Guilherme Rosa Franzini

Alfredo Gay Neto

Carlos Eduardo Nigro Mazzilli
João Cyro André

Introdução à vibração de meios contínuos

Material de apoio à resolução do T2.

Universidade de São Paulo – USP

Escola Politécnica

PEF 3401 - Mecânica das Estruturas II

São Paulo
2017

Sumário

1 Vibração de meios contínuos - Introdução

O foco aqui é apresentar uma introdução à análise de oscilações de meios contínuos. Não se pretende, portanto, fazer análises de grande profundidade neste tema. O leitor interessado neste aprofundamento pode consultar, por exemplo, os livros de Meirovitch (1986) e de Weaver Jr., Timoshenko e Young (1990).

Considere o problema apresentado na Figura 1, que esquematiza o problema de vibrações de uma viga bi-apoiada de comprimento L, massa por unidade de comprimento μ e rigidez flexional EI constantes ao longo do comprimento. Não há nenhum tipo de esforço externo ativo. Por questão de facilidade, os deslocamentos da viga ocorrem apenas na direção paralela ao eixo z e dependem tanto do tempo quanto da posição x ao longo da estrutura, de sorte que $w = w(x, t)$.

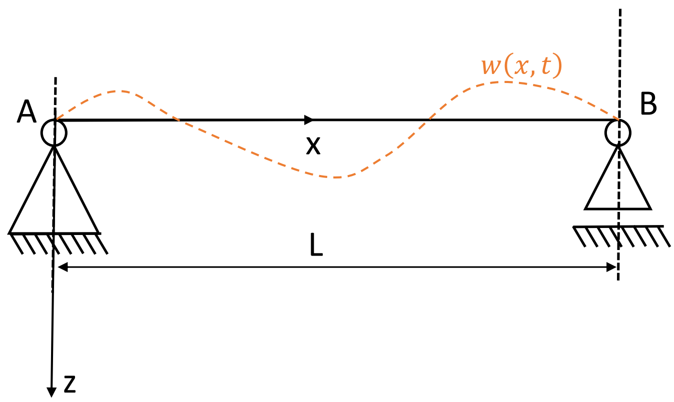

Figura 1 – Viga bi-apoiada e sua resposta dinâmica $w(x, t)$.

O equilíbrio de forças na direção z permite mostrar que a equação de movimento da estrutura é dada por:

$$\mu\ddot{w} + EIw'''' = q(x, t) \tag{1.1}$$

onde

$$\dot{(\ )} = \frac{\partial}{\partial t}(\ ) \tag{1.2}$$

$$(\ )' = \frac{\partial}{\partial x}(\ ) \tag{1.3}$$

$$\tag{1.4}$$

Note que, no caso estático, a Equação 1.1 resume-se a $EIw'''' = q(x)$, que é a equação da linha elástica linearizada para pequenos deslocamentos. Embora este material dê foco ao problema onde as propriedades de inércia e rigidez da barra sejam invariantes ao longo de seu comprimento, os conceitos aqui apresentados podem ser facilmente expandidos para um problema mais geral.

1.1 Obtenção dos modos de vibrar

Consideremos o problema homogêneo, isto é, $q(x,t) = 0$. Em virtude da linearidade da Equação 1.1, buscaremos uma solução do problema homogêneo por meio da separação de variáveis da forma $w(x,t) = A(t)\psi(x)$, isto é, o produto de uma função no tempo por uma função do espaço. Desta forma, a equação de movimento do problema homogêneo é reescrita[1] como

$$\psi\ddot{A} + \frac{EI}{\mu}\psi''''A = 0 \tag{1.5}$$

Os termos da Equação 1.5 podem ser arranjados, de sorte que os termos que dependem do tempo ficam agrupados de um lado da equação e os termos dependentes da posição ao longo da viga estejam do outro lado. Matematicamente, tem-se

$$\frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{EI}{\mu}\frac{\psi''''}{\psi} = -\omega^2 \tag{1.6}$$

sendo ω^2 um número real.

Desta forma, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária no tempo e sua solução:

$$\ddot{A} + \omega^2 A = 0 \rightarrow A(t) = \rho\cos(\omega t - \theta) \tag{1.7}$$

A equação diferencial ordinária na posição x é dada por:

$$\frac{EI}{\mu}\psi'''' = \omega^2\psi \Leftrightarrow \psi'''' = \beta^4\psi \tag{1.8}$$

com

$$\beta^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI} \tag{1.9}$$

Propondo soluções da Equação 1.8 da forma $\psi = e^{\lambda x}$, temos:

$$\lambda^4 e^{\lambda x} - \beta^4 e^{\lambda x} \rightarrow \lambda = \pm\beta, \pm i\beta \tag{1.10}$$

[1] Por questão de conveniência, utilizaremos $A = A(t)$ e $\psi = \psi(x)$.

