

Estudo da Estabilidade Numérica do Método de Newmark através da Análise de uma Estrutura do tipo Shear Building.

Lucas Sardinha de Arruda¹
Sara Prates¹

¹Escola Politécnica de Engenharia Civil – Universidade de São Paulo (USP)
Seminário da disciplina PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas

RESUMO

Neste trabalho, procura-se estudar a estabilidade numérica do método de Newmark, em conjunto com uma análise parametrizada de rigidez do modelo de Shear Building. O estudo da estabilidade numérica será dado em duas etapas, a primeira consistindo da variação dos parâmetros alpha e beta do método de modo a se identificar os valores de incrementos no tempo que geram a propagação do erro numérico. Enquanto que a segunda etapa consiste em observar, através de uma análise parametrizada, o impacto da rigidez estrutural nas resposta temporal de uma estrutura do tipo Shear Building, investigando uma possível parcela de amortecimento estrutural devido ao aumento na rigidez.

Palavras-Chave: Método de Newmark; Shear Building.

INTRODUÇÃO

Dentro da aplicação de engenharia, temos que lidar com problemas ou modelos descritos por equações diferenciais parciais lineares (ou não lineares) que comumente descrevem o processo de deformação de sólidos no tempo. Típicos exemplos na área incluem simulações de impacto – onde a resposta nos instante iniciais são importantíssimas; ou modelos estruturais submetidos a diversas condições de carregamento, em que a resposta a longo prazo apresentam um caráter mais significativo. Além disso, vemos que os modelos apresentados podem conter termos não lineares, causados pelo comportamento inelástico da estrutura – como problemas envolvendo visco-plasticidade e viscoelasticidade – ou devido a características geométricas da mesma. Neste contexto, nota-se a importância do desenvolvimento de metodologias numéricas que permitam a resolução destas equações diferenciais parciais, uma vez que as mesmas muitas vezes não apresentam soluções analíticas. Além disso, buscam-se métodos numéricos que forneçam soluções precisas e confiáveis, uma vez que a viabilidade ou até mesmo a segurança do projeto baseiam-se na solução fornecida pelo algoritmo.

MÉTODO DE NEWMARK

Partindo da equação de equilíbrio dinâmica de estrutura, equação (1), e reescrevendo a mesma em sua forma matricial, obtém-se:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f \quad (1)$$

onde as matrizes ‘M’, ‘C’ e ‘K’ representam as matrizes de massa e amortecimento e rigidez respectivamente. Finalmente, o vetor ‘f’ representa o vetor de carregamentos generalizados, podendo ou não, ser função do tempo. A resolução deste sistema de equações diferenciais lineares é dada através do algoritmo baseado no método de Newmark, em homenagem a seu criador Nathan M. Newmark, professor de Engenharia Civil da Universidade de Illinois, que o desenvolveu em 1959 o método para resolução de problemas de dinâmica estrutural. Nele, inicialmente, realiza-se o processo de predição dos campos de aceleração, velocidade e deslocamentos generalizados no instante final ‘ t_f ’ de um intervalo discreto de tempo ‘ dt ’, com base nos valores dos mesmo no instante inicial ‘ t_i ’. Como mostrado abaixo:

$$u^{tf} = u^{ti} + \dot{u}^{ti}dt + (1/2 - \beta)dt^2\ddot{u}^{ti} + \beta dt^2\ddot{u}^{tf} \quad (3)$$

$$\dot{u}^{tf} = \dot{u}^{ti} + (1 - \alpha)dt\ddot{u}^{ti} + \alpha dt\ddot{u}^{tf} \quad (4)$$

$$\ddot{u}^{tf} = (f^{tf} - C\dot{u}^{tf} - Ku^{tf})/M \quad (5)$$

sendo os coeficientes ‘ α ’ e ‘ β ’ escolhidos de modo a obter-se melhor precisão e estabilidade para cada tipo de problema. Substituindo-se as relações (3) – (5), escreve-se, a partir de (2), o seguinte sistema de equações.

$$\Delta f^{tf} = (f^{tf} - f^{ti}) + \left(\frac{M}{\beta dt} + \frac{\alpha C}{\beta} \right) \dot{u}^{ti} + \dots + \left(\frac{M}{2\beta} + dtC \left(\frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right) \right) \ddot{u}^{ti} \quad (6)$$

$$k_e = K + (\alpha/\beta dt)C + (1/\beta dt^2)M \quad (7)$$

$$k_e \Delta u = \Delta f^{tf} \quad (8)$$

A resolução do sistema apresentado em (8), leva a determinação do incremento do vetor deslocamento para esta iteração, sendo assim possível calcular o valor dos incrementos restantes, dados por:

$$\Delta \dot{u} = (\alpha/\beta dt)\Delta u - (\alpha/\beta)\dot{u}^{ti} + dt(1 - \alpha/2\beta)\ddot{u}^{ti} \quad (9)$$

$$\Delta \ddot{u} = (1/\beta dt^2)\Delta u - (1/\beta dt)\dot{u}^{ti} - (1/2\beta)\ddot{u}^{ti} \quad (10)$$

Da literatura acadêmica, sabe-se que o método de Newmark apresenta sua estabilidade vinculada ao valores de alpha e beta selecionados, sendo que para o caso de alpha igual a meio, o método apresenta um erro de amplitude nula; e que ao se adotar os valores citados anteriormente, isto é, ‘ $\alpha = 0.5$ ’ e ‘ $\beta = 0.25$ ’, o método é incondicionalmente estável para sistemas lineares.

