

Estudo da Estabilidade Numérica do Método de Newmark através da Análise de uma Estrutura do tipo Shear Building.

Seminário da disciplina PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas

*Lucas Sardinha de Arruda
Sara Prates*

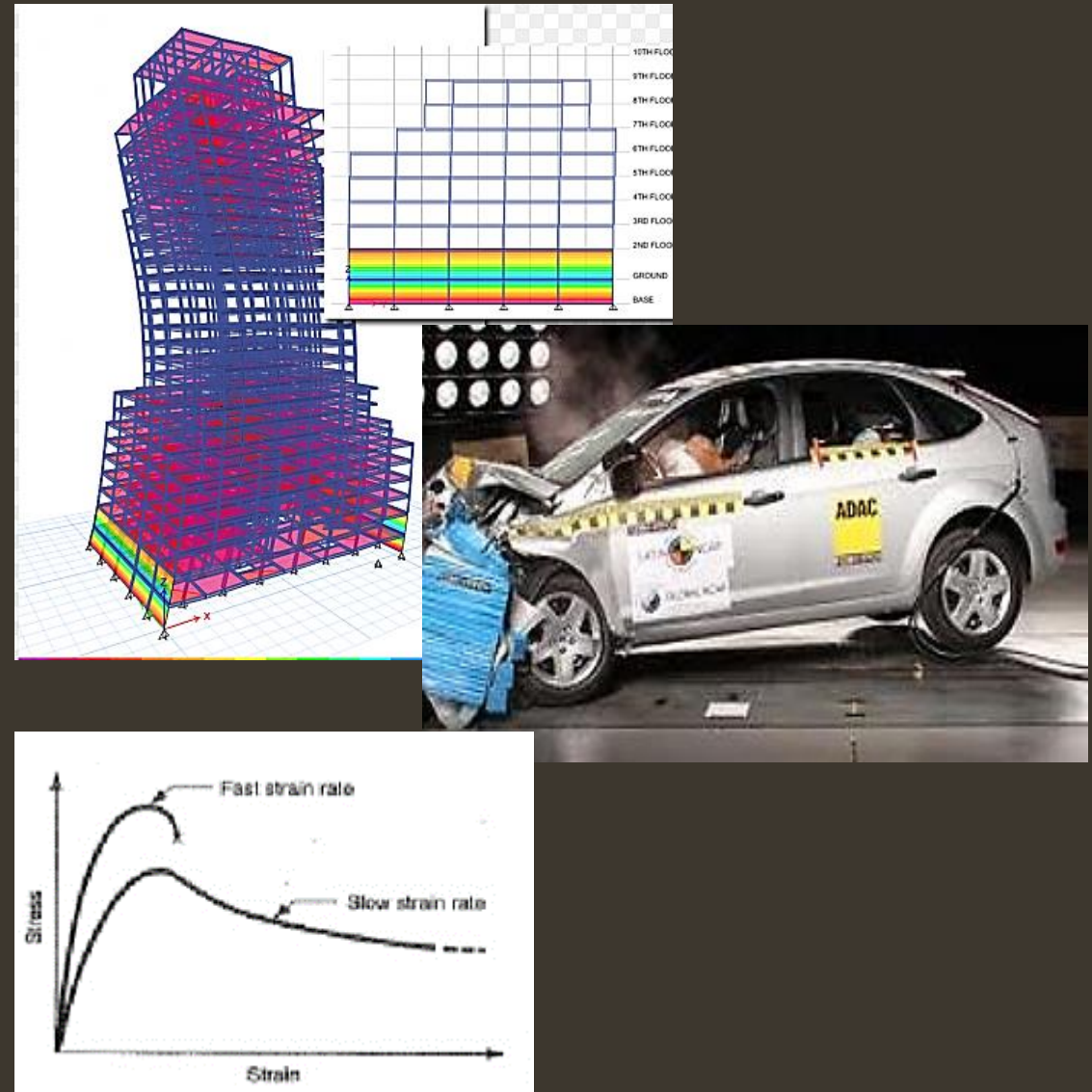


Índice

- Contextualização
- Modelo Shear Building
- Método de Newmark
- Análise de estabilidade do método numérico
- Análise paramétrica da estrutura do tipo Shear Building
- Referências

Contextualização

- Dentro da aplicação de engenharia, temos que lidar com problemas ou modelos descritos por equações diferenciais parciais lineares (ou não lineares) que comumente descrevem o processo de deformação de sólidos no tempo.
- Modelos apresentados podem conter termos não lineares, causados pelo comportamento inelástico da estrutura – como problemas envolvendo viscoplasticidade e viscoelasticidade – ou devido a características geométricas da mesma.



Contextualização

- Busca-se o desenvolvimento e estudo de metodologias numéricas que permitam a resolução destas equações diferenciais parciais, uma vez que as mesmas muitas vezes não apresentam soluções analíticas.

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

$$\nabla^2 u = c$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = c$$

$$\alpha \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\alpha (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - u_t = 0$$

$$c^2 \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

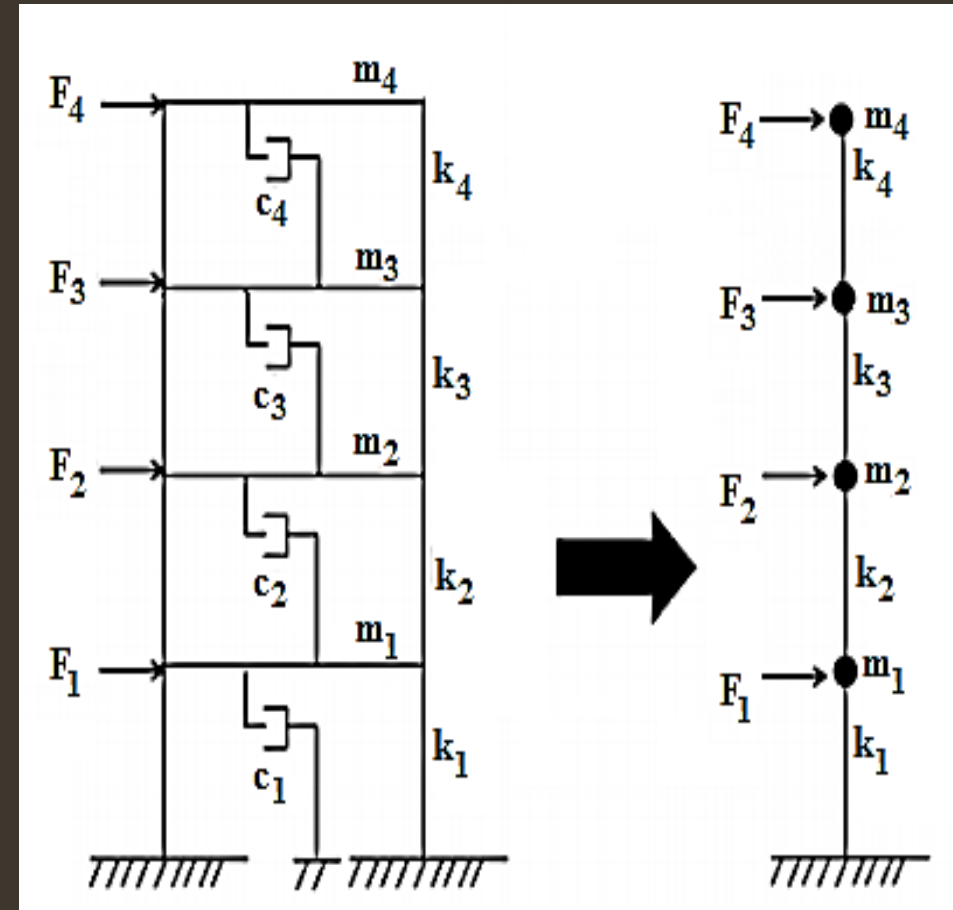
$$c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - u_{tt} = 0$$

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x, y, z, t)$$

$$c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - u_{tt} = -f$$

Modelo Shear Building

- O modelo de “Shear Building” aproxima cada pavimento por um pórtico de pisos rígidos.
- Cada andar será descrito por um sistema de massa-mola-amortecedor que vem a representar a rigidez dos pilares de cada pavimento.
- Segundo Paz (1985), para modelar a estrutura utilizando este modelo, deve-se impor três hipóteses:
 - A massa de cada pavimento deve ser modelada por uma massa equivalente à soma das massas das vigas, lajes e pilares daquele nível;
 - Assume-se que não existe deslocamentos referentes a rotação de cada nó, uma vez que as lajes apresentam uma rigidez extremamente superior a rigidez dos pilares;
 - Despreza-se as deformações axiais dos pilares, ou seja, durante o movimento horizontal as lajes permanecem niveladas.



