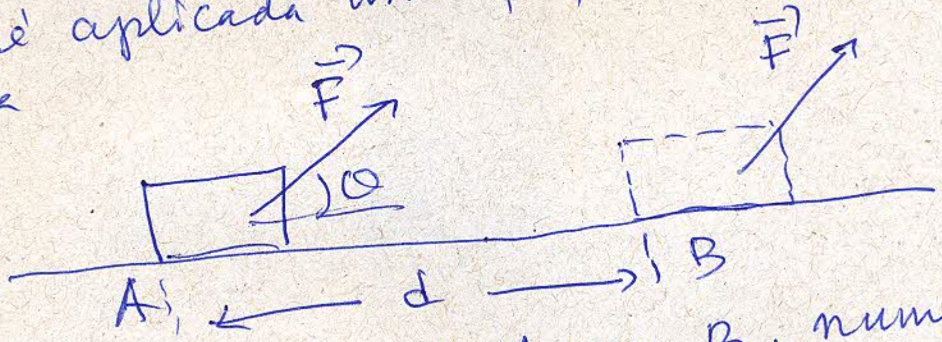
Trabalho e Energia

As definições de força, aceleração, velocidade, etc. como vimos, são em princípio suficiente para a descrição de todo problema mecânico. Entretanto, a definição de outras quantidades, decorrente dessas mencionadas, são muito úteis na resolução e no entendimento dos problemas.

Trabalho realizado por uma força constante

Vamos definir um sistema como sendo um objeto, uma coleção de objetos ou uma pequena região delimitada. A fronteira de um sistema, que é uma superfície, muitas vezes imaginária, que separa o sistema do exterior ou arredores.

Consideremos como sistema, a caixa abaixo, na qual é aplicada uma força F como visto na figura



Ao deslocar a caixa de A para B numa distância d, dizemos que a Força $\vec{F}$ realizou um trabalho W sobre a caixa, dado por:

$$W = F.d.\cos\theta$$

O trabalho é portanto uma grandeza escalar, com dimensões de N.m. Dada a importância e uso constante de grandezas com essas dimensões, ela recebe o nome de Joule (J): 1J = 1N.1m

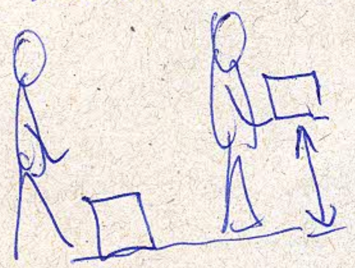
Note que uma força para realizar trabalho, deve necessariamente produzir um deslocamento d diferente de zero. Também, uma força perpendicular ao deslocamento <u>não</u> <u>realiza</u> <u>trabalho</u>

Uma partícula ou um sistema pode estar sobre a influência de várias forças. Nesses casos, podemos também definir o <u>trabalho</u> <u>realizado</u> <u>pela</u> <u>força</u> <u>resultante</u> sobre a partícula

O sinal do trabalho depende da direção da força em relação ao deslocamento <u>d</u>.

<u>Exemplo</u>: Uma pessoa levanta uma caixa do chão, erguendo-a de uma altura h, fazendo o movimento com velocidade constante.

Forças sobre a caixa:



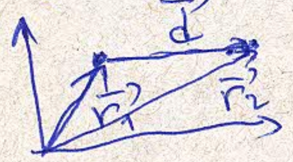
O trabalho realizado pela pessoa é $W_p = F.h$ (positivo) e o realizado pela força gravitacional é $W_g = mg.h$

Como a caixa se move com $v = cte \Rightarrow F = mgh$ e o trabalho da força resultante sobre a caixa é <u>nulo</u>. ($F = mg \Rightarrow mgh + (-mgh) = 0$

<u>Definição vetorial de Trabalho</u>

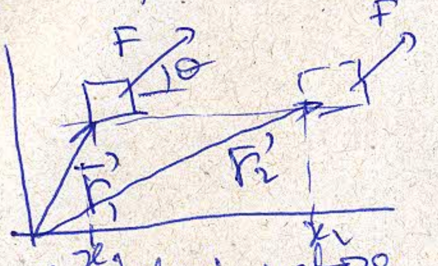
Note que o <u>deslocamento</u> referido anteriormente é na verdade uma grandeza vetorial

$$\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta \vec{r}$$



onde $\vec{r}$ é o <u>vetor posição</u> da partícula.

