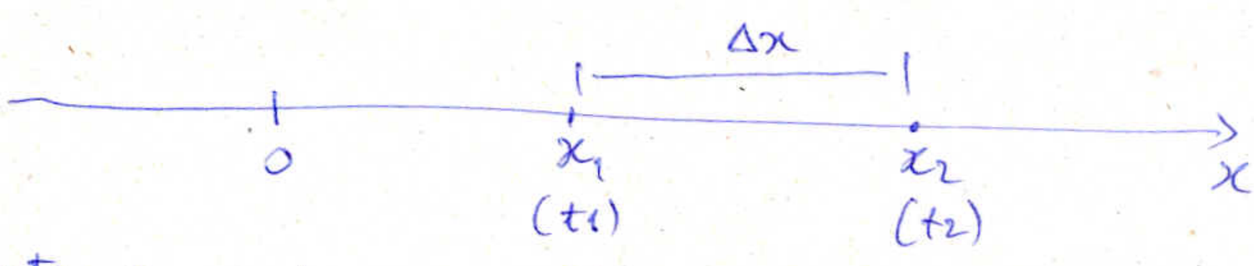
Cinemática Unidimensional

Vamos agora passar à descrição do movimento, partindo do caso mais simples, o movimento em uma linha reta (unidimensional). Para isso, é necessário o uso de um sistema de referência: uma reta orientada, com uma escala de distâncias e uma origem (0):

Como exemplos, estudaremos o movimento de um carro, de uma bala, etc. Mas esses serão objetos idealizados: estaremos sempre descrevendo o movimento de um ponto material. O primeiro conceito importante que vamos introduzir é o de deslocamento.

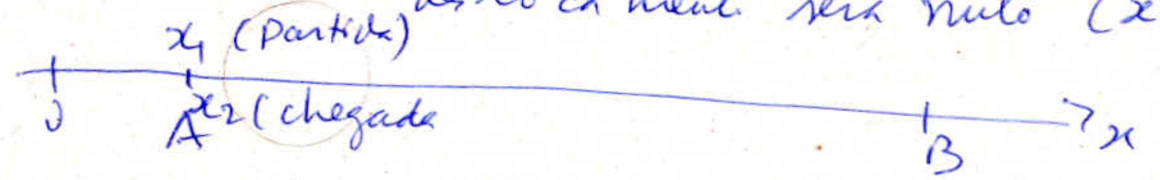
— Se o objeto estava na posição x_1 no instante t_1 e em x_2 no instante t_2, então o deslocamento Δx no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$



Note que Δx será >0 se $x_2 > x_1$ e negativo se $x_2 < x_1$ (ou x_2 à esquerda de x_1, para um eixo orientado para a direita, como o da figura.

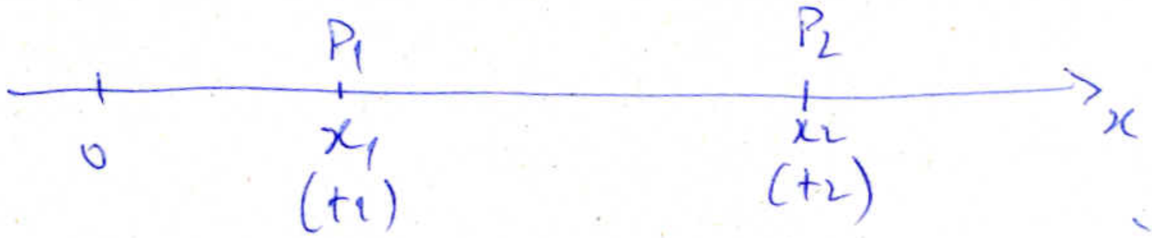
- Note também que deslocamento é um conceito (2) diferente do de distância percorrida. Se formos da cidade A até a cidade B, distante 32 km de A e depois retornarmos, a distância percorrida será 64 km mas o deslocamento será nulo ($x_2 = x_1$)



$\Delta x = 0$

- Definimos velocidade média de um móvel, V_m que se desloca desde o ponto P_1 (coordenada x_1) para P_2 (coordenada x_2) como:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$, onde Δx é o deslocamento, $(x_2 - x_1)$ e Δt o intervalo de tempo $(t_2 - t_1)$



