Movimento com Aceleração Constante

Vimos que num movimento com aceleração constante, x varia com o tempo, segundo a expressão:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

onde

$x(0) = x_0$, é a posição inicial

da expressão acima, podemos obter aquela p/ a velocidade em função do tempo, $v(t)$

por definição, $v(t) = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{d(v_0 t)}{dt} + \frac{d(\frac{1}{2}at^2)}{dt}$$

Sabemos que se $x(t) = \alpha t^n \Rightarrow \frac{dx}{dt} = n \alpha x^{n-1}$

Como $x_0 = x_0 . t^0 \Rightarrow \frac{dx_0}{dt} = 0 . x_0 . t^{-1} = 0$

$$\frac{d(v_0 t^1)}{dt} = 1 . v_0 t^{1-1} = v_0 \quad e$$

$$\frac{d(\frac{1}{2}at^2)}{dt} = \frac{1}{2} a . 2 . t^{2-1} = at$$

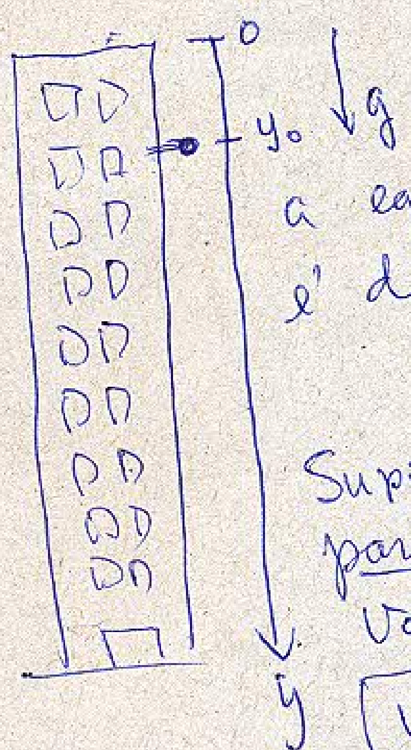
portanto, $v(t) = v_0 + at$. e ~~p~~ então vemos que v_0 corresponde ao valor de v para $t = 0$ $(v(0))$

Também, por definição, $a(t) = \frac{dv}{dt}$

Com $v(t) = v_0 + at$, $\frac{dv}{dt} = a(t) = a$ (constante!)

Queda livre

Um exemplo bastante comum de movimento com aceleração constante, é o da queda livre sob ação da gravidade. Por "livre", queremos dizer que não há outras forças atuando no corpo, como p. ex. a resistência do ar. Vamos imaginar uma bola sendo largada à partir do repouso, da janela de um apartamento, no alto de um edifício. O movimento de queda será vertical, ou seja, uni-dimensional. Vamos usar um eixo vertical y para medir as distâncias, com origem no topo do edifício e orientado para baixo



Neste caso, a aceleração g também é para baixo (g acelera a bola) e a equação de y em função do tempo é dada por:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{2} g t^2$$

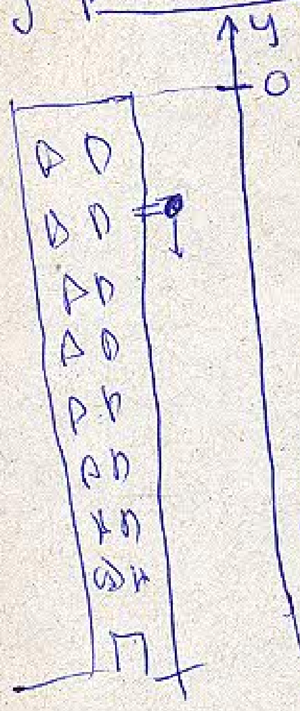
Supondo que a bola seja lançada para baixo, com velocidade inicial v_0, então a equação p/ $y(t)$ será

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2}$$

$y_0 > 0$
$v_0 > 0$
$a = g > 0$

Note que para esse dado problema, podemos ter diferentes equações para $y(t)$, dependendo do sistema de referência (eixo y) escolhido.