Logo, a solução da Equação 1.8 é da forma $\psi(x) = a_1 e^{i\beta x} + a_2 e^{-i\beta x} + a_3 e^{\beta x} + a_4 e^{-\beta x}$, sendo a_1, a_2, a_3 e a_4 números complexos. Conforme pode ser visto no Apêndice A, $\psi(x)$ pode ser reescrita por meio da seguinte combinação linear a coeficientes reais:

$$\psi(x) = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x + c_3 \cosh\beta x + c_4 \sinh\beta x \tag{1.11}$$

Para o problema da viga bi-apoiada, temos as seguintes condições de contorno:

$$w(0) = 0 \rightarrow \psi(0) = 0 \tag{1.12}$$
$$w(L) = 0 \rightarrow \psi(L) = 0 \tag{1.13}$$
$$w''(0) = 0 \rightarrow \psi''(0) = 0 \tag{1.14}$$
$$w''(L) = 0 \rightarrow \psi''(L) = 0 \tag{1.15}$$

Aplicando-se as condições de contorno à Equação 1.11, chega-se ao seguinte sistema de equações algébricas escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos\beta L & \sin\beta L & \cosh\beta L & \sinh\beta L \\ -(\beta L)^2 & 0 & (\beta L)^2 & 0 \\ -(\beta L)^2\cos\beta L & -(\beta L)^2\sin\beta L & (\beta L)^2\cosh\beta L & (\beta L)^2\sinh\beta L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.16}$$

Para a Equação 1.16 apresente soluções não-triviais, é necessário que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos\beta L & \sin\beta L & \cosh\beta L & \sinh\beta L \\ -(\beta L)^2 & 0 & (\beta L)^2 & 0 \\ -(\beta L)^2\cos\beta L & -(\beta L)^2\sin\beta L & (\beta L)^2\cosh\beta L & (\beta L)^2\sinh\beta L \end{vmatrix} = 4(\beta L)^4 \sinh(\beta L)\sin(\beta L) = 0 \tag{1.17}$$

Esta condição é satisfeita para infinitos valores da forma $\beta_n L = n\pi, n = 1, 2, 3 \ldots, \infty$. Para cada valor de β_n, a manipulação da Equação 1.9 permite calcular a n-ésima frequência natural não-amortecida ω_n como:

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} \tag{1.18}$$

Substituindo-se os valores da β_n na Equação 1.16, obtém-se[2] que $c_1 = c_3 = c_4 = 0$, de sorte que $\psi_n(x) = c_2 \sin(\beta_n x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. Como a função $\psi_n(x)$ está definida a menos de uma constante c_2, podemos, sem perda de generalidade, definir os modos naturais não-amortecidos de uma viga bi-apoiada como $\psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$.

A interpretação física de ω_n é análoga àquela existente para um sistema de um grau de liberdade, ou seja, as frequências de oscilação de um sistema de mais de um grau de liberdade quando perturbado por condições iniciais não-triviais. Já as funções $\psi_n(x)$ são denominadas modos naturais não-amortecidos, e indicam a forma com que a estrutura oscila em vibrações livres.

1.2 Resposta da estrutura em vibração livre não-amortecida - determinação de propriedades modais

Vimos na seção anterior que a resposta de um sistema em vibrações livres pode ser escrita como:

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\psi_n(x) \tag{1.19}$$

sendo $\psi_n(x)$ os modos de vibrar da estrutura que, por sua vez, são dependentes das condições de contorno do problema. A referência Blevins (1984) apresenta expressões para $\psi_n(x)$ obtidas para diversas condições de contorno.

Substituindo a Equação 1.19 na Equação 1.1, obtém-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu \ddot{A}_n(t)\psi_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} EI\ddot{A}_n(t)\psi_n''''(x) = 0 \tag{1.20}$$

Adota-se o método de Galerkin, que consiste em multiplicar a Equação 1.20 por $\psi_k(x)$ e integrar ao longo do domínio da barra. Assim, chega-s a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^L \mu \ddot{A}_n(t)\psi_n(x)\psi_k(x)dx + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^L EI\ddot{A}_n(t)\psi_n''''(x)\psi_k(x)dx = 0 \tag{1.21}$$

Através do conceito de ortogonalidade dos modos de vibrar, pode-se provar que, para $n \neq k$:

$$\int_0^L \psi_n(x)\psi_k(x)dx = 0 \tag{1.22}$$

$$\int_0^L \psi_n(x)\psi_k''''(x)dx = 0 \tag{1.23}$$

[2] A demonstração fica a cargo do leitor.