Com isso, podemos definir o trabalho realizado pela força F para deslocar a caixa de A para B como

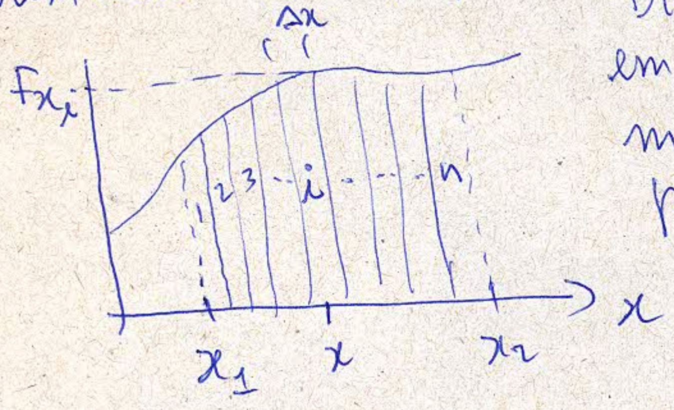


$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}}$$

Pela definição de produto escalar dos vetores, temos $W = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta$ como definido inicialmente.

Trabalho realizado por uma força variável

Vamos supor agora, que a força $\vec{F}$ aplicada sobre a caixa, varie ao longo do percurso (direção x) de A para B. Podemos escrever $\vec{F} = \vec{F}(x) = F_x(x)\,\hat{i} + F_y(x)\,\hat{j}$. Já sabemos que o trabalho realizado por F_y neste caso é nulo, pois F_y é perpendicular ao deslocamento $\vec{\Delta r}$. Suponha que a componente F_x da força varie como mostrado na figura:



Dividindo a distância $x_2 - x_1$ em n pequenos pedaços de modo que F_x varie muito pouco ao longo de cada Δx, podemos escrever

$$W_i \approx F_{x_i} \cdot \Delta x$$

e o trabalho total realizado por F é dado por

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \cdot \Delta x$$

Tomando o limite p/ $\Delta x \to 0$, a expressão para W torna-se exata:

$$W = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} F_{xi}\,\Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x)\,dx$$

$$\boxed{W = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x)\,dx}$$

Note que $F_x \cdot dx = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, com $\vec{F} = F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath}$ e $d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}$

portanto

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

No caso $\vec{F}$ = constante, temos $W = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

$$= \underline{\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}$$

Para o trabalho da força resultante $\vec{F}_R$, temos: $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$

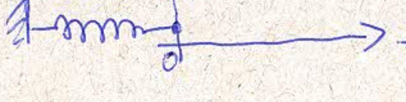
$$W_{resultante} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\sum_i \vec{F}_i\right) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots$$

$$= W_1 + W_2 + \dots$$

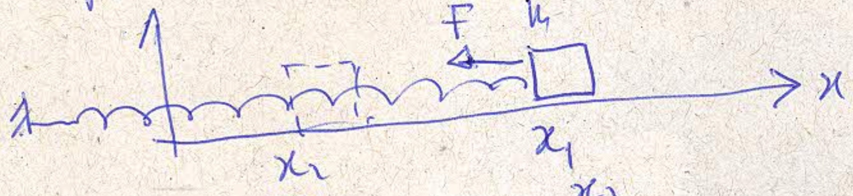
<u>Exemplo</u>: Trabalho realizado por uma mola

A força exercida por uma mola esticada de uma distância <u>x</u> de sua posição de equilíbrio é

$$\boxed{\vec{F} = -kx\,\hat{\imath}}$$



Esticando-se a mola até a posição $x = x_1$ e atando-a a um bloco de massa m, ao ser liberado a mola exerce uma força que procura deslocar a massa em direção a $x=0$. Ao deslocar a massa até $x = x_2$ $(x_2 < x_1)$ o trabalho realizado pela mola sobre a massa será:

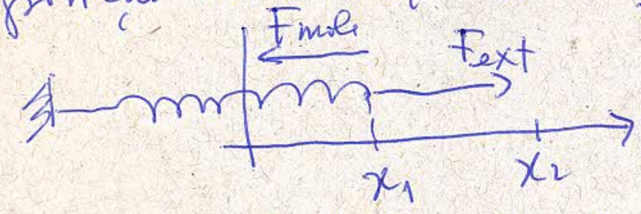


$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx = -k\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\Big|_{x_1}^{x_2}\right)$$

$$= -k\,\frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$ Como $x_2 < x_1$, o trabalho realizado pela mola será positivo.

Agora, vamos calcular qual o trabalho realizado para esticar a mola, de x_1 até x_2. Para isso, é necessário aplicar uma força externa F sobre a mola. Essa força necessariamente tem que ser igual à força exercida pela mola na posição x. (Porque?).

