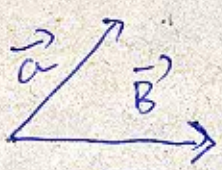


Vetores

Algumas grandezas na física, como massa, carga elétrica, Temperatura, podem ser caracterizadas por um número e são chamadas grandezas escalares. Já para grandezas como Força, velocidade, etc., é preciso especificar a intensidade (módulo) a direção e o sentido. Pode-se verificar que as entidades matemáticas conhecidas como vetores (com melhor, que a álgebra vetorial) descrevem corretamente essas propriedades.

Não vamos aqui enunciar em detalhes as propriedades dos vetores, mas apenas ressaltar alguns aspectos básicos!

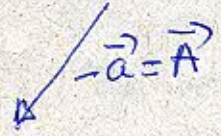
- Vetores são representados graficamente por uma seta, cujo comprimento indica o módulo do vetor, o segmento de seta de seta a sua direção e a "ponta" de seta o sentido do vetor. Vamos normalmente indicar um vetor por uma letra com uma seta sobre ela: \vec{a} , \vec{B} , etc., embora haja muitas outras notações alternativas.



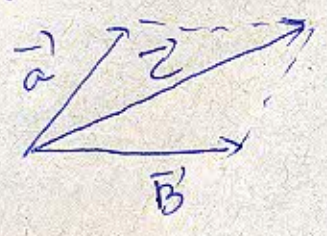
- Qualquer outra seta que seja paralela a \vec{a} , tenha o mesmo comprimento e sentido representam o mesmo vetor \vec{a} .



O vetor $\vec{A} \equiv -\vec{a}$ é representado por uma seta de mesma direção e mesmo comprimento que \vec{a} , mas com o sentido invertido.

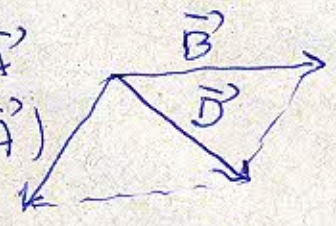


A soma de dois vetores ($\vec{C} = \vec{a} + \vec{B}$) é indicada (e realizada) graficamente, usando a "regra do paralelogramo":

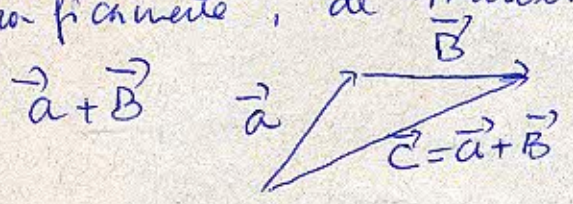


A subtração é feita de modo análogo, somando-se $-\vec{a}$ ($= \vec{A}$) em \vec{B}

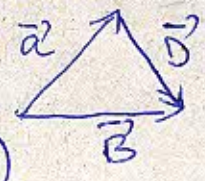
$$\vec{D} = \vec{B} - \vec{a} = \vec{B} + \vec{A} \quad (-\vec{a} = \vec{A})$$



A soma e a diferença podem ser expressas graficamente, de maneira equivalente como:



$$\vec{D} = \vec{B} - \vec{a} \quad (\text{ou } \vec{B} = \vec{a} + \vec{D})$$



- Na física, as grandezas vetoriais têm dimensões (unidades), como m/s para a velocidade, N para forças etc. Podemos sempre definir um vetor adimensional e de módulo unitário, p. ex. \vec{i} , com uma dada direção e um dado sentido:

$$\vec{i} \quad |\vec{i}| = 1$$

Então, qualquer outro vetor que tenha a mesma direção e o mesmo sentido de \vec{i} pode ser escrito como:

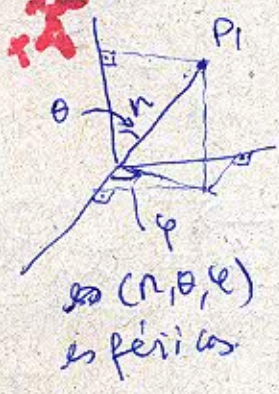
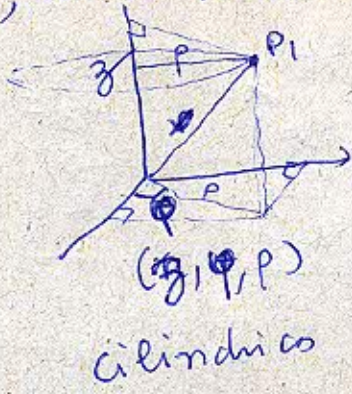
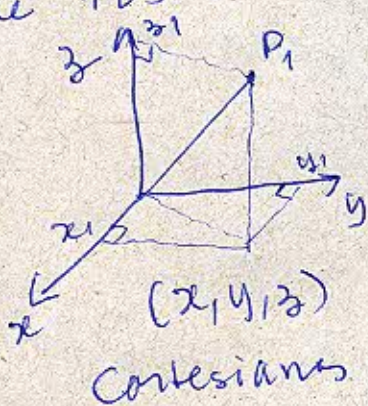
$$\vec{R} = R\vec{i}, \text{ onde } R \text{ é o módulo do}$$

vetor \vec{R} (um número, em as dimensões da grandeza física representada por \vec{R}). Por exemplo, uma força \vec{F} de intensidade 9,78 N na direção e sentido do vetor unitário \vec{i} , pode ser escrita como: $\vec{F} = 9,78\vec{i}$. Note que $|\vec{F}| = 9,78 \text{ N}$ (no caso da força se expressa em Newtons)

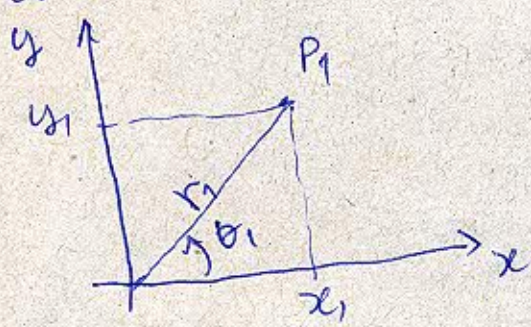
- Para não haver dúvidas sobre o módulo dos vetores unitários (vetores com módulo = 1) o representamos de uma maneira particular: \hat{i} ao invés de \vec{i} !

Representação de Vetores em Sistemas de Coordenadas. (3)

Para se representar pontos, segmentos e objetos no espaço físico (comprimento, largura, altura) ou espaço abstrato (velocidade na horizontal, velocidade na vertical, p.ex), ~~se~~ usamos sistemas de eixos ou coordenadas. Há vários sistemas de coordenadas comumente empregados na física, como o esférico, o cilíndrico e o chamado cartesiano, construído de três retas orientadas, uma perpendicular à outra.

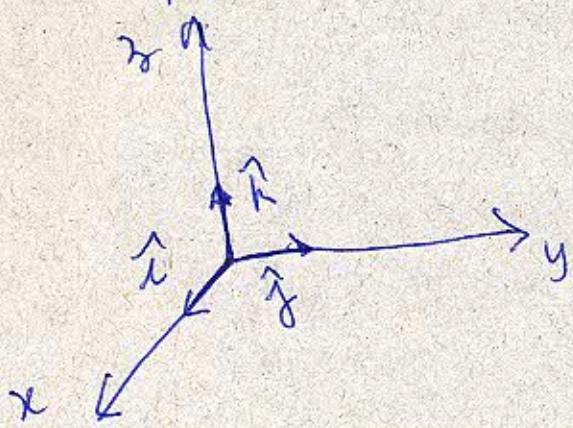


- No caso da representação ~~de~~ em um plano, as coordenadas esféricas e cilíndricas coincidem.



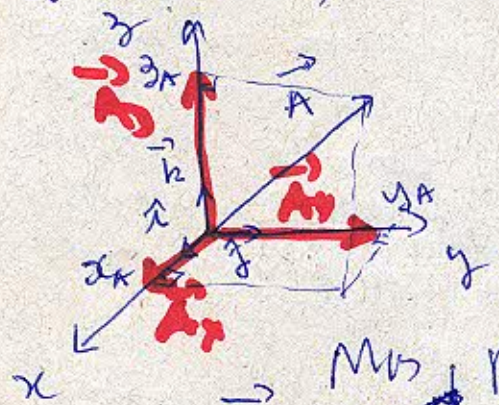
Usaremos ~~por~~ predominantemente neste curso as coordenadas cartesianas, mas em alguns casos as coordenadas polares, que correspondem às cilíndricas e esféricas no plano.