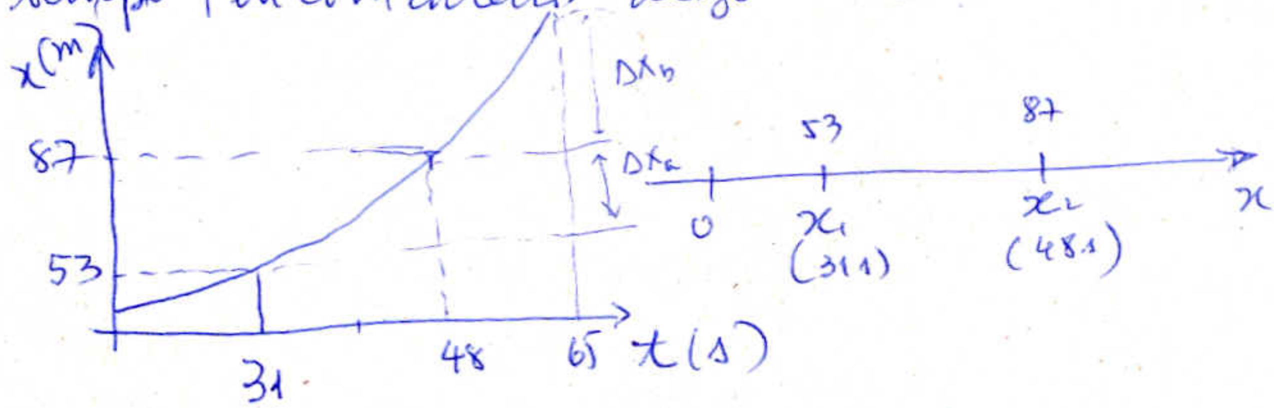
Note que $\Delta t = t_2 - t_1$ sempre corresponde à diferença entre o instante final (t_2) e o inicial (t_1), sendo portanto sempre positivo.

- P. ex. uma bola é lançada num plano, em uma dada direção. Passa pelo ponto $x_1 = 353m$ no instante $t_1 = 31s$ e depois por $x_2 = 387m$ no instante $t_2 = 48s$. A velocidade média da bola entre $t_1 = 31$ e $t_2 = 48s$ será:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{387 - 353\,(m)}{48 - 31\,(s)} = \frac{34}{17} = 2\,\frac{m}{s}$$

- Note que ao dizermos uma certa velocidade média devemos <u>sempre</u> especificar os instantes entre os quais ela foi determinada. A velocidade média dessa bola entre os instantes 31 e 33 s, p.ex. pode ser maior (ou menor) que a velocidade média entre os instantes 31 e 48 s.

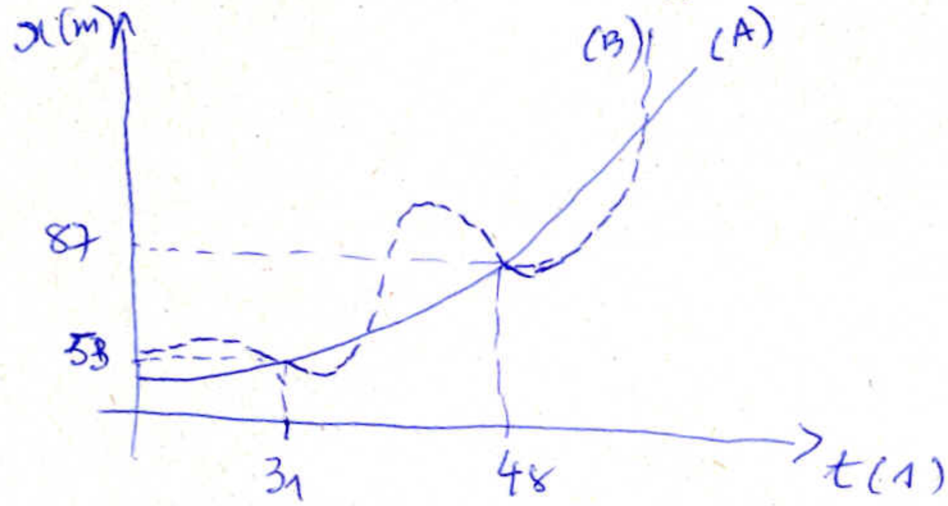
Vamos supor que a bola em questão tenha sua velocidade aumentando, à medida que passa o tempo. Poderia ser o caso, p.ex. que o plano não é horizontal, mas tenha uma pequena inclinação. Se fizermos o gráfico da posição x <u>em função</u> do tempo, encontraremos algo como:



- Cuidado p/ não interpretar incorretamente este gráfico. Embora a linha mostrada não seja uma reta, o <u>movimento continua sendo retilíneo</u> (na direção x!). O gráfico <u>não é</u> o de uma trajetória, mas apenas mostra como a posição <u>x</u> varia com o tempo.

- Note que do gráfico, é fácil ver que a velocidade média entre 48 e 65 s ($\Delta t = 17$ s), ao qual corresponde o deslocamento Δx_b é <u>maior</u> que a velocidade média entre 31 e 48 s ($\Delta t = 17$ s), com deslocamento $\Delta x_a < \Delta x_b$.

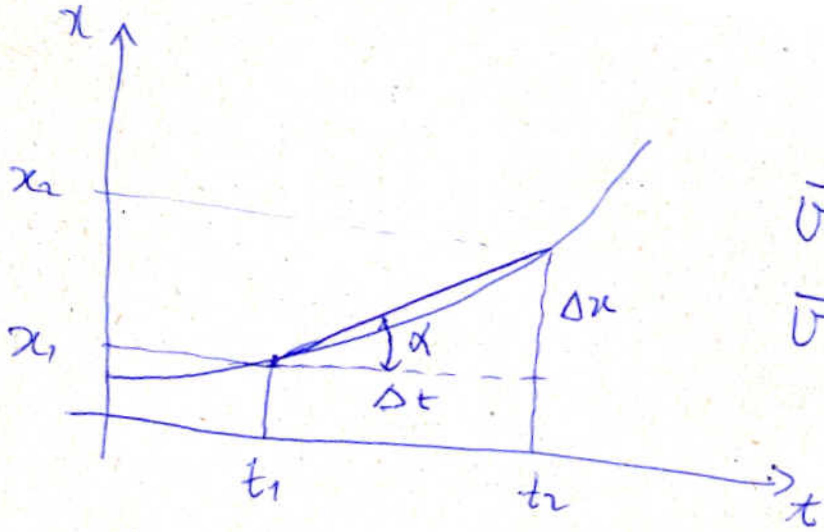
Vamos ver um outro movimento, que tem a mesma velocidade média que a do caso anterior, entre os mesmos 31 e 48 s:



Note que embora a curva da ~~da~~ posição em função do tempo do movimento (B) seja muito diferente da de (A), os dois móveis passam pelas mesmas posições nos instantes t_1 e t_2.
Portanto ambos têm o mesmo deslocamento $\Delta x = 87 - 53 = 34$ m nesse mesmo intervalo de tempo $\Delta t = 48 - 31 = 17$ s.

Isso mostra que o conceito de velocidade média não é muito útil para descrever detalhes do movimento. É claro que poderíamos utilizar intervalos de tempo menores (1 s, 0,1 s) mas sempre pode haver diferenças significativas entre as velocidades dos dois corpos, dependendo do intervalo escolhido.

Um conceito mais interessante seria o de velocidade instantânea: Qual a velocidade do móvel no instante $t = 31$ s?



$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = tg\,\alpha$

$\bar{v}$ = inclinação média da curva, entre t_1 e t_2.