Modelo Shear Building

- Equações de movimento:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 + k_1 u_1 - c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - k_2 (u_2 - u_1) &= F_1(t) \\m_2 \ddot{u}_2 + c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) - c_3 (\dot{u}_3 - \dot{u}_2) - k_3 (u_3 - u_2) &= F_2(t) \\m_3 \ddot{u}_3 + c_3 (\dot{u}_3 - \dot{u}_2) + k_3 (u_3 - u_2) - c_4 (\dot{u}_4 - \dot{u}_3) - k_4 (u_4 - u_3) &= F_3(t) \\m_4 \ddot{u}_4 + c_4 (\dot{u}_4 - \dot{u}_3) + k_4 (u_4 - u_3) &= F_4(t)\end{aligned}$$

- Em forma matricial:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad C = \gamma M + \delta K$$

Modelo Shear Building

- Com base nas hipótese do modelo, temo que os pilares são considerados engastados entre os pavimentos, de modo que o coeficiente de rigidez ' k ' de cada pilar é calculado pela expressão:

$$k_i = 12EI/L$$

onde ' E ' e ' I ' representam o módulo de elasticidade e a inércia de cada pilar, respectivamente, enquanto que ' L ' representa o pé direito de cada pavimento.

Método de Newmark

- Nomeado em homenagem a seu criador Nathan M. Newmark, professor de Engenharia Civil da Universidade de Illinois, que o desenvolveu em 1959 para uso em dinâmica estrutural.
- Realiza-se uma predição dos campos de aceleração, velocidade e deslocamentos generalizados no instante final ' t_f ' de um intervalo discreto de tempo ' dt ', com base nos valores dos mesmo no instante inicial ' t_i '.

$$\underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{u}_t + \underline{\dot{u}}_t \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \underline{\ddot{u}}_t + \beta \Delta t^2 \underline{\ddot{u}}_{t+\Delta t}$$

$$\underline{\dot{u}}_{t+\Delta t} = \underline{\dot{u}}_t + (1 - \alpha) \Delta t \underline{\ddot{u}}_t + \alpha \Delta t \underline{\ddot{u}}_{t+\Delta t}$$

$$\underline{m} \underline{\ddot{u}}_{t+\Delta t} + \underline{c} \underline{\dot{u}}_{t+\Delta t} + \underline{k} \underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{f}_{t+\Delta t}$$

Método de Newmark

- Uma vez conhecida as condições iniciais do problema é possível substituir as mesmas, assim como suas aproximações na equação dinâmica do problema obtendo-se:

$$\underline{m} \ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \underline{c} \dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \underline{k} \underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{f}_{t+\Delta t}$$

$$\Delta \underline{f}_{\sim t} = \left(\underline{f}_{\sim t} - \underline{f}_{\sim t-\Delta t} \right) + \underline{A}_1 \dot{\underline{u}}_{\sim t-\Delta t} + \underline{A}_2 \ddot{\underline{u}}_{\sim t-\Delta t}$$

$$\underline{k}_e = \underline{k} + \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \underline{c} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{m}$$

$$\Delta \underline{u}_t = \underline{k}_e^{-1} \Delta \underline{f}_{\sim t}$$

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{\beta \Delta t} \underline{m} + \frac{\alpha}{\beta} \underline{c}$$

$$\underline{A}_2 = \frac{1}{2\beta} \underline{m} + \Delta t \left(\frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right) \underline{c}$$

Método de Newmark

- Assumindo o comportamento linear do sistema, tem-se que o valor pode ser facilmente calculado. Entretanto, supondo a presença de termos não lineares, o sistema de equações torna-se um processo iterativo onde a cada iteração deve-se procurar atingir o equilíbrio dinâmico.
- O valor dos deslocamento, velocidades e acelerações pode então ser determinado através de:

$$\Delta \dot{\underline{u}}_t = \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \Delta \underline{u}_t - \frac{\alpha}{\beta} \dot{\underline{u}}_{t-\Delta t} + \Delta t \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta} \right) \ddot{\underline{u}}_{t-\Delta t}$$

$$\Delta \ddot{\underline{u}}_t = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \underline{u}_t - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_{t-\Delta t} - \frac{1}{2\beta} \ddot{\underline{u}}_{t-\Delta t}$$

$$\underline{u}_t = \underline{u}_{t-\Delta t} + \Delta \underline{u}_t$$

$$\dot{\underline{u}}_t = \dot{\underline{u}}_{t-\Delta t} + \Delta \dot{\underline{u}}_t$$

$$\ddot{\underline{u}}_t = \ddot{\underline{u}}_{t-\Delta t} + \Delta \ddot{\underline{u}}_t$$

Método de Newmark

- Undamped case (continue)

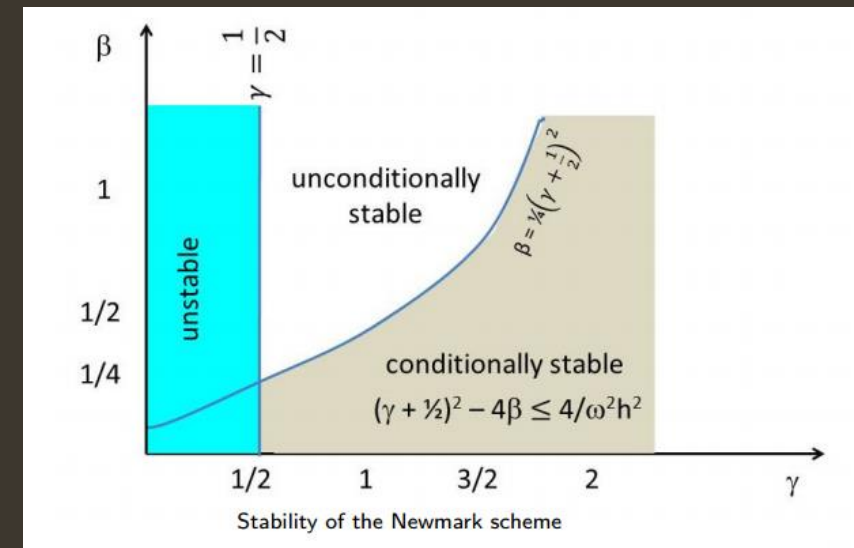
- the algorithm is *conditionally* stable if

