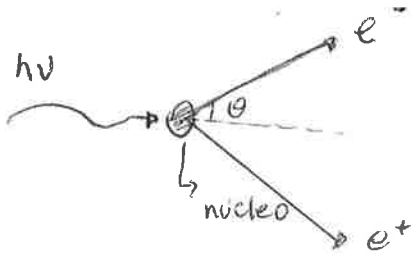


PRODUÇÃO DE PARES:

i) conservação de energia:

$$h\nu + \underbrace{mc^2}_{\substack{\text{energia de} \\ \text{repouso do núcleo}}} = mc^2 + 2mc^2 + K^+ + K^- + K_{\text{nuc}}$$

ii) conservação de momento:

$$\frac{h\nu}{c} = p^+ + p^-$$

no limiar: \rightarrow o fóton tem energia SOMENTE para criar
o par.

$$K^+ + K^- + K_{\text{nuc}} = 0$$

$$p^+ + p^- = 0$$

lei da invariância:

$$E^2 - p^2 c^2 = \text{invariante}$$

$$(h\nu_{\text{lim}} - mc^2)^2 - \left(\frac{h\nu_{\text{lim}}}{c}\right)^2 c^2 = (mc^2 + 2mc^2)^2$$

$$\cancel{(h\nu_{\text{lim}})^2} + \cancel{(mc^2)^2} - 2h\nu_{\text{lim}} \cdot mc^2 - \cancel{(h\nu_{\text{lim}})^2} = \cancel{(mc^2)^2} + (2mc^2)^2$$

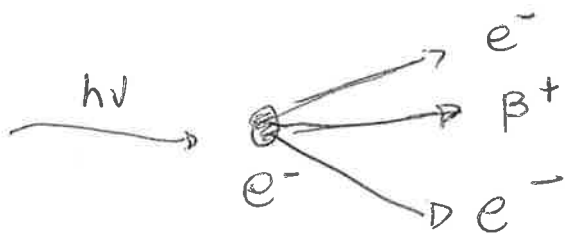
$$h\nu_{\text{lim}} = \frac{(2mc^2)^2 + 4m^2 c^4 + 4m^2 c^4}{2mc^2}$$

$$h\nu_{\text{lim}} = \frac{2m_0^2 c^2}{m} + 2m_0 c^2 = 2m_0 c^2 \left(1 + \frac{m_0}{m} \right)$$

$$h\nu_{\text{lim}} = 2m_0 c^2 = 1,022 \text{ MeV}$$

A produção de par elétron-positron só pode ocorrer se a energia do fóton for maior que 1,022 MeV

TRIPLÉTOS:



i) Conservação de energia:

$$h\nu + m_0 c^2 = 3m_0 c^2 + K^+ + K^- + K^-$$

ii) conservação de momento:

$$\frac{h\nu}{c} = p^+ + p^- + p^-$$

no limiar : $K^+ + K^- + K^- = 0$; $p^+ + p^- + p^- = 0$

$$\frac{h\nu_{\text{lim}}}{c} = 0$$

~~$$(h\nu_{\text{lim}} + m_0 c^2)^2 = (3m_0 c^2)^2$$

$$(h\nu_{\text{lim}})^2 + (m_0 c^2)^2 + 2h\nu_{\text{lim}} \cdot m_0 c^2 = 9(m_0 c^2)^2$$~~

Q1

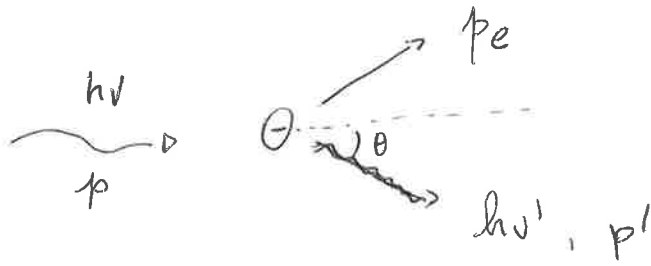
$$[h\nu_{\text{lin}} + mc^2]^2 - \left(\frac{h\nu_{\text{lin}}}{c}\right)^2 c^2 = (3mc^2)^2$$

$$\cancel{(h\nu_{\text{lin}})^2} + (mc^2)^2 + 2h\nu_{\text{lin}} \cdot mc^2 - \cancel{(h\nu_{\text{lin}})^2} = 9(mc^2)^2$$

$$2h\nu_{\text{lin}} mc^2 = 8(mc^2)^2$$

$$h\nu_{\text{lin}} = \frac{8mc^2}{2} = 4mc^2$$

Compton:



→ Relação energia - momento para o elétron relativístico:

$$E^2 = p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

→ conservação de energia:

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (1)$$

→ Conservação de momento:

$$\vec{p} = \vec{p}_e + \vec{p}' \quad \vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}'$$

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta$$

$$p_e^2 c^2 = p^2 c^2 + p'^2 c^2 - 2pp' c^2 \cos \theta \quad (2)$$

Isolando $p_e^2 c^2$ de (1):

$$\sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4} = h\nu - h\nu' + m_0 c^2$$

$$p_e^2 c^2 = (h\nu - h\nu' + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4 \quad (3)$$

De ② e ③

$$p^2 c^2 + p'^2 c^2 - 2pp'c^2 \cos \theta = (h\nu - h\nu' + mc^2)^2 - m_0^2 c^4$$

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad ; \quad p' = \frac{h\nu'}{c}$$

~~$$(h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos \theta = (h\nu)^2 - h^2 \nu \nu' + h\nu mc^2$$~~

~~$$\rightarrow -h\nu' h\nu + (h\nu')^2 - h\nu' mc^2 + h\nu mc^2 - h\nu' mc^2 + mc^4 - mc^4$$~~

$$-2h^2 \nu \nu' \cos \theta = -2h^2 \nu \nu' + 2h\nu mc^2 - 2h\nu' mc^2$$

$$-h^2 \nu \nu' \cos \theta = -h^2 \nu \nu' + mc^2 (h\nu - h\nu')$$

$$mc^2 (h\nu - h\nu') = h^2 \nu \nu' (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{(1 - \cos \theta)}{mc^2} = \frac{(h\nu - h\nu')}{h^2 \nu \nu'}$$

$$\frac{(1 - \cos \theta)}{mc^2} = \frac{\nu}{h\nu\nu'} - \frac{\nu'}{h\nu\nu'} = \frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu}$$

$$\frac{1}{h\nu'} = \frac{(1 - \cos \theta)}{mc^2} + \frac{1}{h\nu} = \frac{h\nu(1 - \cos \theta) + mc^2}{mc^2 h\nu} \times \left[\frac{1}{mc^2} \right]$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{\frac{h\nu}{mc^2} (1 - \cos \theta) + 1}$$

sendo $\alpha = \frac{h\nu}{mc^2}$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)}$$

Q.2

Energia cinética do elétron:

$$T = h\nu - h\nu'$$

$$T = h\nu - \frac{h\nu}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} = h\nu \left(1 + \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \right)$$

Em carbono:

E	$\frac{\mu}{\rho}$	$\frac{\mu_{\text{foto}}}{\rho}$	$\frac{\mu_{\text{comp}}}{\rho}$	$[\text{cm}^2/\text{g}]$
0.050 MeV	0.187	0.01	0.163	
0.5 MeV	0.087	6.8×10^{-6}	0.087	

a) $N = N_0 e^{-\mu x}$, com $N_0 = 5 \times 10^6$ fótons/cm²

→ 0.050 MeV
 $N = 5 \times 10^6 e^{-(0.187 \times 1.7 \times 1)} = 3.64 \times 10^6$ fótons/cm²

→ 0.5 MeV
 $N = 5 \times 10^6 e^{-(0.087 \times 1.7 \times 1)} = 4.31 \times 10^6$ fótons/cm²

b) $N_{\text{int}} = N - N_0$

$N_{\text{int}}(0.050 \text{ MeV}) = (5 - 3.64) \times 10^6 = 1.36 \times 10^6$

$N_{\text{int}}(0.5 \text{ MeV}) = (5 - 4.31) \times 10^6 = 0.69 \times 10^6$

$N_{\text{int. total}} = (1.36 + 0.69) \times 10^6 = 2.05 \times 10^6$ interações