$F_{mola} = -kx \Rightarrow F_{ext} = kx$



$$W_{F_{ext}} = \int_{x_1}^{x_2} kx = \frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

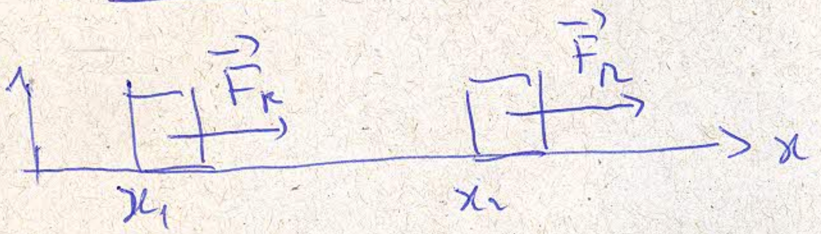
Note que esse trabalho tb é positivo

$$\boxed{W_{F_{ext}}^{(x_1 \to x_2)} = W_{F_{mola}}^{(x_2 \to x_1)}}$$

Como vimos, a 2ª lei de Newton, lei fundamental da mecânica, diz que a aceleração de uma massa $\underline{m}$ é igual à $\underline{\text{resultante}}$ das forças agindo sobre ela ÷ pela sua massa.

$$\vec{a} = \vec{F}_{res}/m$$

Vamos agora encontrar uma maneira alternativa para enunciar essa lei, em base na nova definição de $\underline{\text{trabalho}}$.



Por simplicidade, vamos considerar o caso de forças constantes. Seja $\vec{F}_R$ a resultante das forças agindo sobre a massa $\underline{m}$ que se desloca ao longo do eixo x. O trabalho realizado por $\vec{F}_R$ é dado por:

$$W_{res} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_R \cdot d\vec{r} = \vec{F}_R \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (\text{p/ } \vec{F}_R \text{ constante})$$
$$= \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r}$$

mas
$$\vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r} = m\vec{a} \cdot \Delta\vec{r}$$
. Com $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ (pois $\vec{a}$ = cte)

$$W_{res} = m\vec{a} \cdot \Delta\vec{r} = m\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \cdot \Delta\vec{r} = m\,\Delta\vec{v} \cdot \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = m\,\Delta\vec{v} \cdot \langle\vec{v}\rangle$$

por definição: $\langle\vec{v}\rangle = \dfrac{\vec{v}_2 + \vec{v}_1}{2}$ e $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

Portanto,

$$W_{R} = m\,\overrightarrow{\Delta V}\cdot\langle\vec{V}\rangle = m(\vec{V}_2-\vec{V}_1)\cdot\frac{(\vec{V}_1+\vec{V}_2)}{2}$$

$$\boxed{W_{R} = \frac{m}{2}(V_2^2-V_1^2)}$$

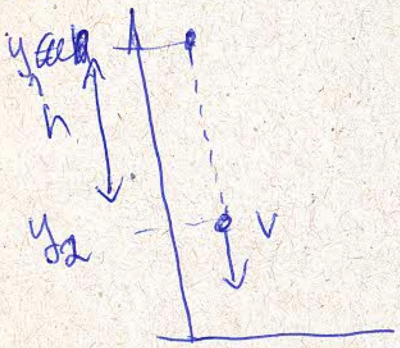
A grandeza $\frac{1}{2}m.V^2$ é chamada <u>Energia Cinética</u> de uma partícula de massa m e velocidade $\underline{v}$.

Portanto, podemos enunciar:

"O trabalho realizado pela ~~da~~ <u>força resultante</u> sobre uma <u>partícula</u> é igual à <u>variação</u> de sua energia cinética". (<u>Teorema Trabalho-Energia</u>)

Embora nossa derivação do teorema tenha sido feita com base em uma força resultante constante, ele é válido também para o caso de forças variáveis.

<u>Exemplo</u>: Trabalho realizado pela força gravitacional: Massa m salta do repouso, de uma altura h.



