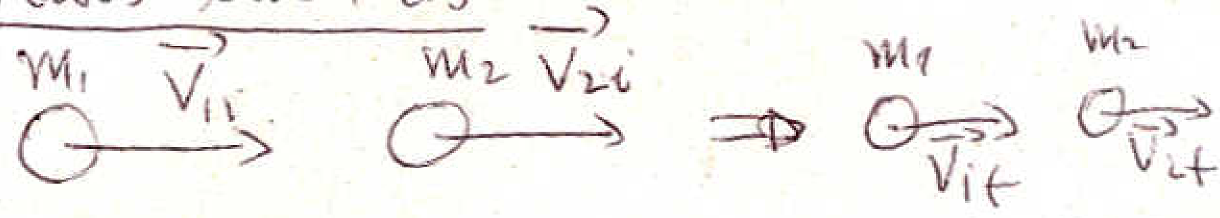
Quando, após a colisão, as duas partículas têm a mesma velocidade (~~[illegible]~~ vetorial) a colisão é denominada completamente inelástica.


$$m_1\vec{V}_{1i} + m_2\vec{V}_{2i} = (m_1+m_2)\vec{V}_f$$

como todos os vetores são paralelos:

$$\boxed{V_f = \frac{m_1V_{1i}+m_2V_{2i}}{m_1+m_2}}$$

## Colisões elásticas




novamente, não é preciso usar a notação vetorial, apenas se lembrar dos sinais das velocidades.

$$\begin{cases} m_1V_{1i} + m_2V_{2i} = m_1V_{1f} + m_2V_{2f} & \text{(cons. mom.)} \\ \frac{1}{2}m_1V_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1V_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2f}^2 & \text{(cons. energ.)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(V_{1i} - V_{1f}) = m_2(V_{2f} - V_{2i}) \\ m_1(V_{1i}^2 - V_{1f}^2) = m_2(V_{2f}^2 - V_{2i}^2) \end{cases} \div$$

$$\frac{(V_{1i}^2 - V_{1f}^2)}{(V_{1i} - V_{1f})} = \frac{(V_{2f}^2 - V_{2i}^2)}{(V_{2f} - V_{2i})}$$

$$V_{1i} + V_{1f} = V_{2f} + V_{2i}$$

ou

$$V_{1i} - V_{2i} = -(V_{1f} - V_{2f})$$

mas note que $V_{1i} - V_{2i} = V_{Ri}$ = Velocidade relativa entre as partículas antes da colisão

e $V_{Rf} = V_{1f} - V_{2f}$

$$\Rightarrow \quad V_{Ri} = -V_{Rf}$$

Supondo que sejam conhecidas as massas e as velocidades iniciais das partículas.

$$\begin{cases} m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f} \\ V_{1i} - V_{2i} = -(V_{1f} - V_{2f}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 V_{2f} = m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} - m_1 V_{1f} \\ V_{1f} = V_{2i} - V_{1i} + V_{2f} \end{cases}$$

$$m_2 V_{2f} = \underline{m_1 V_{1i}} + m_2 V_{2i} - m_1 (V_{2i} - \underline{V_{1i}} + V_{2f})$$

$$m_2 V_{2f} = 2 m_1 V_{1i} + (m_2 - m_1) V_{2i} - m_1 V_{2f}$$

$$(m_1 + m_2) V_{2f} = 2 m_1 V_{1i} + (m_2 - m_1) V_{2i}$$

$$\boxed{V_{2f} = \frac{2 m_1}{(m_1 + m_2)} V_{1i} + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} V_{2i}}$$

de modo análogo:

$$\boxed{V_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1i} + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} V_{2i}}$$

note: Consideramos velocidads p/ a direita como positivas e p/ a esquerda como negativas, ou vice-versa.