0.050 MeV $\left\{ \begin{array}{l} N_{\text{foto}} = N_{\text{int}}(0.050) \times \frac{\mu_{\text{foto}}/\rho}{\mu/\rho} = 7.3 \times 10^4 \\ N_{\text{comp}} = N_{\text{int}}(0.050) \cdot \frac{\mu_{\text{comp}}/\rho}{\mu/\rho} = 1.2 \times 10^6 \end{array} \right.$

Analogamente:

0.5 MeV $\left\{ \begin{array}{l} N_{\text{foto}} \approx 0 \\ N_{\text{comp}} = 0.69 \times 10^6 \end{array} \right.$

$$\text{Totais Compton: } 1.89 \times 10^6$$

$$\text{Totais fotoelétricos: } 7.3 \times 10^4$$

c)

E fóton (MeV)	fótons/cm ²
0.050	3.64×10^6
0.5	4.31×10^6

Para mais 1 cm de carbono.

~~Peso~~ Sendo: $N = N_0 e^{-\mu x}$

$$N(0.05) = 2.65 \times 10^6 \text{ fótons/cm}^2$$

$$N(0.5) = 3.72 \times 10^6 \text{ fótons/cm}^2$$

$$N_{\text{int}} = N - N_0$$

$$N_{\text{int}}(0.05) = (3.64 - 2.65) \times 10^6 = 0.99 \times 10^6$$

$$N_{\text{int}}(0.5) = (4.31 - 3.72) \times 10^6 = 0.59 \times 10^6$$

$$N_{\text{int. Total}} = 1.58 \times 10^6$$

$$0.05 \text{ MeV} \left\{ \begin{array}{l} N_{\text{foto}} = 5.3 \times 10^4 \\ N_{\text{comp}} = 8.6 \times 10^5 \end{array} \right.$$

$$0.5 \text{ MeV} \left\{ \begin{array}{l} N_{\text{foto}} \approx 0 \\ N_{\text{comp}} = 0.59 \times 10^6 \end{array} \right.$$

a) Para baixa energia predomina o efeito fotoelétrico, no qual toda energia do fóton é transferida para o meio. Portanto a razão $\frac{\mu_{t1}}{\mu}$ ou $\frac{\bar{E}_{t1}}{h\nu}$ é próxima de 1. No entanto, à medida que a energia vai aumentando, a transferência de energia vai ~~de~~ diminuindo por conta do aumento das interações Compton (onde somente parte do energia do fóton é transferida).

Quando a interação Compton predomina a razão $\frac{\bar{E}_{t1}}{h\nu}$ para os dois materiais se aproxima pois a interação Compton para energias em torno de 1 MeV independe do n° atômico.

A razão $\frac{\bar{E}_{t1}}{h\nu}$ volta novamente a crescer devido ao aumento da produção de pares onde toda a energia do fóton é transferida para o meio.

b) O Elemento 2 tem maior número atômico. A razão $\frac{\bar{E}_{t1}}{h\nu}$ demora mais para decrescer. Isso pode ser notado no gráfico de energia onde as curvas podem ser observadas separadamente. Isso significa que nessa faixa de energia o Elemento 2 apresenta mais interação por efeito fotoelétrico que o elemento 1. Esse tipo de interação é mais provável para número atômico alto.

μ Descreve a remoção dos fótons do feixe.
Representa a seção de choque de interação do fóton com o meio

μ_{tr} Descreve a quantidade de energia dos fótons que é transferida para o meio na forma de energia cinética das partículas carregadas do meio.