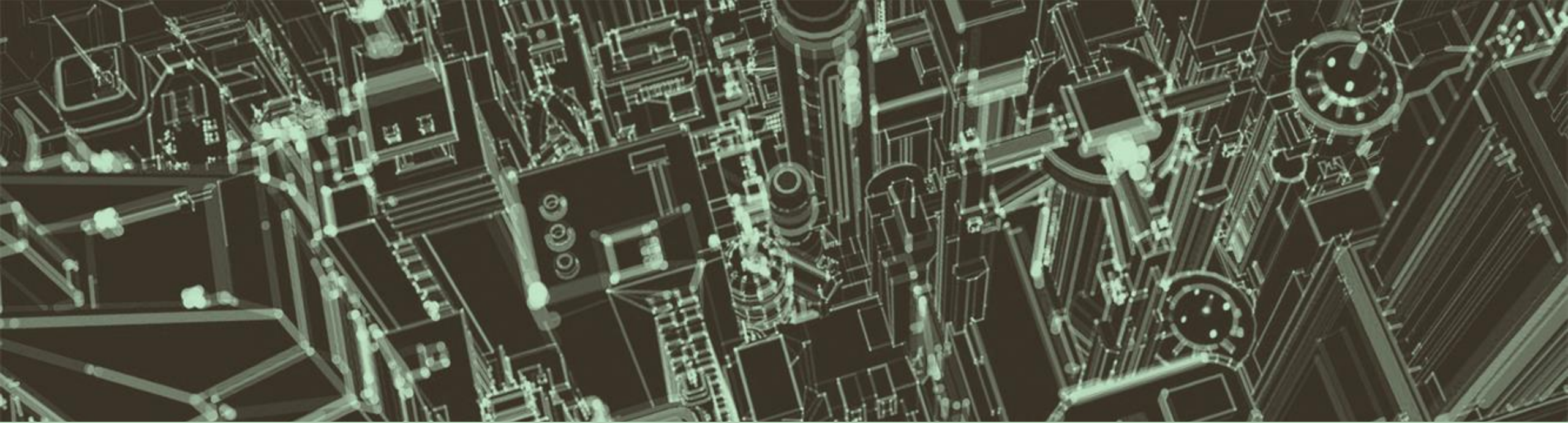
$$\gamma \geq \frac{1}{2}$$

- it is *unconditionally* stable if furthermore $\beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2$ — that is,

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2$$

- the choice $\gamma = \frac{1}{2}$ and $\beta = \frac{1}{4}$ leads to an unconditionally stable time-integration operator of maximum accuracy





Resultados e Discussões



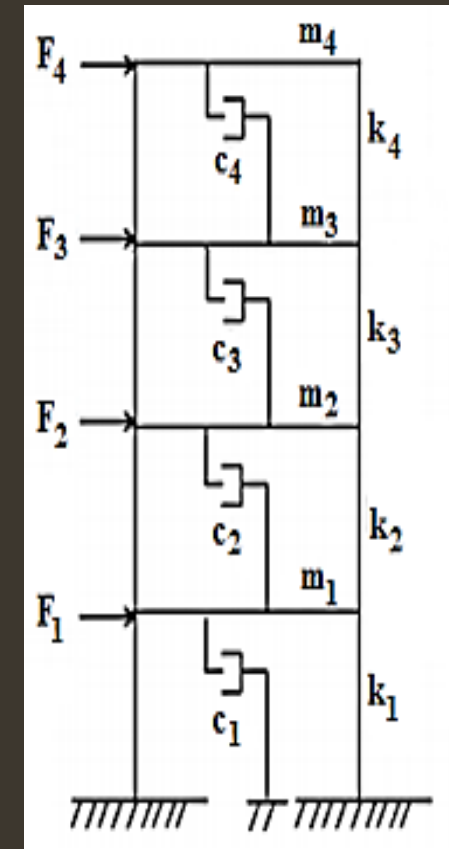
Modelo adotado – Estabilidade do método de Newmark

- Assume-se um edifício de quatro pavimentos com as seguintes propriedades estruturais:

$$M = 0.7764 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad K = 120 \begin{bmatrix} +1.0 & -1.0 & +0.0 & +0.0 \\ -1.0 & +2.5 & -1.5 & +0.0 \\ +0.0 & -1.5 & +3.5 & -2.0 \\ +0.0 & +0.0 & -2.0 & +4.5 \end{bmatrix}$$

$$C = 0.5 \begin{bmatrix} +1.0 & -1.0 & +0.0 & +0.0 \\ -1.0 & +3.0 & -2.0 & +0.0 \\ +0.0 & -2.0 & +5.0 & -3.0 \\ +0.0 & +0.0 & -3.0 & +7.0 \end{bmatrix}$$

onde as matrizes 'M', 'K' e 'C' representam as matrizes de massa, rigidez e amortecimento respectivamente.



Curva de carregamento & Condições Iniciais

Condições Iniciais:

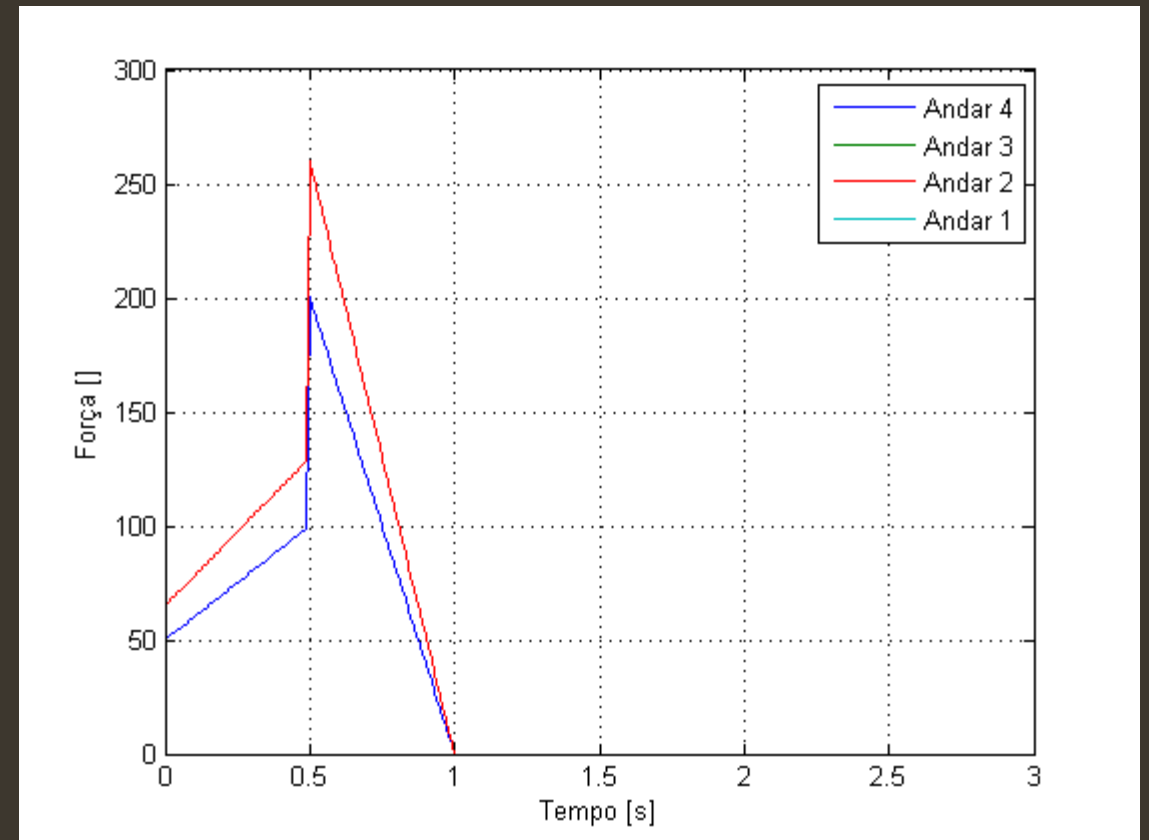
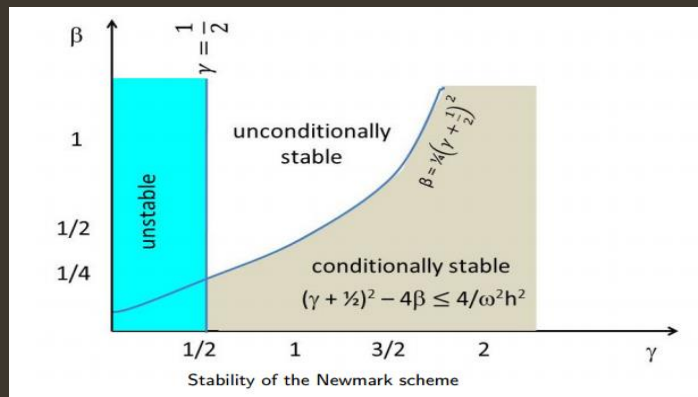
$$u(0) = \dot{u}(0) = 0$$