Casos particulares:

a) massas iguais ($m_1 = m_2$)

$V_{1f} = V_{2i}$ e $V_{2f} = V_{1i}$ (as partículas trocam de velocidades)

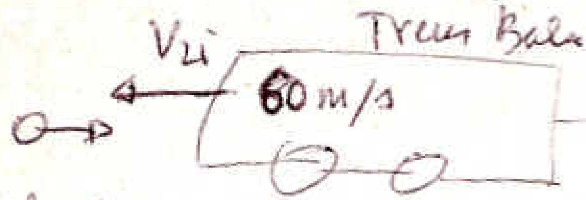
b) uma das partículas (alvo) está em repouso. (p. ex. $V_{2i} = 0$)

$$\boxed{V_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} V_{1i} \quad e \quad \boxed{V_{2f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_{1i}}$$

c) Bola de ping-pong jogada sobre bola de Boliche ($m_2 \gg m_1$),

$$V_{1f} \approx -V_{1i} + 2V_{2i} \; ; \; V_{2f} \approx V_{2i}$$

$m_2 = 20t$




$V_{2i} = -60 m/s \cong 216 km/h$

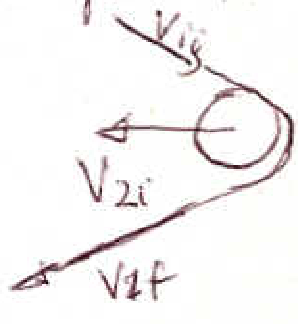
bola de tenis $V_{1i} = 10 m/s$ (36 km/h)
$m_1 = 0,1 kg$

$V_{2f} \approx V_{2i}$ (trem ñ altera sua velocidade)

$V_{1f} = -10 \cancel{m/s} - 2 \times 60 = -130 m/s$

$V_{1f} = 468 km/h$ !!

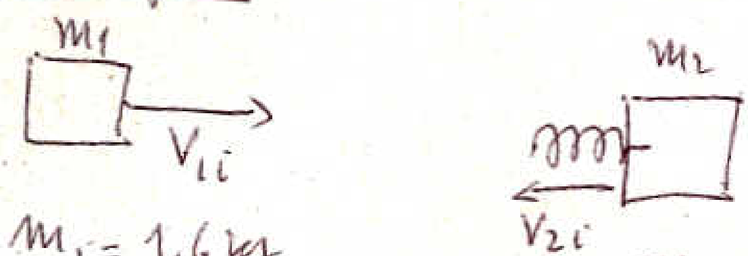
Esse tipo de colisão, com ação apenas da força gravitacional, é usado p/ aumenta a velocidade de uma nave espacial, que se destina a um planeta distante ou p/ fora do sistema solar. (assistência gravitacional).




d) Jogando bola de boliche sobre bola de ping-pong: ($m_1 >> m_2$)

$V_{1f} \approx V_{1i}$ $\qquad V_{2f} \cong 2V_{1i} - V_{2i}$

## Exemplo




$m_1 = 1{,}6\ kg$

$V_{1i} = 4\ m/s$

$m_2 = 2{,}1\ kg$

$V_2 = 2{,}5\ m/s$

$k = 600\ N/m$

Qual $V_2$ quando $V_1 = 3\ m/s$ ?

$$m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f}$$

$$1{,}6 \times 4 - 2{,}1 \times 2{,}5 = 1{,}6 \times 3 + 2{,}1\ V_{2f}$$

$$6{,}4 - 5{,}25 = 4{,}8 + 2{,}1\ V_{2f}$$

$$1{,}15$$

$$V_{2f} = \frac{-(4{,}8 - 1{,}15)}{2{,}1} = \frac{-3{,}65}{2{,}1} = \underline{1{,}74\ m/s}$$

b) qual o $\Delta x$ da mola ? ( supondo colisão elástica ) = mola ideal

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2i}^2 = 0{,}8 \times 16 + 1{,}05 \times 6{,}25$$

$$= 12{,}8 + 6{,}6$$

$$= 19{,}4\ J$$

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

$$= 0{,}8 \times 9 + 1{,}05 \times 1{,}74^2 + \frac{1}{2} \times 600 \times \Delta x^2$$