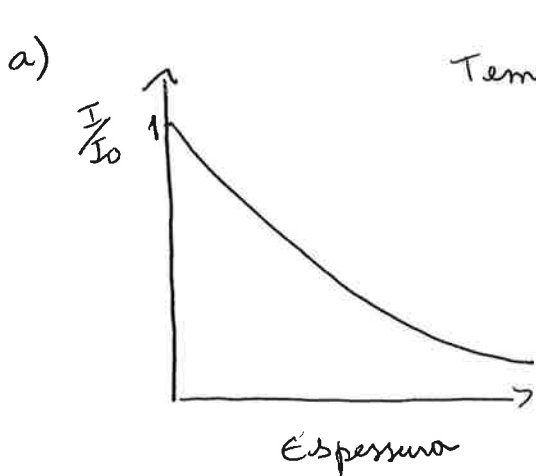
\bar{E}_{tr} Energia média transferida ao meio por um fóton de energia $h\nu$

$$\bar{E}_{tr} = \frac{\mu_{tr}}{\mu} h\nu \quad \text{ou} \quad \frac{\mu_{tr}}{\mu} = \frac{\bar{E}_{tr}}{h\nu}$$

Processo fotoelétrico mais provável para fótons de baixa energia e meios com nº atômico altos. Há absorção do fóton e transferência de toda energia do fóton para o meio

Processo Compton Energias médias; pouca dependência com o nº atômico; transferência somente de parte da energia do fóton para o meio

Produção de pares Energias maiores que 1.022 MeV transferência de toda energia para o meio



Temos que: $I = I_0 e^{-\mu x}$

O feixe será atenuado exponencialmente com o aumento da espessura. Essa atenuação depende do material ($\mu(E)$).

b) Dependendo do número atômico do material, poderão ocorrer interações por efeito Compton, fotoelétrico ou produção de pares, o que causa a atenuação do feixe.

fotoelétrico: um fóton é absorvido por um elétron atômico que é ejetado com energia $K = h\nu - B$. B é a energia de ligação do ~~elétron~~ elétron.