Intervalo de análise:

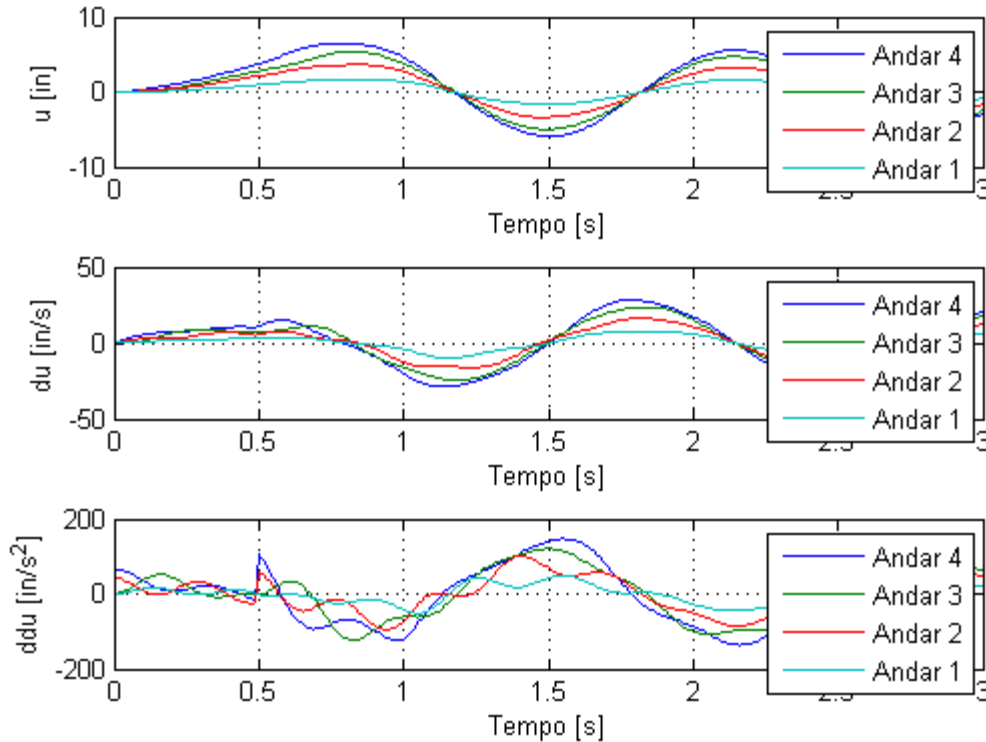
$i = 10$

$dt = 0.01 + (i - 1) * 0.01 \text{ s}$

Variação dos parâmetros alpha e beta

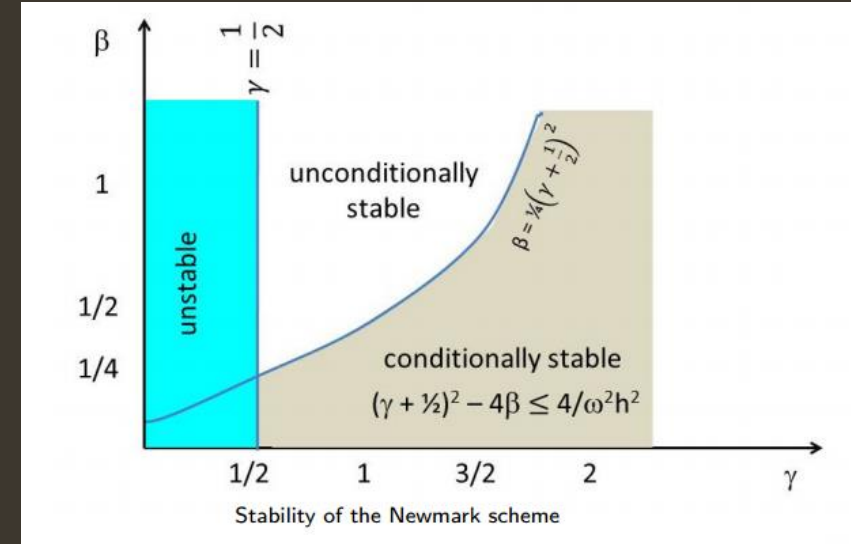
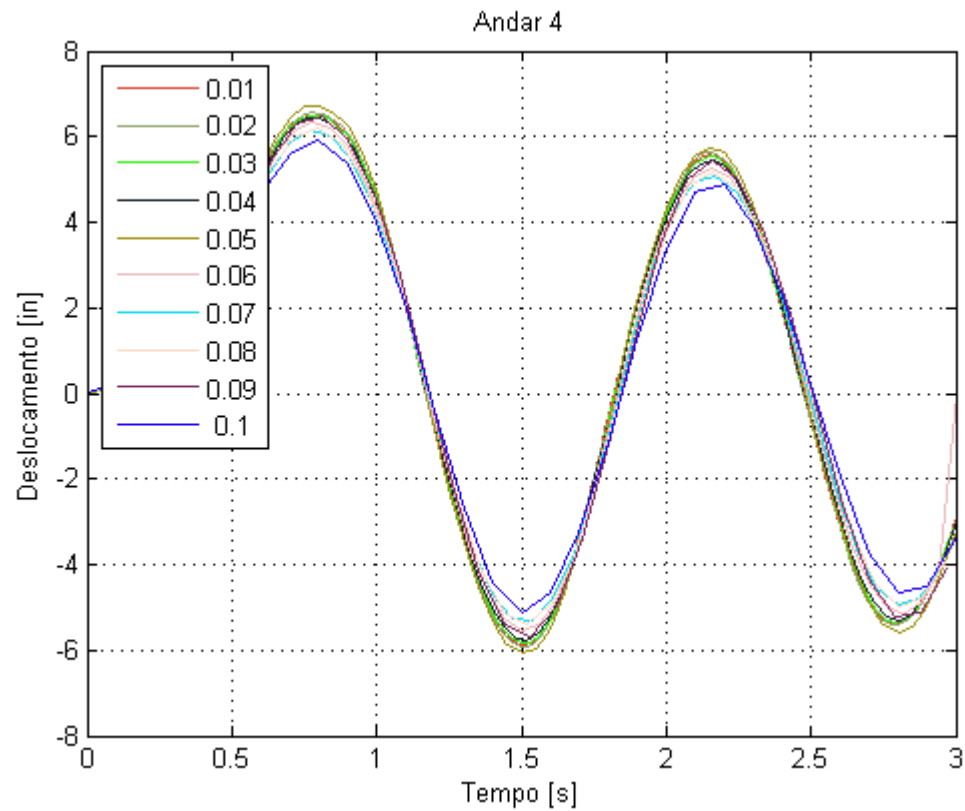


Perfil de Carregamento aplicado a estrutura de um edifício de quatro pavimentos.