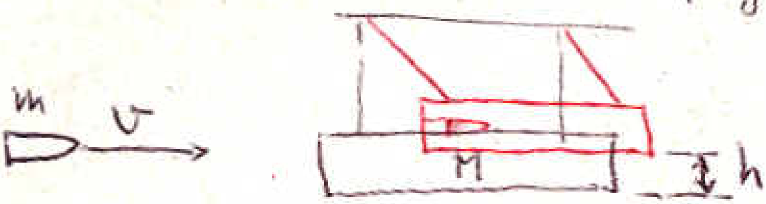
$$= 7{,}2 + 3{,}2 + 300 \cdot \Delta x^2 = 10{,}4 + 300\,\Delta x^2$$

$$300\,\Delta x^2 = 19{,}4 - 10{,}4 = 9$$

$$\Delta x^2 = \frac{9}{300} \qquad \Delta x = \sqrt{0{,}03} = 0{,}17$$

$$\Delta x = 17\ cm.$$

<u>Pêndulo Balístico</u>: instrumento simples utilizado para se determinar a velocidade de projéteis de armas de fogo.




a) <u>Colisão</u>: a colisão entre a bala e a massa M é completamente inelástica. Portanto, a velocidade inicial V da massa M é dada por:

$$mv = (m+M)V \Rightarrow \boxed{V = \frac{m}{M+m}v}$$

b) pêndulo. Considerando agora o pêndulo como um sistema sem atrito, sob a ação da gravidade, a altura máxima h (quando V=0) é dada pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{2gh}}$$

e portanto, a velocidade da bala é:

$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}$$

tomemos, p. ex: $m = 5g$, $M = 2kg$, $h = 3cm$

$$v = \frac{2+0{,}005}{0{,}005}\sqrt{20\times 0{,}03} \doteq 300 m/s$$

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2 \cong 240 J \qquad E_f = \frac{1}{2}(M+m)V^2 \simeq 0{,}6 J$$

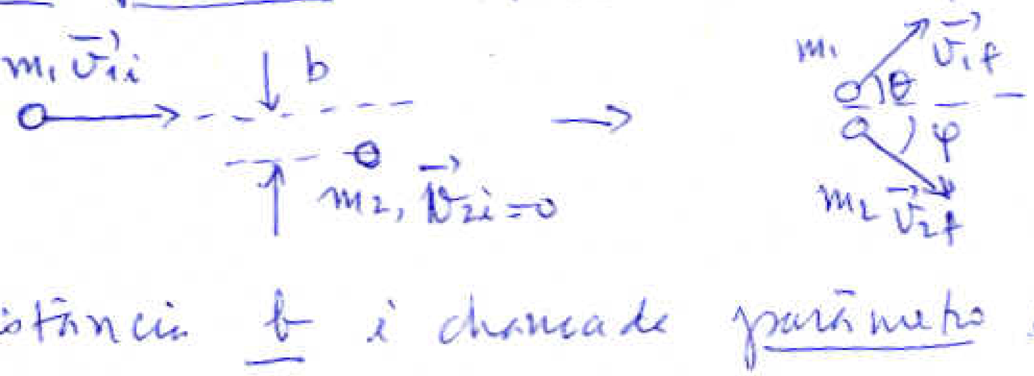
$(V \simeq 0{,}8 m/s)$

## Colisões 2-D



Toda colisão se desenvolve sempre em um plano, i.e., o plano determinado por $\vec{p}_{1i}$ e $\vec{p}_{2i}$, ou por $\vec{p}_{1i}$ e o ponto em que se encontra a partícula 2, nos casos em que $\vec{p}_{2i} = 0$. Portanto este plano é o mesmo que o formado por $\vec{p}_{1f}$ e $\vec{p}_{2f}$. Assim, colisões 2-D são o caso mais geral das colisões.

Não é possível encontrar uma solução analítica para todos os casos das colisões 2D. Isso porque há um grande número de variáveis. Em geral, cada caso implica em uma solução particular, embora se possa tirar conclusões mais gerais sobre alguns aspectos dessas colisões. Sempre que possível, vamos considerar o caso em que a partícula 2 está em repouso, para simplificar a álgebra. Isso não implica em perda de generalidade, mas numa escolha particular do sistema de referência.




a distância b é chamada parâmetro de impacto e em geral é desconhecido, ao menos nas colisões entre partículas microscópicas, como na física Nuclear (note que para $b = 0$ a colisão é frontal ou 1-D)

Em geral, ao se estudar uma colisão como a mostrada acima, são conhecidos as massas $m_1, m_2$, a velocidade inicial $\vec{v}_{1i}$ e uma das grandezas $\theta, \varphi, v_{1f}, v_{2f}$.