- Para determinar a velocidade no instante t_1 (velocidade instantânea) vamos calcular a velocidade média entre t_1 e t_2, fazendo t_2 cada vez menor, se aproximando de t_1. Chamamos isso de calcular o limite do valor de $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$, para t_2 tendendo a t_1. Escreve-se

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad \text{ou} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Assim, definimos velocidade instantânea, v, como

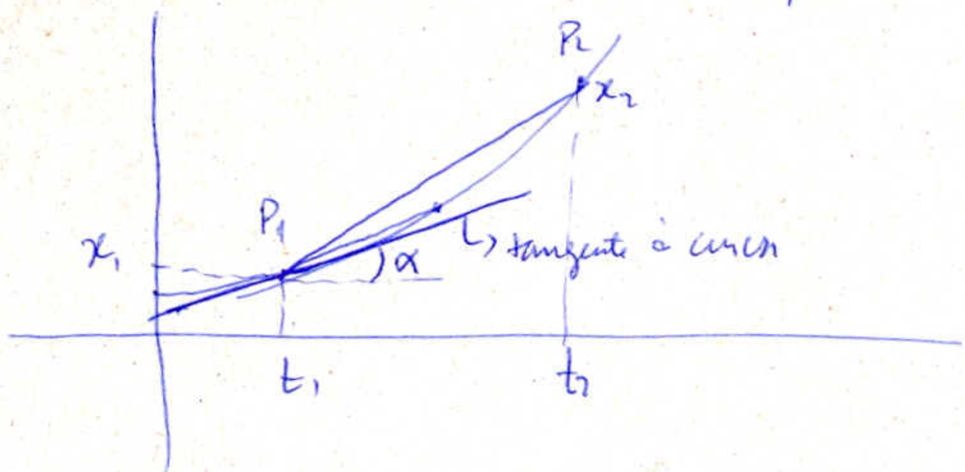
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

e esse limite é representado com $\frac{dx}{dt}$ (o d representando a variação Δ, no limite $\to 0$). e é chamado um diferencial de x (dx) e diferencial de tempo dt. dx/dt diz-se a derivada de x em relação ao tempo).

A notação mais adequada para a derivada de x em relação ao tempo é:

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}$$

É fácil perceber, que à medida que Δt vai diminuindo, a inclinação da reta passando por $P_1\ (x_1, t_1)$ e $P_2\ (x_2, t_2)$ tende para a reta tangente à curva $x(t)$ no ponto $t = t_1$:



Portanto: a derivada $\frac{dx}{dt}$ ~~no p~~ em $t = t_1$ corresponde à inclinação da reta tangente:

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = \operatorname{tg} \alpha}$$

Para se calcular analiticamente a derivada de uma função $x(t)$ é necessário o conhecimento de limite de uma função. Esse assunto é visto em detalhes no curso de Cálculo I. Aqui veremos apenas alguns exemplos.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \left[f(x) = \frac{1}{x} \right]$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$. Aqui temos um problema. Fazendo-se o limite pela esquerda, i.e. começando com valores grandes negativos e se aproximando de zero $(-10, -9, -8, -7, \ldots)$ o valor de $\frac{1}{x}$ vai ficando cada vez mais negativo, tendendo a $-\infty$.

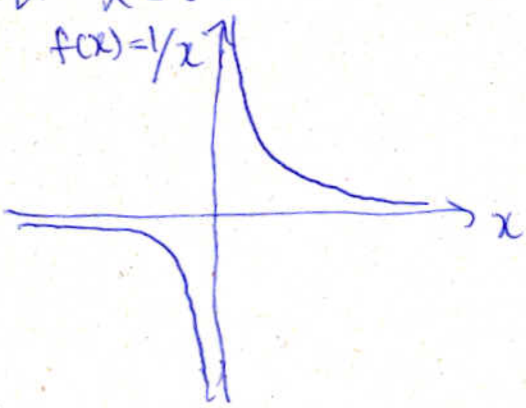
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (\text{esquerda})}} \frac{1}{x} = -\infty$$

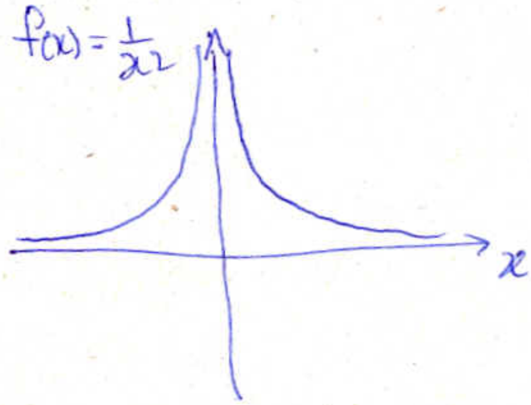
Já fazendo-se o limite pela direita, começando de valores grandes positivos e se aproximando de zero, a função $f(x) = \frac{1}{x}$ tende a $+\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (\text{direita})}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Nesse caso, dizemos que <u>não existe o limite</u> da função $\frac{1}{x}$ para $x = 0$.