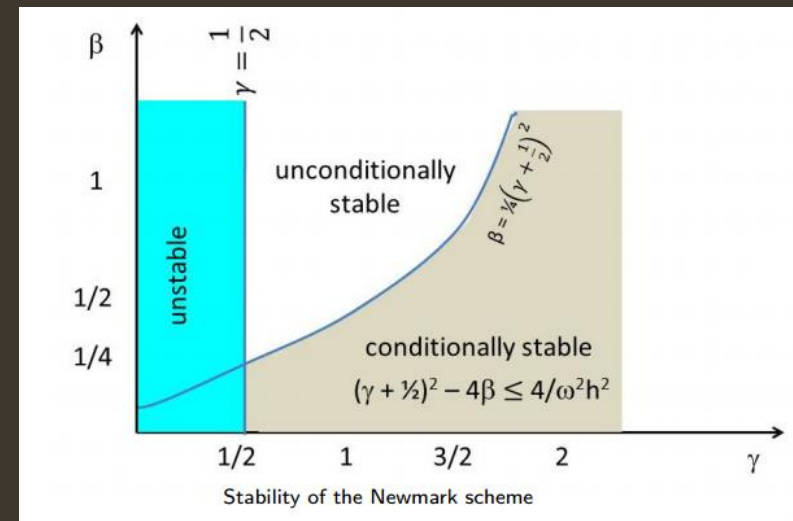
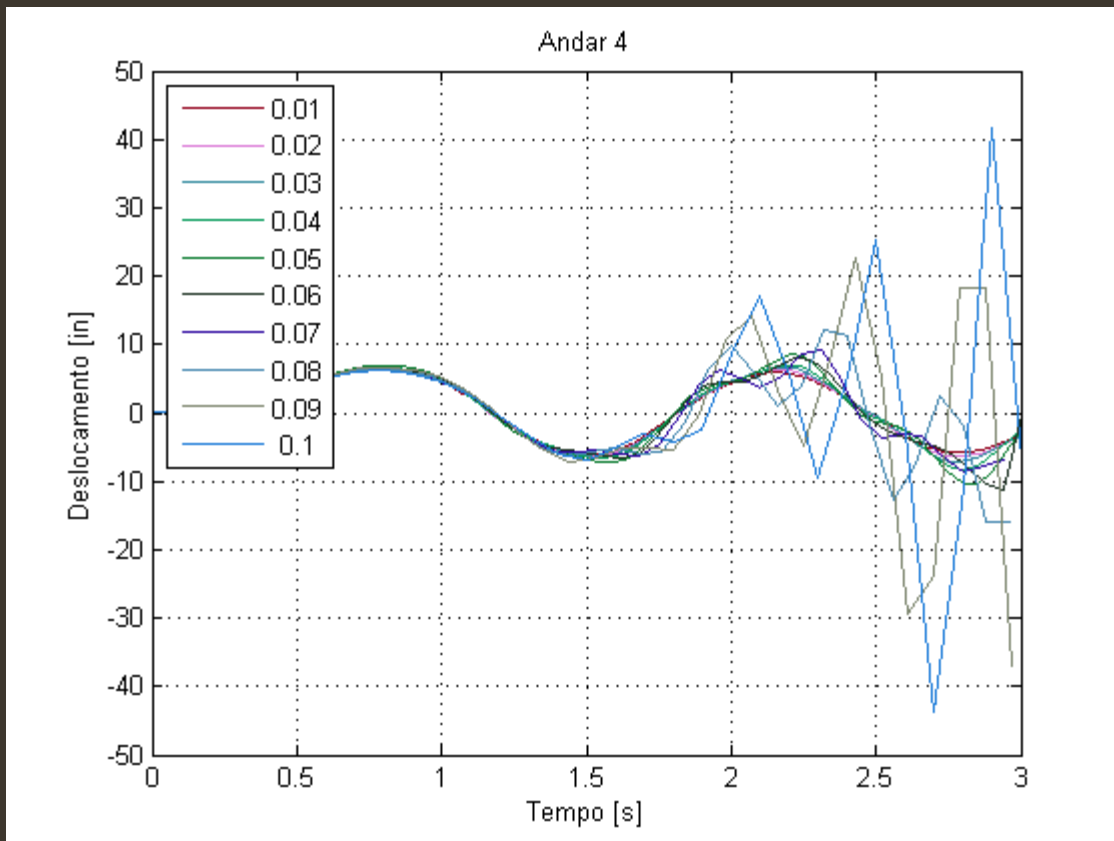


Caso de referência, em que os parâmetros α e β do método são definidos de modo a representar o caso em que o algoritmo é incondicionalmente estável ($\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.25$).

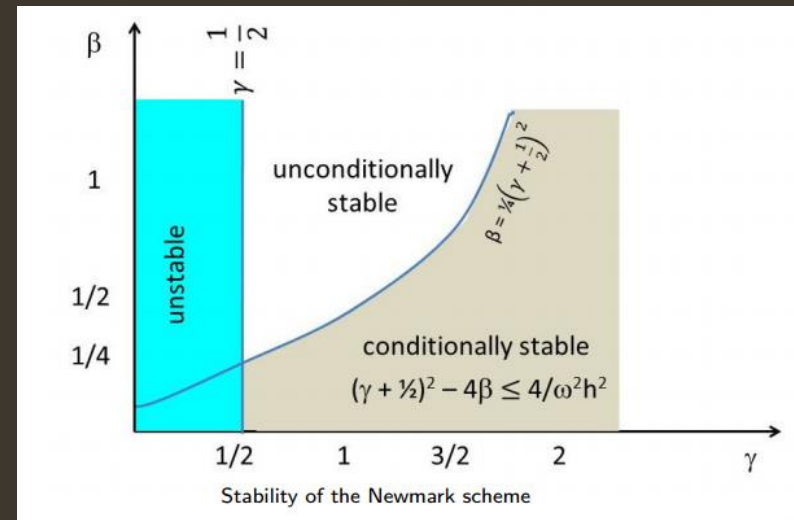
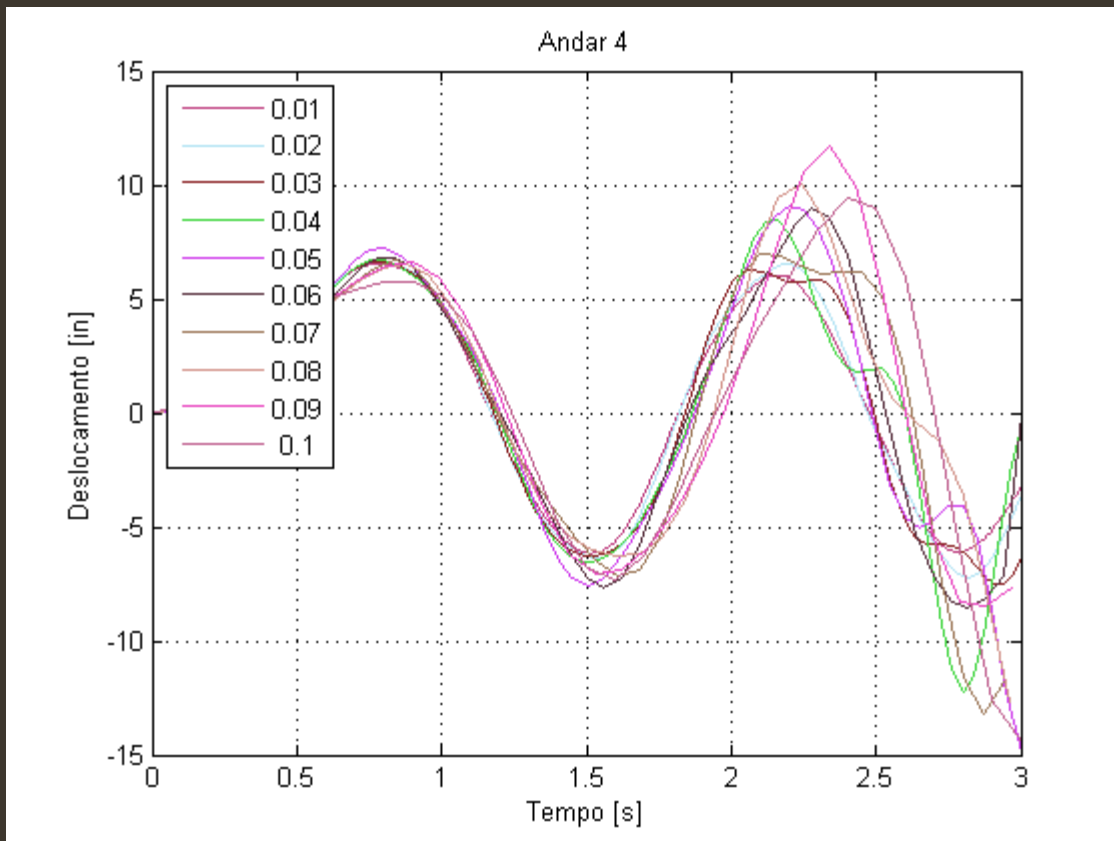
Resposta dos deslocamentos, velocidades e acelerações em função do tempo para um passo $dt = 0,01 s$.