Para as colisões elásticas, temos então as seguintes equações: 2

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

A equação de conservação do momento se decompõe em duas eq. algébricas:

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\varphi \\ m_1 v_{1f} \,\mathrm{sen}\,\theta = m_2 v_{2f} \,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

O procedimento p/ a solução depende então de qual das variáveis $v_{1f}, v_{2f}, \theta, \varphi$ é conhecida.

Caso $m_1 = m_2$

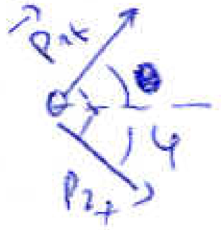
Neste caso, ($m_2$ é conhecido e igual a $m_1$!) ~~temos~~ podemos re-escrever a equação de conservação de energia cinética como:

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \Rightarrow p_{1i}^2 = p_{1f}^2 + p_{2f}^2 \quad (m_1 = m_2)$$

mas como $\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \Rightarrow p_{1i}^2 = \vec{p}_{1i} \cdot \vec{p}_{1i}$

ou $p_{1i}^2 = (\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}) \cdot (\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}) = p_{1f}^2 + p_{2f}^2 + 2\vec{p}_{1f} \cdot \vec{p}_{2f}$

e portanto $\vec{p}_{1f} \cdot \vec{p}_{2f} = 0$, ou seja $\vec{p}_{1f} \perp \vec{p}_{2f}$

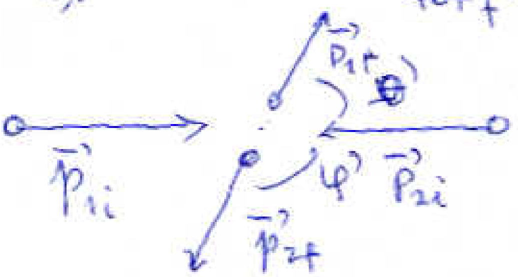



$\Rightarrow \boxed{\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}}$

Este caso tem uma análise bastante simples se descrevermos a colisão no sistema de ref. em que o C.M. está em repouso (chamado sistema de ref. do C.M.). Neste caso, cada uma das partículas tem momento inicial $\vec{p}_i$ voltado para o C.M. (que está então em repouso).

$$\vec{P}_{total\,i} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{tot\,f} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{1f} = -\vec{p}_{2f}$$

$$\text{e} \quad \theta' + \varphi' = \pi$$




pode ser facilmente demonstrado que $\theta = \frac{\theta'}{2}$ e $\varphi = \frac{\varphi'}{2}$

## Colisões 2-D inelásticas

Nessas colisões, a energia cinética do sistema não se conserva. A diferença $E_c^f - E_c^i$ é chamada ~~fator~~ Q da colisão:

$$\boxed{Q = E_c^f - E_c^i}$$

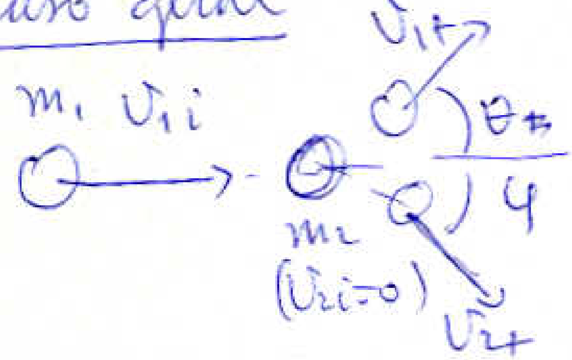
Em colisões envolvendo o núcleo atômico, Q pode ser nulo (col. elástica), $>0$ ou $<0$

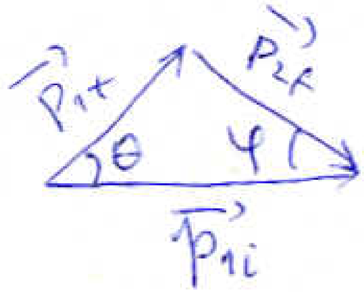
$Q > 0$ - energia cinética aumenta (exoérgico)

$Q < 0$ - energia cinética diminui (endoérgico)

No caso de colisões nucleares, pode também haver mudanças nas massas das partículas (reações nucleares). A colisão é então descrita de uma maneira mais geral, supondo que as partículas (1) e (2) colidem, e depois emergem as partículas (3) e (4).