P. ex., poderíamos ter escolhido um eixo y com origem no mesmo ponto (topo do edifício) mas com orientação oposta, ou seja valores ⊕ de y para cima.



Neste caso, a equação de y(t),
$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$
terá valores negativos para x_0, v_0 e a $(= -g)$

Se a velocidade inicial é para cima (positiva no 2º sistema e negativa no 1º) o problema é conhecido como lançamento vertical. De qualquer forma, a aceleração é sempre constante e para baixo, de modo que a equação permanece a mesma.

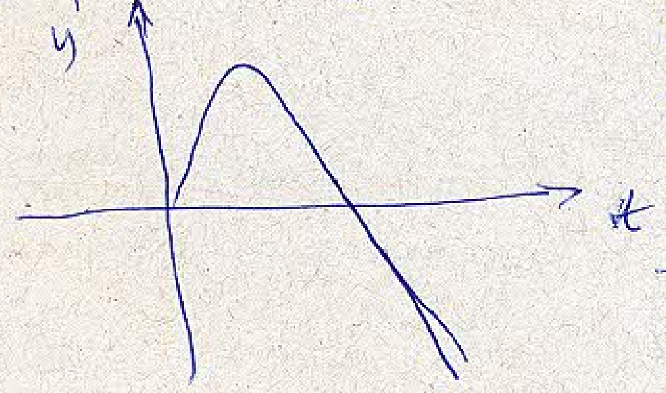
$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 .$$

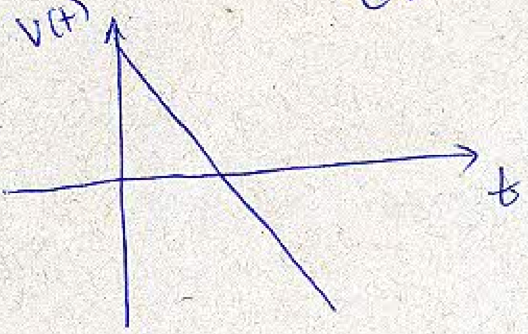
Vamos escolher um sistema como o do 2º tipo, mas com origem no ponto em que a bola foi lançada para cima, de modo que $y_0 = 0$.

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (v_0 > 0)$$

O gráfico de $y(t)$ é o de uma parábola,

como $v(t) = \frac{dy}{dt} = v_0 - gt$





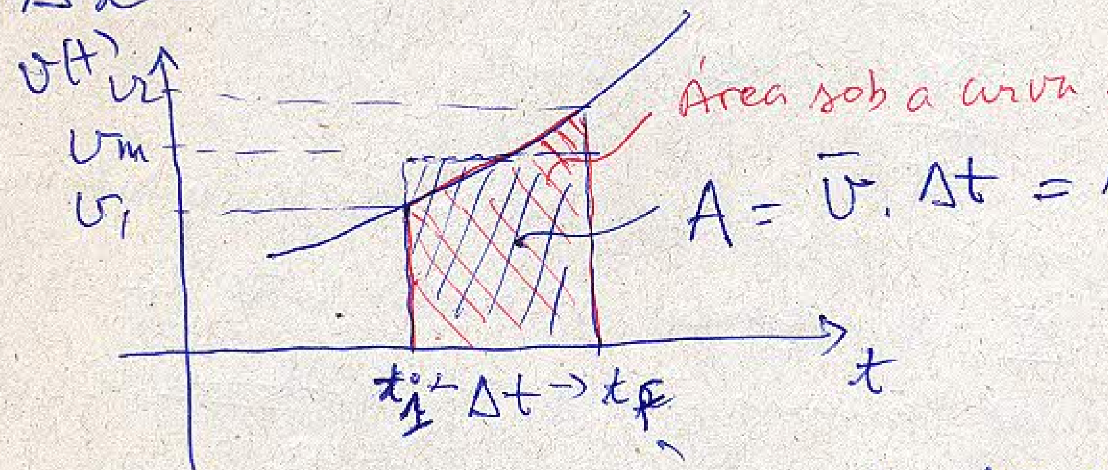
Integral de uma Função

Vimos, que dada uma função $x(t)$, podemos obter a função $v(t)$ aplicando a derivada a x em relação a t. P. ex. se $x(t) = 5t^3 - 3t$ então