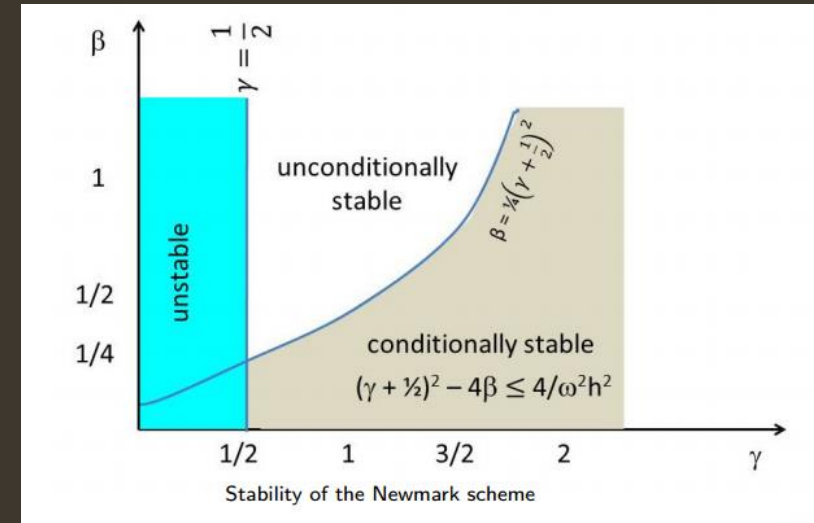
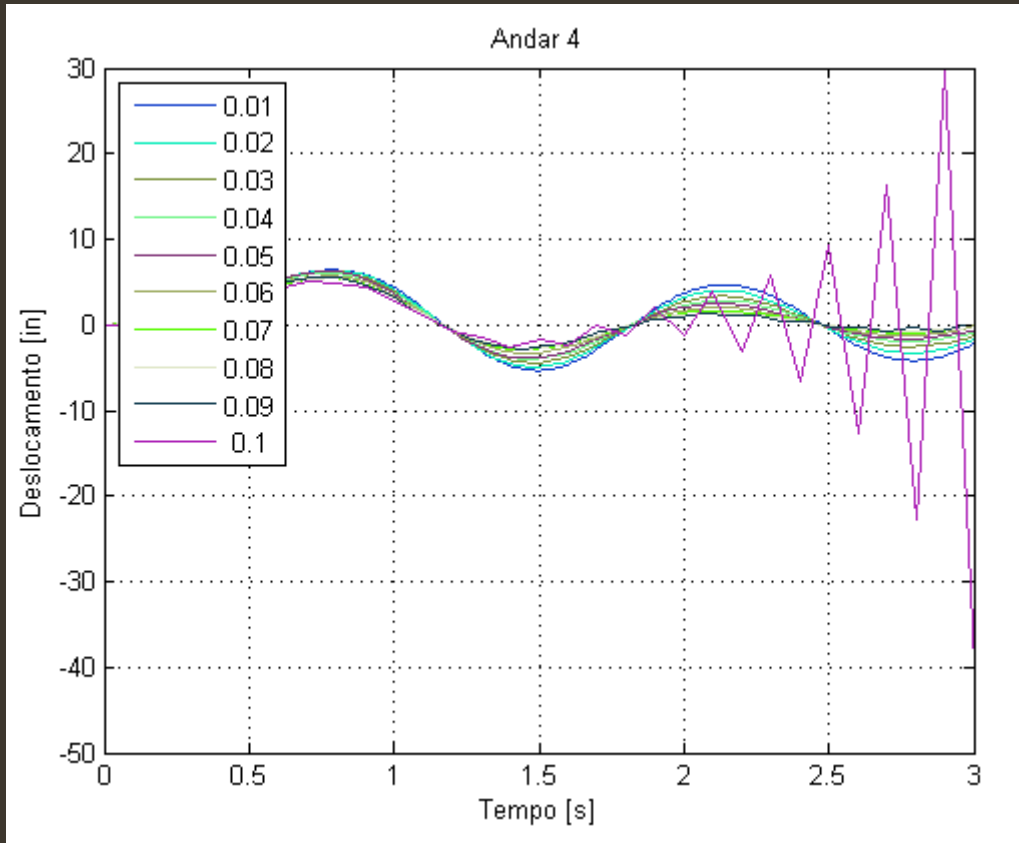
Resposta parametrizada do deslocamento do andar superior em relação ao passo de tempo 'dt' para valores de ' $\alpha = 0.5$ ' e ' $\beta = 0.25$ '.