## Caso geral




Colisão elástica $E_{ci} = E_{c1f} + E_{c2f}$

$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{2f}^{\,2}}{2m_2}$

isolando $p_{2f}$: $\frac{p_{2f}^2}{m_2} = \frac{1}{m_1}\left(p_{1i}^2 - p_{1f}^2\right)$

ou $p_{1f}^2 = \frac{m_2}{m_1}\left(p_{1i}^2 - \vec{p}_{1f}^{\,2}\right)$

da conservação do momento: $\vec{p}_{2f} = \vec{p}_{1i} - \vec{p}_{1f}$

elevando ao quadrado $(\vec{p}_{2f}\cdot\vec{p}_{2f})$:

$p_{2f}^2 = p_{1i}^2 + \vec{p}_{1f}^{\,2} - 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta$

eliminando $p_{2f}$:

$p_{1i}^2 + p_{1f}^2 - 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta = \frac{m_2}{m_1}\left(p_{1i}^2 - p_{1f}^2\right)$ ou

$p_{1f}^2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) - p_{1f}\cdot 2p_{1i}\cos\theta + p_{1i}^2\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right) = 0$

de onde,

$$p_{1f} = \frac{2p_{1i}\cos\theta \pm \sqrt{4p_{1i}^2\cos^2\theta - 4\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)p_{1i}^2}}{2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

ou

$$p_{1f} = \frac{p_{1i}}{1+\frac{m_2}{m_1}}\left(\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - \left(1-\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right)}\right)$$ 15

se $m_2 > m_1$, $1-\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2$ é $< 0$ e portanto a raiz existe p/ $\forall$ valor de $\theta$. Se $m_2 < m_1$, então temos que impor a condição

$$\cos^2\theta - \left(1-\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right) \geq 0$$

portanto o valor máximo de $\cos\theta$ é dado por

$$\cos^2\theta_{max} - 1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \cos^2\theta_{max} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 = 1$$

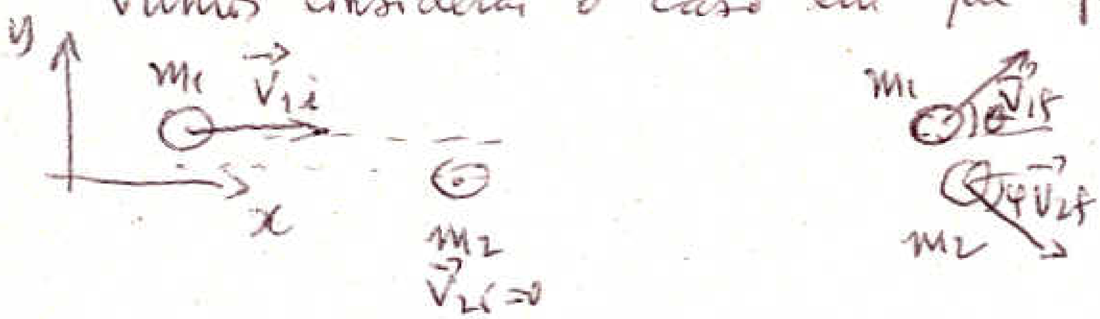
e portant, $\boxed{\operatorname{sen}\theta_{max} = \frac{m_2}{m_1}}$

# Colisões 2-D - exemplo

Tôda colisão se desenvolve sempre num plano, isto é: O plano determinado por $\vec{p}_{1i}$ e o ponto onde se encontra $m_2$, no caso em que $\vec{p}_{2i} = 0$, ou o plano formado por $\vec{p}_{1i}$ e $\vec{p}_{2i}$ é o mesmo que aquele determinado por $\vec{p}_{1f}$ e $\vec{p}_{2f}$. Portanto, colisões bi-dimensionais são o caso mais geral das colisões.