Note que a função $\frac{1}{x^2}$ tem limite $(+\infty)$ para $x = 0$





$$\lim_{y \to 5} \frac{y^2 - 25}{y - 5}$$ note que $\lim_{y \to 5} y - 5 = 0$

e $\lim_{y \to 5} y^2 - 25 = 0$

portanto, <u>aparentemente</u> o resultado limite $\left(\frac{0}{0}\right)$ é indefinido. Este não é o caso, pois:

$$\lim_{y \to 5} \frac{y^2 - 25}{y - 5} = \lim_{y \to 5} \frac{(y+5)(y-5)}{y-5} = \lim_{y \to 5} y + 5 = 10$$

Embora tanto o numerador quanto o numerador tendam p/ zero quando $y \to 5$, a razão tende para um valor constante = 10.

Esse é o caso, da definição de velocidade instantânea.

$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Quando $\Delta t \to 0$ ~~a~~ o deslocamento Δx também tende para zero, mas a razão tende p/ uma constante (igual à inclinação da reta tangente à curva, no instante t).

$\lim_{x \to 0} \frac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2}$. Note que quando x fica muito pequeno (p.ex. 10^{-20})

$5x^3$ fica $<<$ $8x^2$ (5×10^{-60} e 8×10^{-40})

do mesmo modo, no denominador, $3x^4$ fica desprezível em comparação com $16x^2$. Portanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{8x^2}{-16x^2} = -\frac{1}{2}$$

Vamos agora pegar uma dada função, p.ex.

$x(t) = at^2 + bt + c$

qual a derivada, $\frac{dx}{dt}$ em $t = t_1$?

Sabemos que $\frac{dx}{dt} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ onde $x_1 = x(t_1)$
$x_2 = x(t_2)$

escrevendo $t_2 = t_1 + \Delta t$ e $x_2 = x(t_1 + \Delta t)$,

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_1+\Delta t) - x(t_1)}{(t_1+\Delta t) - t_1}$$

mas, para a função escolhida,

$$x(t_1+\Delta t) = a(t_1+\Delta t)^2 + b(t_1+\Delta t) + c$$

$$= a(t_1^2 + 2t_1\Delta t + \Delta t^2) + b(t_1+\Delta t) + c$$

$$= a(2t_1\Delta t + \Delta t^2) + b\Delta t + \underbrace{at_1^2 + bt_1 + c}_{x(t_1)}$$

e portanto, $x(t_1+\Delta t) - x(t_1) = a(2t_1\Delta t + \Delta t^2) + b\Delta t$ e

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(2t_1\Delta t + \Delta t^2) + b\Delta t}{\Delta t}$$

quando Δt é muito pequeno, Δt^2 é desprezível
em comparação com os outros termos do ~~dos~~ numerador.
e então

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 a t_1 \Delta t + b\Delta t}{\Delta t} = \boxed{2at_1 + b}$$

$\Rightarrow$ para um instante qualquer t;

$$\frac{dx}{dt} = 2at + b \qquad (x(t) = at^2 + bt + c)$$

Assim, podemos concluir, que

p/ $x(t) = a t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2at$

p/ $x(t) = bt$ $\frac{dx}{dt} = b$

p/ $x(t) = c$ $\frac{dx}{dt} = 0$

Pode-se facilmente verifica que:

p/ $x(t) = a x^n$ $\frac{dx}{dt} = n a x^{n-1}$

P. ex. qual a derivada da função $\cancel{x(t)=\sqrt{t}}$

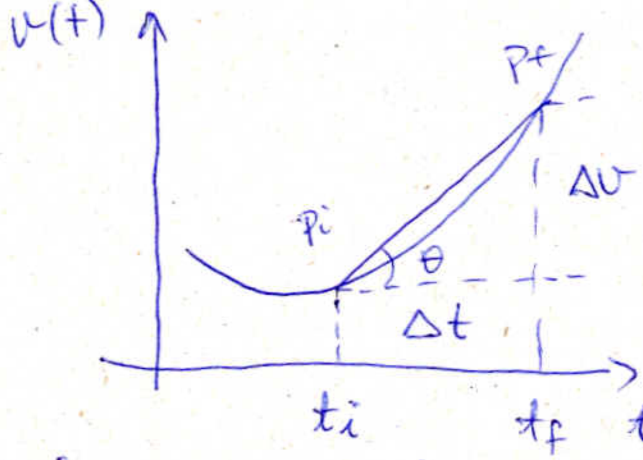
$x(t) = 5\sqrt{t}$?

$$x(t) = 5t^{1/2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = 2,5\, x^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{2,5}{\sqrt{t}}}$$

Aceleração Média e Aceleração Instantânea

Podemos agora repetir toda a argumentação usada p/ definir velocidade média e velocidade instantânea, na definição de aceleração média e instantânea. O gráfico abaixo mostra a velocidade de um ponto material (em movimento 1-D, isto é, retilíneo) em função do tempo.



Definimos aceleração média, a_m entre os instantes t_i e t_f como:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$. desta forma,

$a_m = tg\theta$, onde θ é o ângulo que a reta unindo P_1 e P_2 faz com o eixo do tempo. Note que as dimensões de a_m são $m.s^{-2}$ ($m/s \times 1/s$).

A aceleração instantânea no instante $t = t_i$ é então dada por:

$$a = \lim_{t_f \to t_i} \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}, \text{ assim como } \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

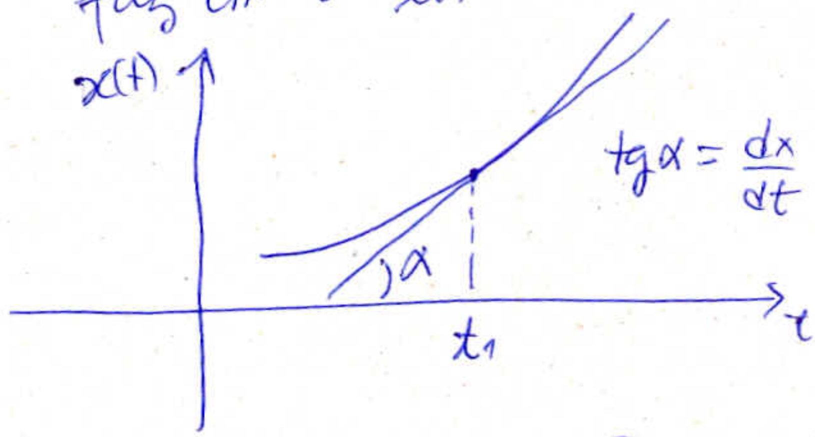
Derivados - definição

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \lim \frac{x(t_1+\Delta t) - x(t_1)}{\Delta t}$$

$$= \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1}$$ (derivada de x em relação a t, para $t = t_1$)

~~Deri~~ Interpretação geométrica:

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_1} =$ ~~tg~~ $tg\,\alpha$, onde α é o ângulo que a reta tangente à curva $x(t)$ p/ $t=t_1$ faz com o eixo de t.



Derivadas de algumas funções:

$$x(t) = a.t^n \longrightarrow \frac{dx}{dt} = n.a.t^{n-1}$$

$$x(t) = a\,e^{\alpha t} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \alpha a e^{-\alpha t}$$

$$x(t) = a.\,sen\,\omega t \rightarrow \frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t$$

$$x(t) = a \cos \omega t \rightarrow \frac{dx}{dt} = -a\omega\, sen\, \omega t$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}$$

$$x(t) = x_1(t) \times x_2(t) \rightarrow \frac{dx}{dt} = x_2(t) \cdot \frac{dx_1}{dt} + x_1(t) \frac{dx_2}{dt}$$

Regra da cadeia: se $y = f(x)$ onde x é uma função de t

$$\frac{dy}{dt} \equiv \frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$