Assim, a Equação 1.21 escreve-se como a soma de osciladores modais de um grau de liberdade da forma:

$$m_{\psi_n}\ddot{A}_n(t) + k_{\psi_n}A_n(t) = 0 \tag{1.24}$$

$$m_{\psi_n} = \int_0^L \mu\psi_n(x)^2 dx \tag{1.25}$$

$$k_{\psi_n} = \int_0^L EI\psi_n(x)\psi_n''''(x)dx \tag{1.26}$$

onde os termos m_{ψ_n} e k_{ψ_n} são, respectivamente, a massa e a rigidez modal referente ao n-ésimo modo natural de vibrar. Cabe, neste momento, alguma manipulação algébrica na definição da rigidez modal. A integração por partes da Equação 1.26 leva a:

$$k_{\psi_n} = \int_0^L EI\psi_n(x)\psi_n''''(x)dx = (EI\psi\psi''')_0^L - \int_0^L EI\psi'''\psi' dx \tag{1.27}$$

Note que o primeiro termo do lado direito desta última é expressão é nulo em decorrência das condições de contorno impostas. Utilizando este mesmo raciocínio e, realizando uma nova integração por partes, a rigidez modal pode ser reescrita como:

$$k_{\psi_n} = \int_0^L EI\psi_n(x)\psi_n''''(x)dx = \int_0^L EI\left(\psi''\right)^2 dx \tag{1.28}$$

Podemos definir a frequência natural do n-ésimo modo natural de maneira análoga a de um sistema de um grau de liberdade, por meio da Equação 1.29.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{\psi_n}}{m_{\psi_n}}} \tag{1.29}$$

É claro ao leitor que a consideração numérica de uma soma de infinitos termos não é realizável do ponto de vista computacional, de sorte que é necessário o truncamento da série dada pela Equação 1.20. Em situações onde, *a priori*, sabemos que um modo natural n é excitado de maneira preponderante sobre os demais, podemos tomar a resposta como:

$$w(x,t) = A_n(t)\psi_n(x) \tag{1.30}$$

Uma situação prática onde sabemos que um modo é predominante sobre os demais é quando a condição inicial fornecida à estrutura possui a forma do n-ésimo modo natural. Uma outra condição diz respeito a sistemas forçados harmonicamente com frequência próxima à frequência natural daquele modo.

Referências

BLEVINS, R. *Formulas for natural frequency and mode shape.* [S.l.]: Krieger, 1984.

MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis.* [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1986.

Weaver Jr., W.; TIMOSHENKO, S. P.; YOUNG, D. F. *Vibration problems in engineering.* [S.l.]: John Wiley & Sons, 1990.

A Funções hiperbólicas - revisão

Aqui, demonstra-se que uma combinação linear de funções exponenciais reais e complexas leva ao mesmo resultado que uma combinação linear de funções trigonométricas e hiperbólicas.

Considere uma função real dada por $\psi(x) = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x + c_3 \cosh \beta x + c_4 \sinh \beta x$. Relembra-se, agora, as seguintes identidades matemáticas:

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \tag{A.1}$$

$$\sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \tag{A.2}$$

$$\cos \beta x = \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \tag{A.3}$$

$$\cos \beta x = \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \tag{A.4}$$

Substituindo-se estas identidades na definição de $\psi(x)$ acima, chega-se à seguinte expressão[1]

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left(c_1 + \frac{c_2}{i}\right) e^{i\beta x} + \frac{1}{2}\left(c_1 - \frac{c_2}{i}\right) e^{-\beta x} + \frac{1}{2}(c_3 + c_4)e^{\beta x} + \frac{1}{2}(c_3 - c_4)e^{-\beta x} \tag{A.5}$$

Logo, demonstramos que $\psi(x)$ pode ser escrita como uma combinação linear (a coeficientes complexos) de exponenciais complexas e reais. Ou seja,

$$\psi(x) = a_1 e^{i\beta x} + a_2 e^{-i\beta x} + a_3 e^{\beta x} + a_4 e^{-\beta x} \tag{A.6}$$

[1] Note que os dois primeiros termos desta expressão constituem um par de números complexos conjugados.