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 15t^2 - 3.$$

Mas e se conhecermos a função $v(t)$, como poderíamos determinar $x(t)$? P. ex. se $v(t) = 7t^{2.5} - 3t$ como seria $x(t)$. Para encontrar $x(t)$, devemos fazer a "operação inversa" da derivada, ou seja a integral de $v(t)$ em relação a t.

Sabemos que $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ e portanto, $\Delta x = \bar{v} \cdot \Delta t$. Graficamente, temos

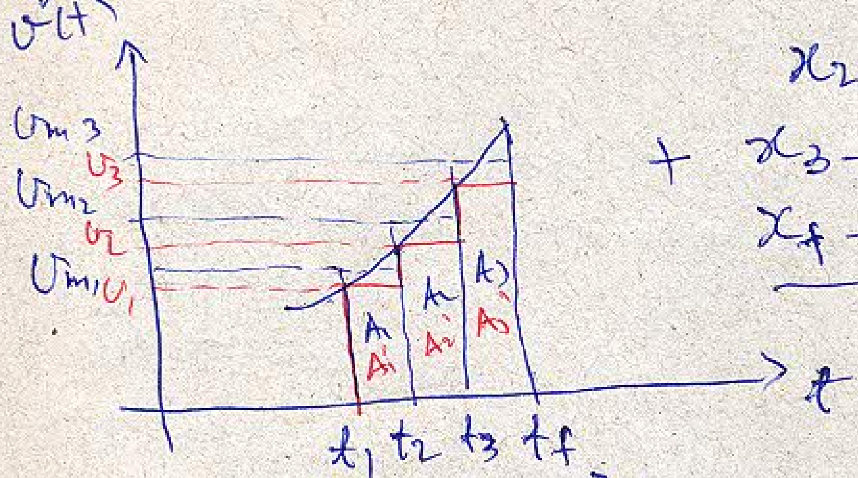


$$A = \bar{v} \cdot \Delta t = \Delta x$$

Portanto $x_f - x_i$ = Área ~~sob~~ do retângulo de lado Δt e altura $= \bar{v}$.

Note que a área do retangulo é aprox. igual à área sob a curva $v(t)$.

Vamos agora, pegar o ~~inte~~ intervalo de tempo entre t_f e t_1 e dividir em n partes iguais. P. ex. p/ $n=3$, $\Delta t = (t_f - t_1)/3$ e



$$x_2 - x_1 = v_{m1}(t_2 - t_1) = v_{m1}\Delta t$$
$$+ \quad x_3 - x_2 = v_{m2}(t_3 - t_2) = v_{m2}\Delta t$$
$$x_f - x_3 = v_{m3}(t_f - t_3) = v_{m3}\Delta t$$
$$x_f - x_1 = v_{m1}\Delta t + v_{m2}\Delta t + v_{m3}\Delta t$$

ou $$x_f - x_1 = \sum_{n=1}^{3} v_{mi}\Delta t = A_1 + A_2 + A_3.$$

$A_1 + A_2 + A_3$ é ainda mais próximo ao valor de área sob a curva $v(t)$. Note também que podemos usar a expressão aproximada:

$$x_f - x_1 \simeq \sum_{i=1}^{3} v_i \Delta t \quad \text{onde } v_i = v(t_i)$$

é uma aproximação p/ v_{mi}. Se aumentarmos o valor de n dividindo o trecho entre t_1 e t_f em um grande número de partes, ~~cada vez~~ v_i se torna cada vez mais próximo de v_{mi} e a soma das áreas mais próxima do valor correto da área sob a curva.