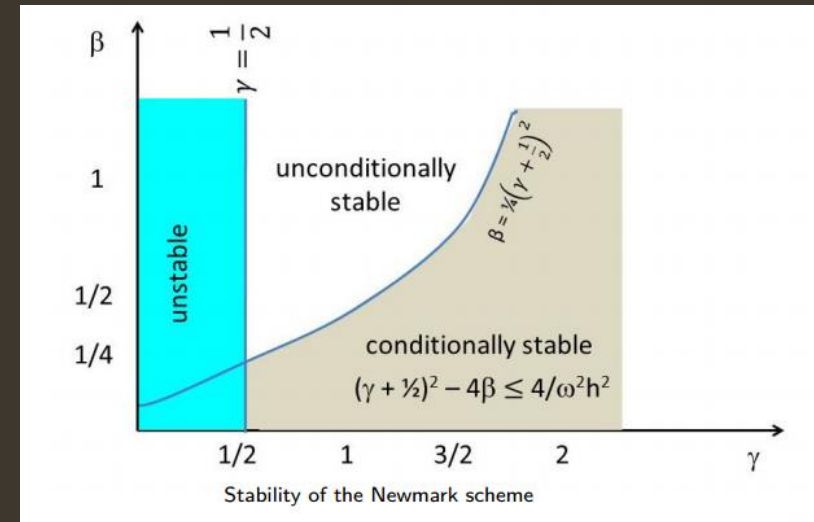
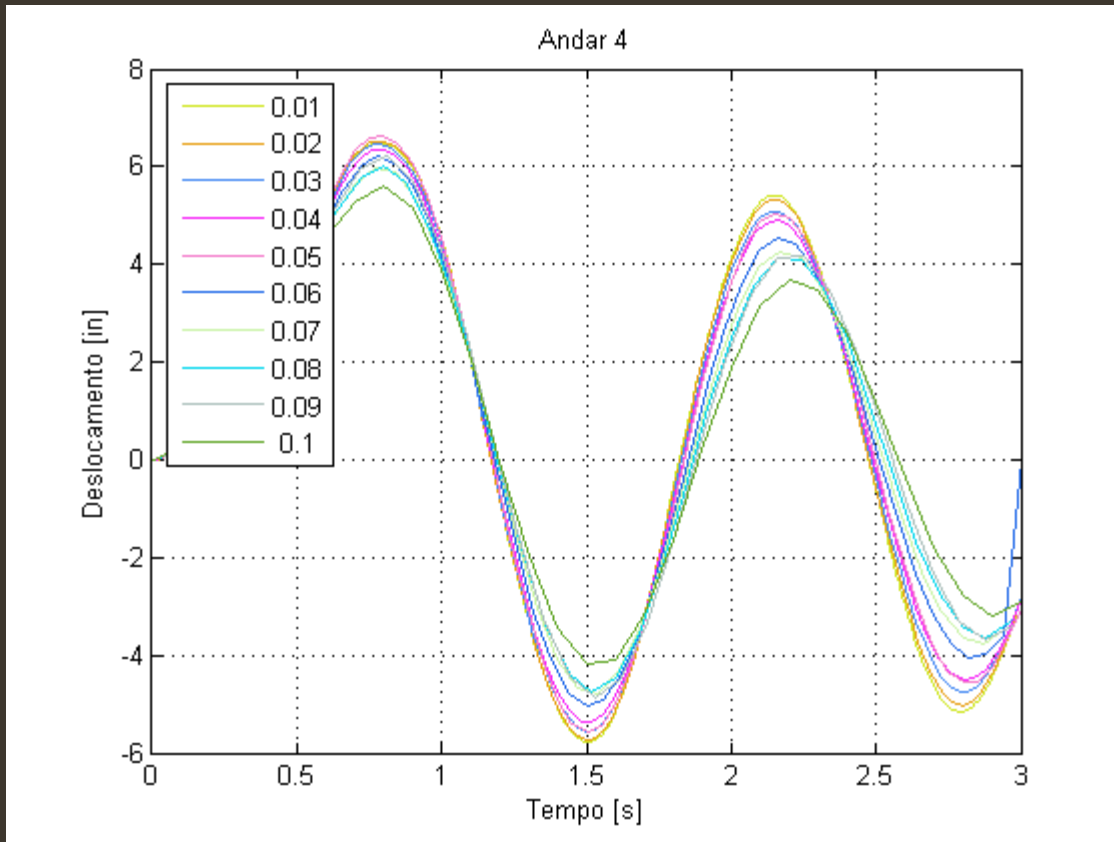
Resposta parametrizada do deslocamento do andar superior em relação ao passo de tempo 'dt' para valores de ' $\alpha = 0.2$ ' e ' $\beta = 0.1$ '.



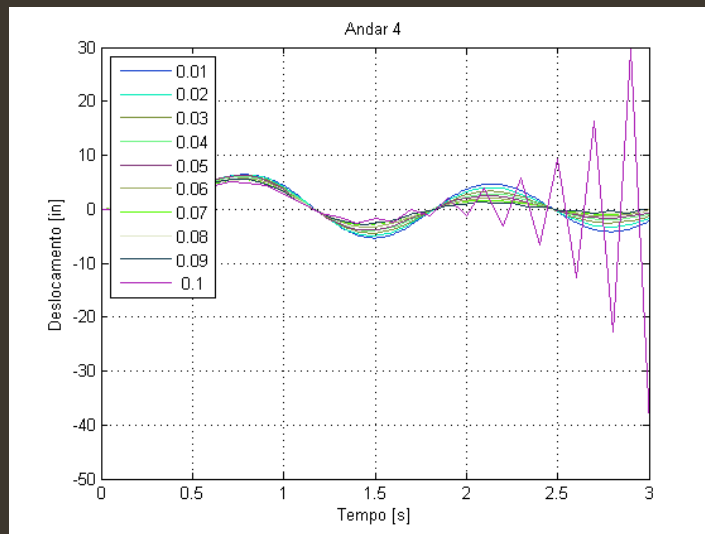
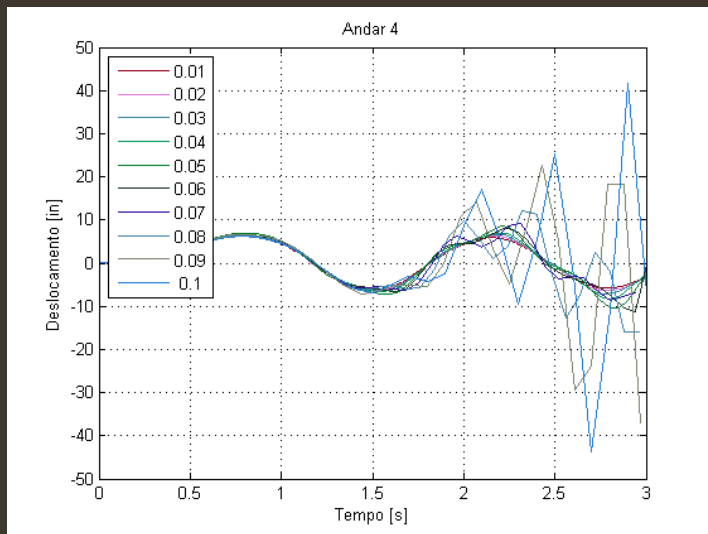
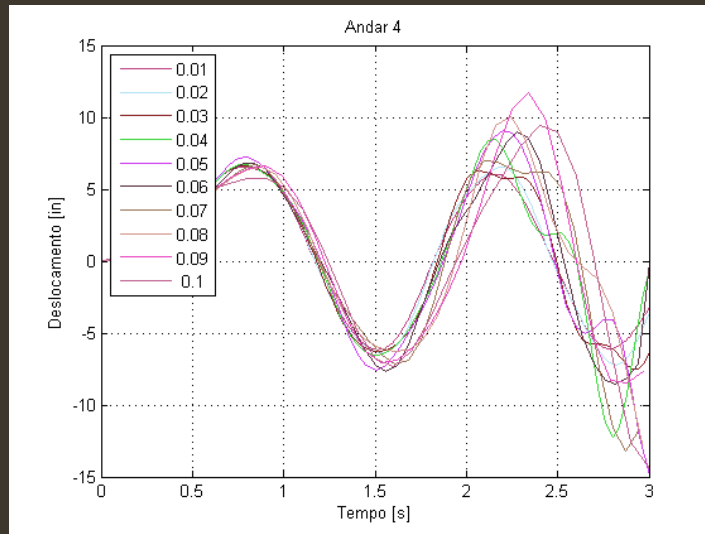
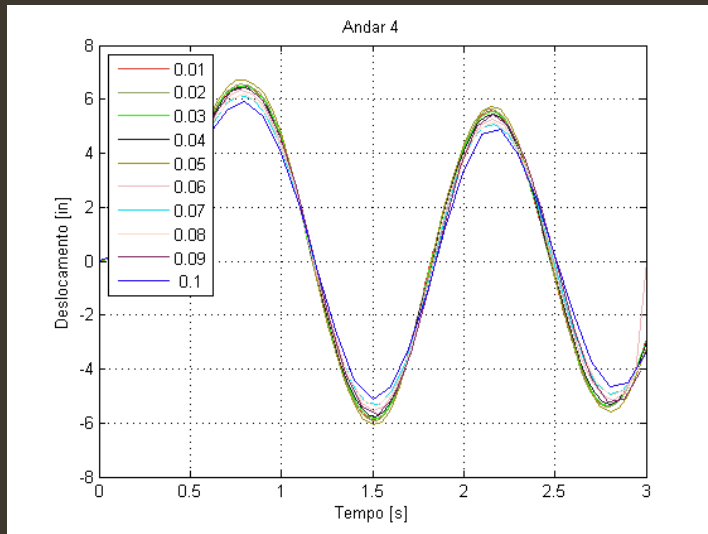
Resposta parametrizada do deslocamento do andar superior em relação ao passo de tempo ' dt ' para valores de ' $\alpha = 0.05$ ' e ' $\beta = 0.9$ '.