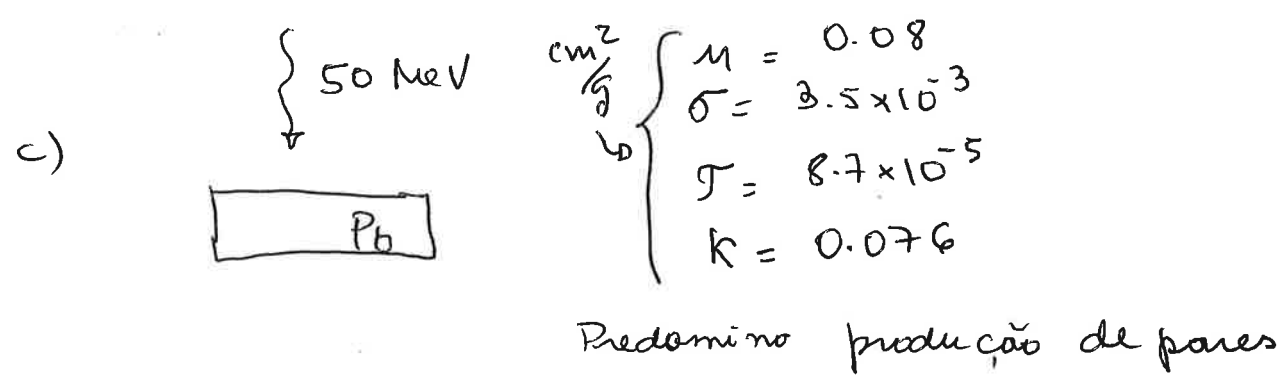
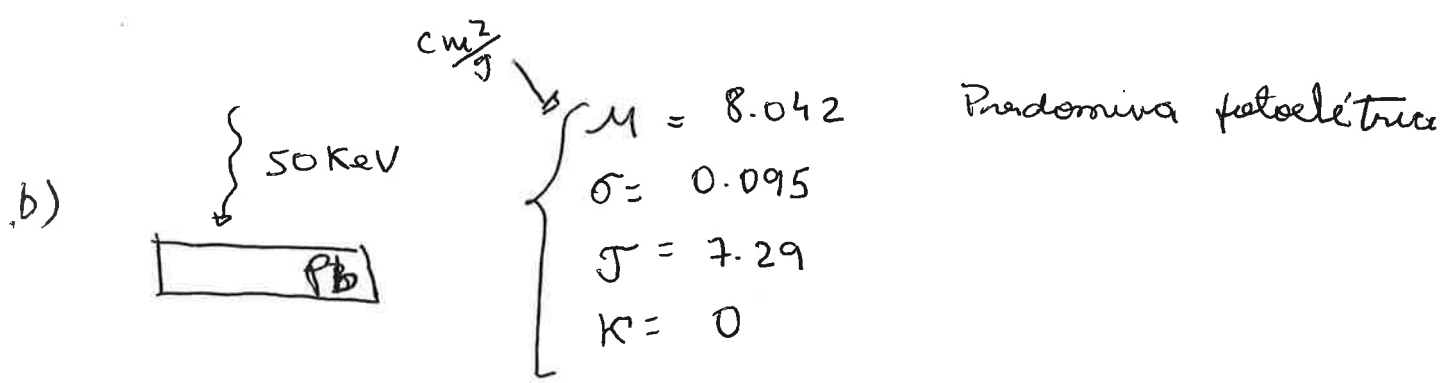
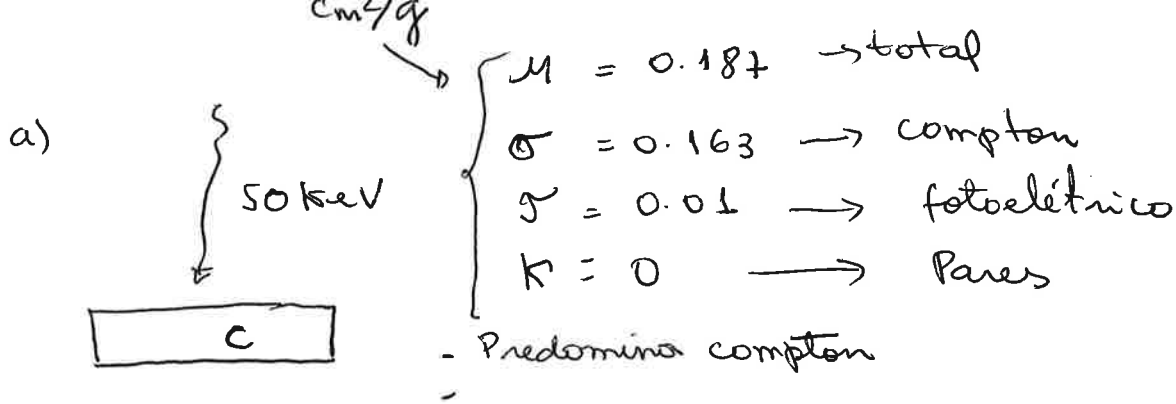
Compton: um fóton é espalhado por um elétron considerado livre e em repouso. Parte da energia do fóton incidente é transferida para o elétron e a outra parte segue com um fóton espalhado.

Pares: (parco possível) o fóton incidente é absorvido na interação e toda a sua energia é convertida em massa de repouso e energia cinética de um par elétron - positron.

c)

i) Nesse caso temos um feixe polienergético e o coeficiente de atenuação varia com cada valor de energia do espectro. Os coeficientes de atenuação do meio geralmente decresce com a energia, desse modo o espectro transmitido apresentaria maior eliminação de fótons de baixa energia que de alta energia, com o aumento da espessura.

ii) Devem ocorrer predominantemente os efeitos fotoelétrico e Compton (depende de Z). Apesar do energia máxima do feixe (2 MeV) ser maior que o limiar de energia para a produção de $\text{p}\pi^0$ (1.022 MeV) esse tipo de interação é pouco provável para esta energia. (Fig 6.2)



O caso B é o que apresenta maior razão $\frac{E_{obs}}{h\nu}$ por possuir maior μ e a predominância do efeito fotoelétrico

O caso C apresenta a maior quantidade de fótons que atravessa o material pois μ é o menor, comparando com os outros casos.

~~A~~

A ~~menor~~ ^{menor} atenuação para os fótons secundários é obtida quando a trajetória desses fótons é oblíqua de tal modo ~~que~~ que ao atravessar a grade não cruze mais que uma tira de chumbo, como indicado na figura.