(3)

No limite em que $n \to \infty$ (ou que Δt, $\Delta t = (t_f - t_1)/n$ tende para zero. a expressão é exata:

$$\boxed{x_f - x_1 = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta t \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t}$$

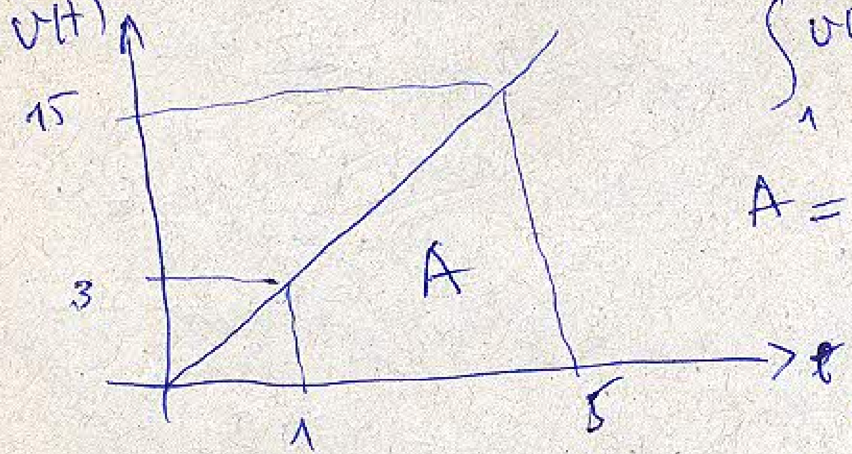
O limite definido na expressão acima se chama integral da função $v(t)$ entre t_1 e t_f:

$$\boxed{\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta t \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t = \int_{t_1}^{t_f} v(t)\,dt}$$

e portanto

$$x_f - x_1 = \int_{t_1}^{t_f} v(t)\,dt = \text{área sob a curva } v(t) \text{ entre } t_1 \text{ e } t_f.$$

Seja $v(t) = 3t$. Qual a integral de $v(t)$ entre $t = 1$ e $t = 5$ s?



$$\int_1^5 v(t)\,dt = \int_1^5 3t\,dt = A$$

$$A = \frac{(15+3)}{2} \cdot 5 = 45$$

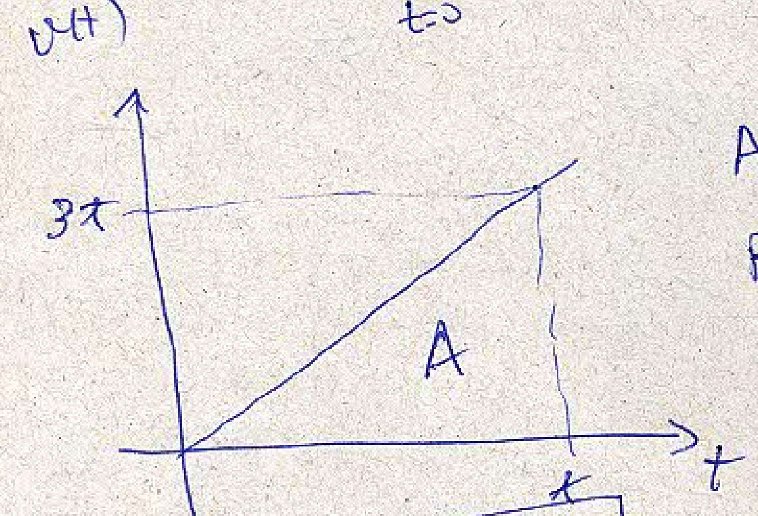
se v é dado em m/s e t em s, A será dado em m!

portanto:

$$x_2 - x_1 = x(5) - x(1) = 45m.$$

E agora, se perguntarmos. Qual a integral de $v(t) = 3t$ entre $t=0$ e um instante qualquer t?