Em geral, cada problema implica numa solução particular das equações, por isso não se fala na "solução geral" do problema de colisões 2-D.

Vamos considerar o caso em que $\vec{p}_{2i} = 0$:




$$\vec{P}_i = \vec{p}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1i}$$

$$\vec{P}_f = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

$$P_x = m_1 v_{1i}$$

$$P_y = 0$$

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

$$P_x = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\varphi$$

$$P_y = m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta - m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\varphi$$

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

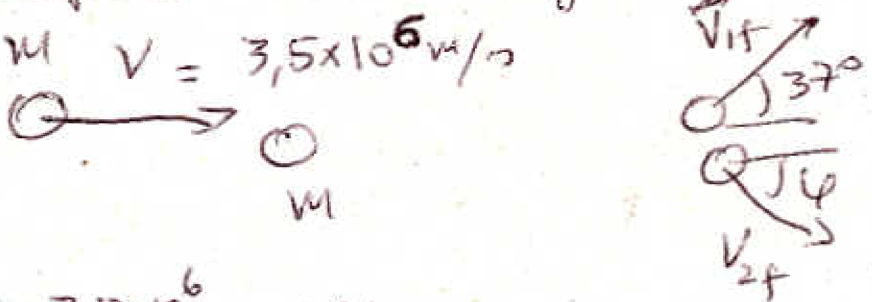
Em geral, conhece-se $\vec{v}_{1i}$, $m_1$, $m_2$ e são incognitos, $v_{1f}$, $v_{2f}$, $\theta$ e $\varphi$.

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\varphi \\ m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta = m_1 v_{2f} \operatorname{sen}\varphi \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$



Temos então 4 incógnitas e 3 equações.
Portanto, podemos obter a solução p/ 3 dessas incógnitas, para um dado valor da 4ª delas.

Exemplo: Colisão proton-proton




$$\frac{V}{c} = \frac{3{,}5\times10^6}{3\times10^8} \simeq 0{,}01$$

$V \sim 1\%$ da velocidade da luz $\Rightarrow$ pode-se desconsiderar os efeitos relativísticos.

$$\begin{cases} mV = m v_{1f} \cos 37 + m v_{2f} \cos\varphi \\ m v_{1f} \operatorname{sen} 37 = m v_{2f} \operatorname{sen}\varphi \\ \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V = v_{1f} \cos 37 + v_{2f} \cos\varphi \\ v_{1f} \operatorname{sen} 37 = v_{2f} \operatorname{sen}\varphi \\ V^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} (V - v_{1f}\cos 37)^2 &= v_{2f}^2 \cos\varphi^2 \\ v_{1f}^2 \operatorname{sen}^2 37 &= v_{2f}^2 \operatorname{sen}^2\varphi \end{aligned}\right| +$$

$$V^2 - 2VV_{1f}\cos 37 + V_{1f}^2(\cos^2 37 + \operatorname{sen}^2 37) = V_{2f}^2$$ (17)

$$V^2 - 2VV_{1f}\cos 37 + V_{1f}^2 = V_{2f}^2$$

$$V_{2f}^2 = V^2 - V_{1f}^2$$

$$\cancel{V^2} - 2VV_{1f}\cos 37 + V_{1f}^2 = \cancel{V^2} - V_{1f}^2$$

$$2V_{1f}^2 - 2VV_{1f}\cos 37 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{1f} = V\cos 37} = V \times 0.8$$

$$V_{1f} = 3{,}5\times10^6 \times 0.8 = 2{,}8\times10^6\ m/s$$

$$V_{2f} = \sqrt{V^2 - V_{1f}^2} = \sqrt{3{,}5^2 - 2{,}8^2}\times10^6$$

$$\boxed{V_{2f} \simeq 2{,}1\times10^6\ m/s}$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{V_{1f}}{V_{2f}}\operatorname{sen} 37 = \frac{2{,}8}{2{,}1}\times 0{,}6 = 0{,}8$$

$$\boxed{\varphi \simeq 53^\circ}$$