Transmissão do feixe primário:

$$\phi_p = \phi_0 e^{-\mu_{ALP} \cdot d}$$

Transmissão do feixe secundário:

$$\phi_s = \phi_0 e^{-\mu_{ALS} \cdot \chi_{AL}} \cdot e^{-\mu_{PbS} \cdot \chi_{Pb}}$$

$$d = 1.7 \text{ mm}$$

$$\mu_{ALP} = 0.03688 \times 2.7 \times 10^3 \text{ m}^{-1} \rightarrow \text{para } 50 \text{ keV (primário)}$$

$$\mu_{ALS} = 0.057 \times 2.7 \times 10^3 \text{ m}^{-1} \rightarrow \text{para } 40 \text{ keV (secundário)}$$

$$\mu_{PbS} = 1.431 \times 11.34 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$$

$$\chi_{AL} = \frac{2W}{\sin \theta}$$

$$\chi_{Pb} = \frac{l}{\sin \theta}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{2W + l}{d} = \frac{0.45}{1.7} = 0.26 \rightarrow \theta = 14.8^\circ$$

$$\phi_p = \phi_0 \cdot e^{-0.03688 \times 2.7 \times 10^3 \cdot 1.7 \times 10^{-3}} = \phi_0 \times 0.84$$

$$\phi_s = \phi_0 \times 0.78 \times 0.042 = \phi_0 \times 0.032$$

$$\frac{\phi_p}{\phi_s} = 25.8 \quad ; \quad \frac{\phi_s}{\phi_p} = 0.038 \rightarrow \text{Os fótons espalhados que chegam ao detector representa } 3.8\% \text{ da quantidade de fótons transmitidos.}$$

$$a) N_{int} = N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\mu x} = N_0 (1 - e^{-\mu x})$$

$$N_{int} = 6.319 \times 10^{19}$$

$$\text{fotoelétrico: } \frac{f}{\mu} = 2,253\% \quad \rightarrow N_{foto} = 1,42 \times 10^{18}$$

$$\text{Compton: } \frac{\sigma}{\mu} = 39,86\% \quad \rightarrow N_{comp} = 2,52 \times 10^{19}$$

$$\text{Pares: } \frac{\kappa}{\mu} = 57,4\% \quad \rightarrow N_{pares} = 3,62 \times 10^{19}$$

$$\text{Rayleigh: } \frac{r}{\mu} = 0,19\% \quad \rightarrow N_{Ray} = 1,22 \times 10^{17}$$

b)

~~E_{foto} =~~ ~~1,42 × 10¹⁸~~

$$E_{foto} = N_{foto} \times 6 \text{ MeV} \times 1,602 \times 10^{-13} \text{ J/MeV} = 1,37 \times 10^6 \text{ J}$$

$$E_{comp} = N_{comp} \times 6 \text{ MeV} \times 1,602 \times 10^{-13} \text{ J/MeV} = 2,42 \times 10^7 \text{ J}$$

$$E_{pares} = 3,47 \times 10^7 \text{ J}$$

$$E_{Ray} = 1,17 \times 10^5 \text{ J}$$

c) No espalhamento Rayleigh não há transferência de energia.

$$E_{tr \text{ foto}} = \frac{\mu_{tr}/\rho}{\mu/\rho} \cdot 6 \text{ MeV} \times N_{foto} \times 1,602 \times 10^{-13} \text{ J/MeV} = 1,03 \times 10^6 \text{ J}$$

Analogamente:

$$E_{tr \text{ comp}} = 1,87 \times 10^7 \text{ J}$$

$$E_{tr \text{ Pares}} = 2,62 \times 10^7 \text{ J}$$

$$E_{tr \text{ total}} = 4,54 \times 10^7 \text{ J}$$

$$d) E_{ab} = E_{tr} - 17,1\% E_{tr}$$

$$E_{ab} = 4,54 \times 10^7 \text{ J} - (17,1\%) 4,54 \times 10^7 \text{ J}$$

$$E_{ab} = 3,76 \times 10^7 \text{ J}$$