MODELO E METODOLOGIA DE ANÁLISE

Apresenta-se nesta seção o modelo de “Shear Building”, modelo este de representatividade na área da engenharia civil, uma vez que o mesmo serve de modelo intermediário para a modelagem de um edifício de múltiplos pavimentos, além de ter alto grau de simplicidade.

O modelo de “Shear Building” aproxima cada pavimento por um pórtico de pisos rígidos, onde o número de pavimentos representa o número de graus de liberdade do modelo. Segundo Paz (1985), para modelar a estrutura utilizando este modelo, deve-se impor três hipóteses: (1) A massa de cada pavimento deve ser modelada por uma massa equivalente à soma das massas das vigas, lajes e pilares daquele nível; (2) Assume-se que não existe deslocamentos referentes a rotação de cada nó, uma vez que as lajes apresentam uma rigidez extremamente superior a rigidez dos pilares; (3) Despreza-se as deformações axiais dos pilares, ou seja, durante o movimento horizontal as lajes permanecem niveladas.

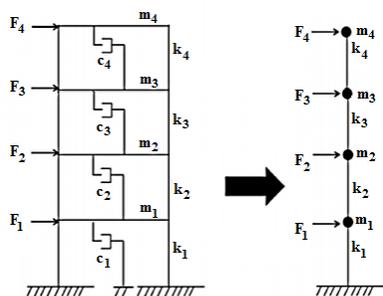


Figura 1 - Modelo “Shear Building”.

Considerando um edifício com quatro pavimentos, como apresentado na Figura 1, temos que as equações de movimento de cada pavimento podem ser determinadas por uma análise do diagrama de corpo livre, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 + k_1 u_1 - c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - k_2 (u_2 - u_1) &= F_1(t) \\
 m_2 \ddot{u}_2 + c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) - c_3 (\dot{u}_3 - \dot{u}_2) - k_3 (u_3 - u_2) &= F_2(t) \\
 m_3 \ddot{u}_3 + c_3 (\dot{u}_3 - \dot{u}_2) + k_3 (u_3 - u_2) - c_4 (\dot{u}_4 - \dot{u}_3) - k_4 (u_4 - u_3) &= F_3(t) \\
 m_4 \ddot{u}_4 + c_4 (\dot{u}_4 - \dot{u}_3) + k_4 (u_4 - u_3) &= F_4(t)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Escrevendo o conjunto de equações acima em formulação matricial, obtém-se o sistema clássico de equações para descrição de um modelo dinâmicos, dada por:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F
 \tag{12}$$

onde as matrizes ‘M’, ‘C’ e ‘K’, representa a matriz de massa e rigidez do sistema, respectivamente. Neste caso de análise, temos que o amortecimento adotado é baseado no modelo de amortecimento de Rayleigh, onde os parâmetros ‘ γ ’ e ‘ δ ’ são definidos pelo usuário.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Assumindo um edifício de quatro pavimentos com as seguintes sob condição de carregamento simples, e com

condições iniciais nulas ($u(0) = \dot{u}(0) = 0$), temos que a resposta de deslocamento (u), velocidade (\dot{u}) e aceleração (\ddot{u}) em função do tempo para o caso de referência, isto é, assumindo que os parâmetros alpha e beta do método são definidos de modo a representar o caso em que o algoritmo é incondicionalmente estável ($\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.25$), são apresentados na Figura 2. Analisando-se as curvas apresentadas na figura, vemos que o sistema apresenta um comportamento periódico nos vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, condizendo com o esperado para um modelo pouco amortecido.

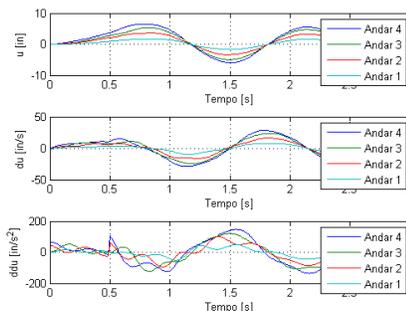


Figura 2 – Resposta dos deslocamentos, velocidades e acelerações em função do tempo para um passo ‘ $dt = 0,01$ s’.