Representação de vetores em coordenadas cartesianas.



- Definimos os vetores unitários \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , nas direções dos eixos x , y e z , respectivamente.

Então, qualquer vetor \vec{A} no espaço (x, y, z) pode ser representado por uma seta, com origem na origem do sistema de coordenadas, como:

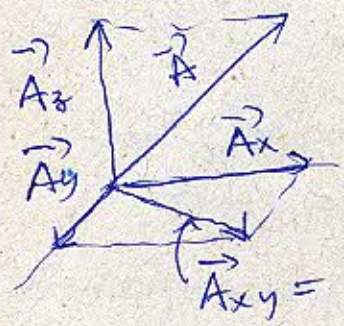


Pode-se facilmente verificar que o vetor \vec{A} pode ser escrito como a soma de três vetores:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

Mas podemos escrever: $\vec{A}_x = x_A \hat{i}$, $\vec{A}_y = y_A \hat{j}$ e $\vec{A}_z = z_A \hat{k}$ e portanto,

$$\boxed{\vec{A} = x_A \hat{i} + y_A \hat{j} + z_A \hat{k}}$$



$$\vec{A} = \vec{A}_z + \vec{A}_{xy} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$|\vec{A}_{xy}|^2 = |\vec{A}_x|^2 + |\vec{A}_y|^2 = A_x^2 + A_y^2$$

$$|\vec{A}|^2 = |\vec{A}_{xy}|^2 + |\vec{A}_z|^2$$

$$|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\boxed{\text{ou } |\vec{A}|^2 = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

Soma de vetores: $\vec{C} = \vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{a} = x_a \hat{i} + y_a \hat{j} + z_a \hat{k} ; \vec{b} = x_b \hat{i} + y_b \hat{j} + z_b \hat{k}$$

$$\vec{C} = \vec{a} + \vec{b} = x_c \hat{i} + y_c \hat{j} + z_c \hat{k} = (x_a + x_b) \hat{i} +$$

$$(y_a + y_b) \hat{j} + (z_a + z_b) \hat{k} \text{ e portanto,}$$

~~$x_c = x_a + x_b$~~

$$\begin{aligned} x_c &= x_a + x_b \\ y_c &= y_a + y_b \\ z_c &= z_a + z_b \end{aligned}$$

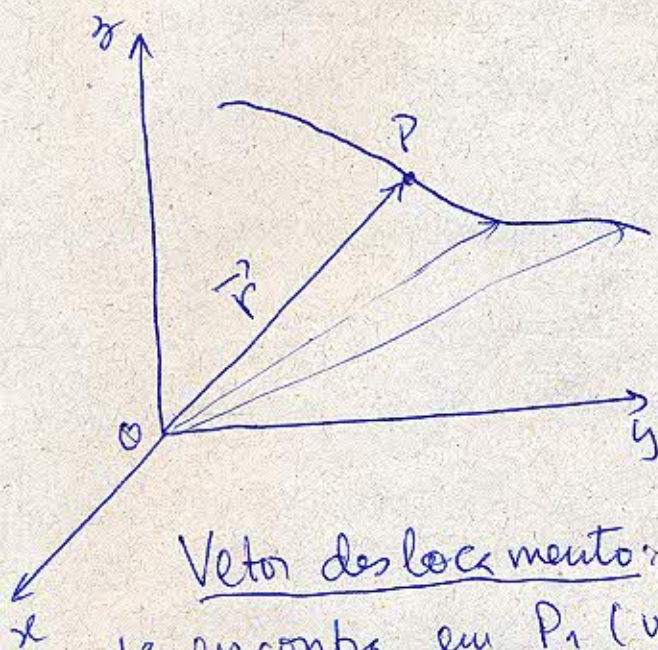
Cinematica 3-D

(5)

Vetor Posição: Origem: - na origem do sistema de coordenadas.
(de uma partícula)

extremidade: - na posição onde se encontra a partícula (ponto P)

Trajetória: conjunto dos pontos variáveis pela extremidade do veti \vec{r} ao longo do tempo.