$$x(t) - x(0) = \int_{t=0}^{t=t} v(t)\,dt = \int_0^t 3t\,dt$$



$$A = t \cdot \frac{3t}{2} = \frac{3t^2}{2}$$

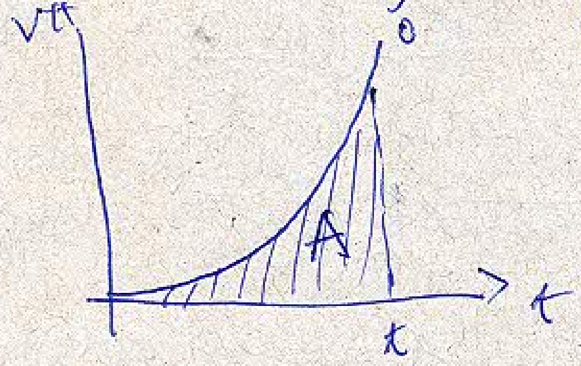
Portanto,

$$\int_0^t 3t\,dt = \frac{3}{2}t^2$$

e $\boxed{x(t) - x(0) = \frac{3}{2}t^2}$ ou $\boxed{x(t) = x(0) + \frac{3}{2}t^2}$

Este caso foi fácil, pois sabemos calcular a área de um triângulo. Já se $v(t) = at^3$ como podemos calcular a área entre $t=0$ e t?

$$x(t) - x(0) = \int_0^t at^3\,dt = ? = \text{área sob a curva}$$



Mas vimos que se $v(t) = 3t$

$\Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{3}{2}t^2$

e já sabíamos que

$$\frac{dx}{dt} = 0 + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)t^{2-1} = 3t$$

Também podemos procurar qual a função $x(t)$, cuja derivada é at^3:
A resposta é $x(t) = \frac{1}{4} a t^4$. Note que se somarmos uma constante arbitrária x_0 ~~xxxx~~ a essa função a derivada continua a mesma: Portanto a resposta mais geral é:

$$x(t) = x_0 + \frac{a}{4} t^4$$

e então podemos dizer que:

$$x(t) - x_0 = \int_0^t a t^3 dt = \frac{a}{4} t^4.$$

Então já podemos calcular a integral de $a.t^3$. Sabemos:

$$\int_0^t a t . dt = \frac{a}{2} t^2 \; ; \; \int_0^t a t^3 dt = \frac{a}{4} t^4.$$

Não é difícil obter a regra geral:

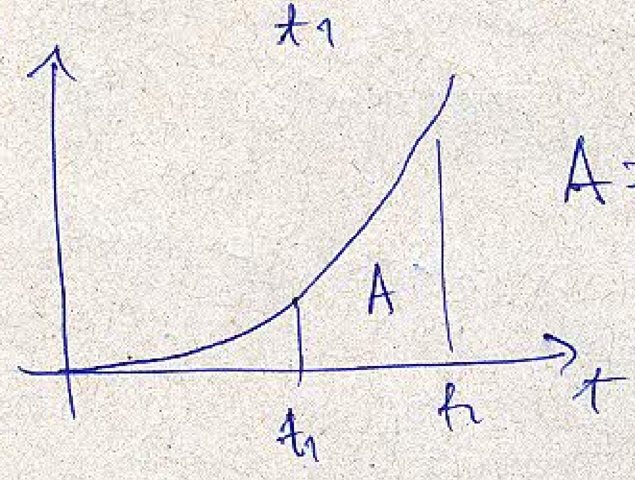
$$\boxed{\int_0^t a . t^n dt = \frac{a}{n+1} t^{n+1}}$$

Se $v(t) = a . t^n$ então

$$x(t) - x(0) = \int_0^t a t^n . dt = \frac{a}{n+1} t^{n+1}$$

No caso da integral entre dois instants t_1 e t_2, pode-se mostrar que:

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a t^n \, dt = \frac{a}{n+1}\left(t_2^{n+1} - t_1^{n+1}\right) =$$ Área sob a curva $v(t) = at^n$ entre t_1 e t_2



$$A = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_1} a t^n \, dt = \frac{a}{n+1}\left(t_2^{n+1} - t_1^{n+1}\right)$$