Em relação a análise parametrizada do incremento de tempo ‘ dt ’, temos que para o caso de referência (caso incondicionalmente estável) a curva de deslocamento do piso superior (Figura 3) apresenta uma solução consistente, isto é, não diverge para valores de incremento variando entre ‘0.01 s’ e ‘0.1 s’.

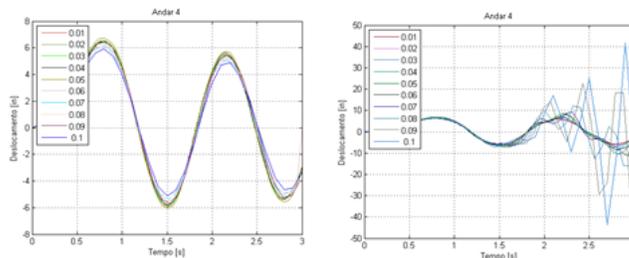


Figura 3 – Resposta parametrizada do deslocamento do andar superior em relação ao passo de tempo ‘ dt ’ para valores de ‘ $\alpha = 0.5$ ’ e ‘ $\beta = 0.25$ ’ (à esquerda) e valores de ‘ $\alpha = 0.2$ ’ e ‘ $\beta = 0.1$ ’.

Assumindo valores de alpha e beta dentro do intervalo de instabilidade do método ($\alpha \leq 0.5$) temos que a resposta em deslocamento do pavimento superior apresentará instabilidade para valores de incremento de tempo superiores a ‘0.06 s’ (figura 3), está divergência é perceptível ao se comparar a amplitude máxima desta análise com os valores de amplitude obtidos no caso de referência. Em relação a parametrização da rigidez (figura 4), vemos que os deslocamentos, velocidades e acelerações foram menores quando comparado com a estrutura variando a rigidez entre “k” de 50% abaixo e 50% acima do “k” adotado, porém em relação a variação no tempo a primeira hipótese atingiu seus máximos em menor intervalo de tempo e

para segunda hipótese os máximos foram atingidos em maior intervalo de tempo.

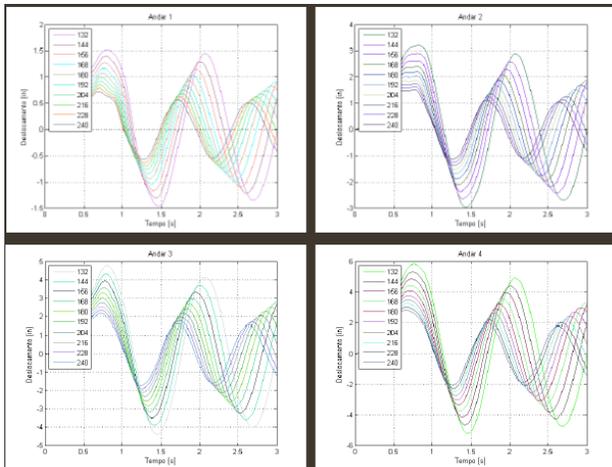


Figura 4 – Resposta parametrizada do deslocamento do andar inferior ao superior, em relação ao passo de tempo ‘ dt ’ para valores de ‘ $\alpha = 0.5$ ’ e ‘ $\beta = 0.25$ ’.

CONCLUSÕES

O estado realizado de estabilidade do método de Newmark, de modo tipo “Shear Building” com variação dos parâmetros alpha e beta na resposta temporal do modelo, observou-se que para valores de alpha menores que meio, o método de Newmark é instável; em intervalos iguais ou maiores que meio, o método apresenta estabilidade dependente do parâmetro beta e do incremento ‘ dt ’ - que dizem se o método de Newmark será incondicionalmente ou condicionalmente estável.

Obteve-se também que variando a rigidez estrutural, como hipótese de aumentar a rigidez, houve menores deslocamentos, velocidades e acelerações na estrutura; no segunda hipótese com a diminuição da rigidez estrutural houve maiores deslocamentos, velocidades e acelerações na estrutura.

REFERÊNCIAS

- [1] Alves, L.S. Controle De Vibrações Em Edifícios Altos Sujeitos A Vento Ou Terremoto, Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás, 2015.
- [2] Paz, M. Structural Dynamics: Theory and Computation. 2.ed. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 561p., 1985.
- [3] Brasil, Reyolando M.L.R.F., Não-Linearidade Geométrica na Dinâmica de Estruturas Aporticadas Planas: Um Tratamento Pelo Método dos Elementos Finitos”. Tese submetida para obtenção de título de doutor em Engenharia Civil pela Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, Brasil, 1990.
- [5] Wriggers, P., Nonlinear Finite Element Methos, Springer, 2008.
- [5] Mechanical Vibrations - https://web.stanford.edu/group/frg/course_work/AA242B/CA-AA242B-Ch7.pdf, acessado em 10/05/2017