Como $\vec{F}_R = -m\vec{g}$, $W_{y_1-y_2} = \int_{y_1}^{y_2} -mg\,dy$

$$= -mg(y_2-y_1) = mgh - mgy_1$$

$$\boxed{W = mgy_2 - mgy_1}$$

se $y_1=0$, $W = mgh$

e posição na posição y_1 a velocidade da partícula é: $v = -gt_1$, $y_2 = y_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$

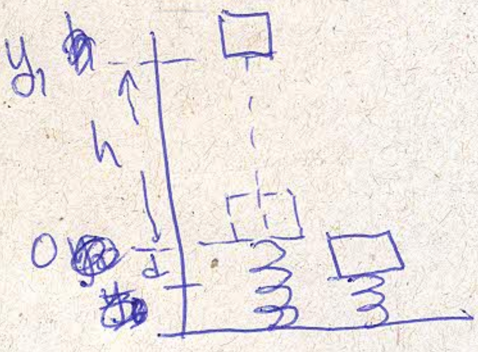
$t_1 = -\frac{v}{g}$ $\quad y_2 = y_1 - \frac{1}{2} g \frac{v^2}{g^2}$

$y_1 - y_2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} \Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = g(h - y_2)$

ou $\frac{1}{2} m v^2 = mg(y_1 - y_2)$

Como $v_i = 0$, $\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \boxed{\Delta E_c = W_{res.}}$

~~Trabalho~~ Partícula caindo sobre uma mola



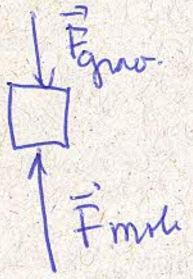
na posição y_2: $E_c = \frac{1}{2} m v^2 =$

$= mg(y_1 - \cancel{y_2})$

$= mgh$

depois mola é comprimida de 0 a $-y$

~~$\Delta y = (y_3 - y_2)$~~



$W_{gr} = \cancel{mgd}\ mgd > 0$

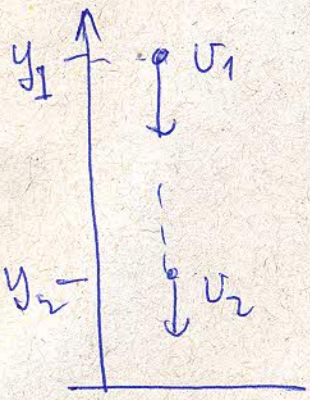
$W_{mola} = -\frac{1}{2} k d^2 \ (< 0)$

$\Delta E_c = -\frac{1}{2} m v^2 = -mgh$

$-\frac{1}{2} k d^2 + mgd = -mgh$

$k d^2 - 2mgd - 2mgh = 0$

$d = \frac{2mg \pm \sqrt{4m^2 g^2 + 8kmgh}}{2k}$

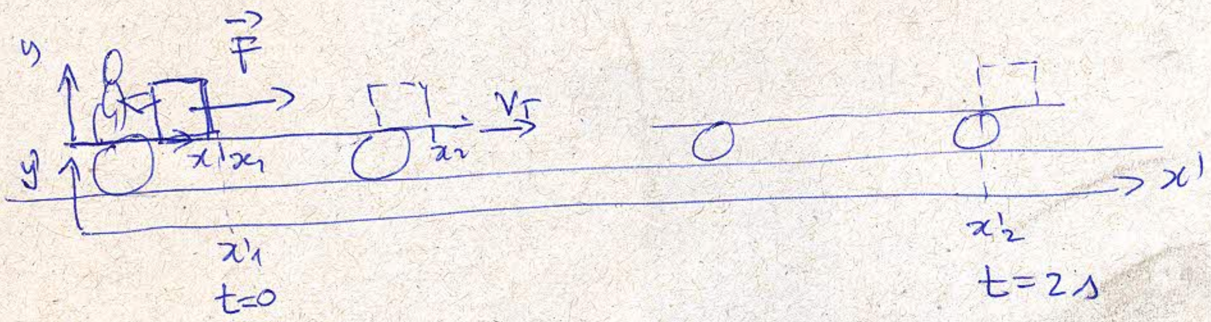


age somente força gravitacional
(= F resultante)

$$mg(y_2-y_1) = \frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)$$

$$\underbrace{2g(y_2-y_1) = (v_2^2-v_1^2)}_{\text{Torricelli}}$$

Trabalho no movimento Relativo



$V_T = 10\ m/s$
$F = 10N$
$m = 2kg$

dentro do trem $a = F/m = 5\ m/s$

$\Delta x = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2^2 = 10m$

$W_T = 10\times 10 = \underline{100J}$

$v = a.t = 5.2 = 10\ m/s$

$\Delta E_c = \frac{1}{2}.2.10^2 - 0 = \underline{100J}$

Na Plataforma

$\Delta x = 10.2 + \frac{1}{2}5.2^2$

$= 20 + 10 = 30\ m$

$W_P = 10\times 30 = \underline{300J}$

$v = 10 + 5.2 = 20\ m/s$

$\Delta E_c = \frac{1}{2}.2.20^2 - \frac{1}{2}.2.10^2 =$

$= 400 - 100 = \underline{300J}$