Vetor deslocamento: Se no instante t_1 a partícula se encontra em P_1 (vetor posição \vec{r}_1) e em t_2 se encontra em P_2 (vetor posição \vec{r}_2), definimos o vetor deslocamento $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

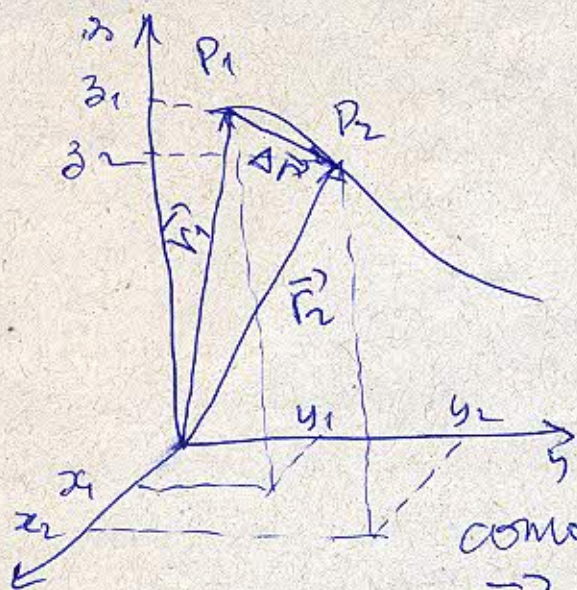
- Definimos velocidade média da partícula entre os instantes t_1 e t_2 como:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

e a velocidade instantânea

como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$



Escrevendo:

$$\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k} \text{ e } \vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k},$$

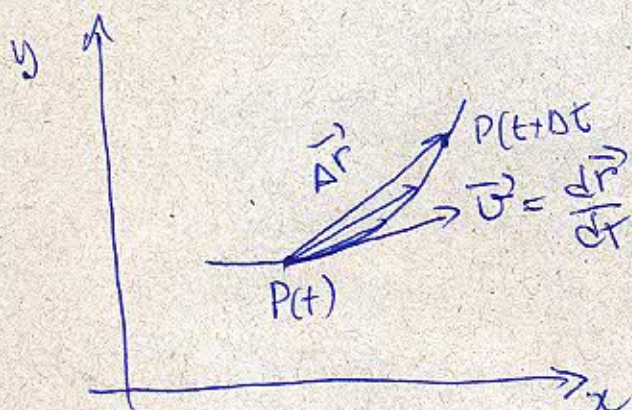
$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j} + (z_2 - z_1) \hat{k} \text{ ou}$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k} \text{ e portanto,}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k} \right)$$

$$\text{mas } \vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \text{ e portanto:}$$

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$$



Note que à medida em que $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta \vec{r}$ vai se aproximando cada vez mais da tangente à curva.

"A velocidade é sempre tangente à trajetória"

Aceleração. De maneira análoga, podemos definir a aceleração média entre t_1 e t_2 como:

$$\vec{a}_{m} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

e a aceleração instantânea como:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

Escrevendo:

$$\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k} \text{ e } \vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k},$$

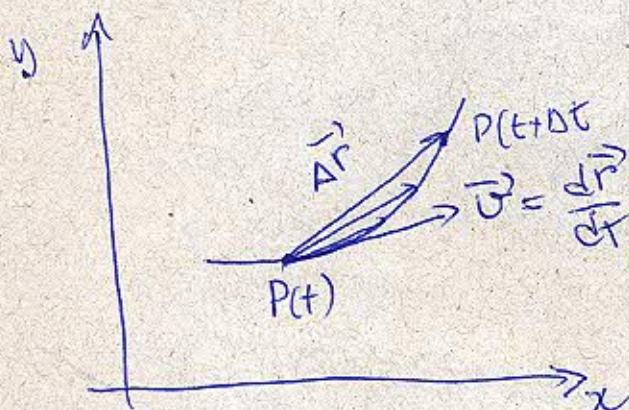
$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j} + (z_2 - z_1) \hat{k} \text{ ou}$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k} \text{ e portanto,}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k} \right)$$

mas $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$ e portanto:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$$



Note que à medida em que $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta \vec{r}$ vai se aproximando cada vez mais da tangente à curva.

"A velocidade é sempre tangente à trajetória"

Aceleração. De maneira análoga, podemos definir

a aceleração média ~~entre~~ entre t_1 e t_2 como:

$$\vec{a}_{m} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

e a aceleração instantânea como:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$