Resposta parametrizada do deslocamento do andar superior em relação ao passo de tempo 'dt' para valores de ' $\alpha = 1.5$ ' e ' $\beta = 0.375$ '.



Resposta parametrizada do deslocamento do andar superior em relação ao passo de tempo 'dt' para valores de ' $\alpha = 0.65$ ' e ' $\beta = 0.65$ '.



Comparação das curvas de deslocamento no tempo para valores de incremento no tempo parametrizados.

Modelo adotado – Análise paramétrica Shear B.

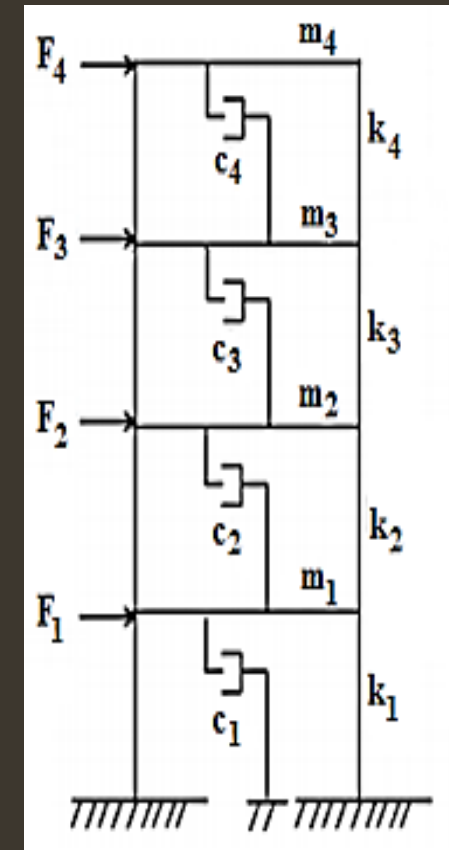
- Assume-se o mesmo edifício de quatro pavimentos com as seguintes propriedades estruturais:

$$M = 0.7764 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = 0.5 \begin{bmatrix} +1.0 & -1.0 & +0.0 & +0.0 \\ -1.0 & +3.0 & -2.0 & +0.0 \\ +0.0 & -2.0 & +5.0 & -3.0 \\ +0.0 & +0.0 & -3.0 & +7.0 \end{bmatrix}$$

Porém, a matriz de rigidez 'K' sendo descrita em função do parâmetro 'k₀', dada por:

$$K = k_0 \begin{bmatrix} +1.0 & -1.0 & +0.0 & +0.0 \\ -1.0 & +2.5 & -1.5 & +0.0 \\ +0.0 & -1.5 & +3.5 & -2.0 \\ +0.0 & +0.0 & -2.0 & +4.5 \end{bmatrix}$$

onde as matrizes 'M', 'K' e 'C' representam as matrizes de massa, rigidez e amortecimento respectivamente.



Modelo adotado – Análise paramétrica Shear B.

Condições Iniciais:

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0$$

Intervalo de análise:

$$t_{final} = 3 \text{ s}$$

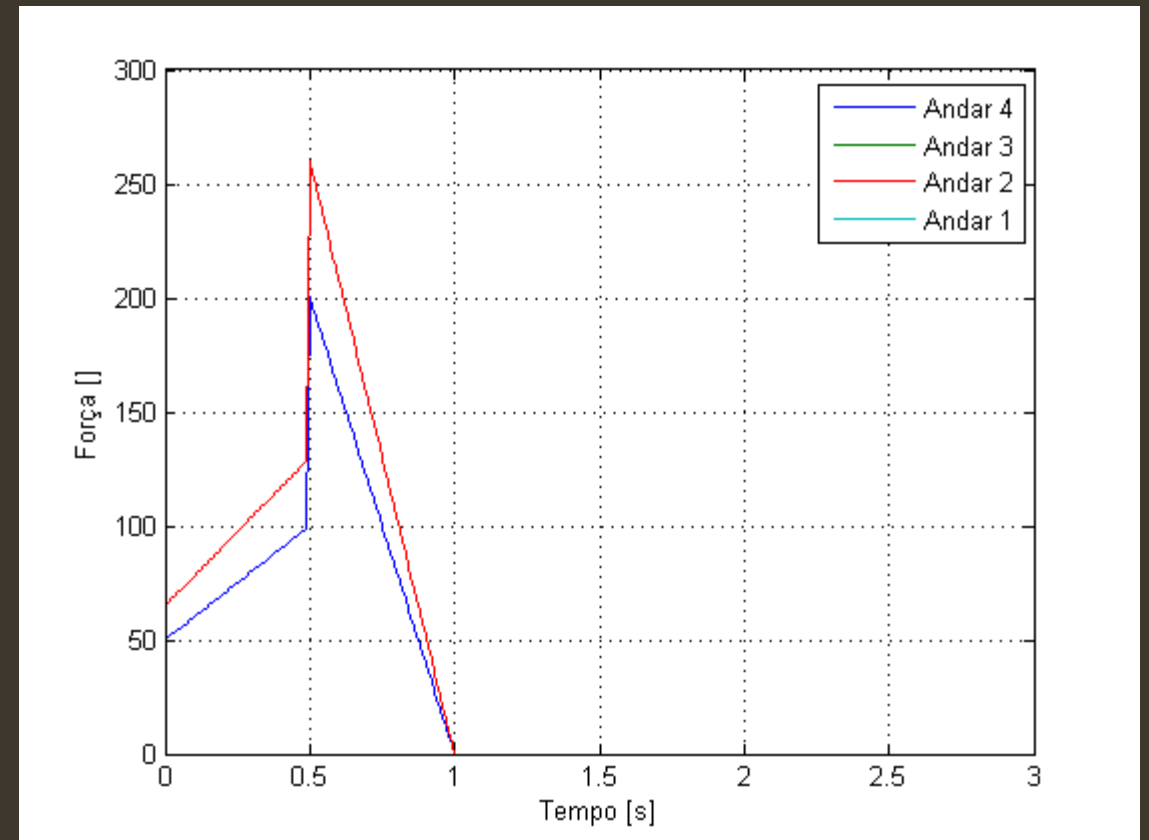
$$dt = 0.01 \text{ s}$$

Mantendo os parâmetros alpha e beta para o caso incondicionalmente estável, isto é, $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.25$

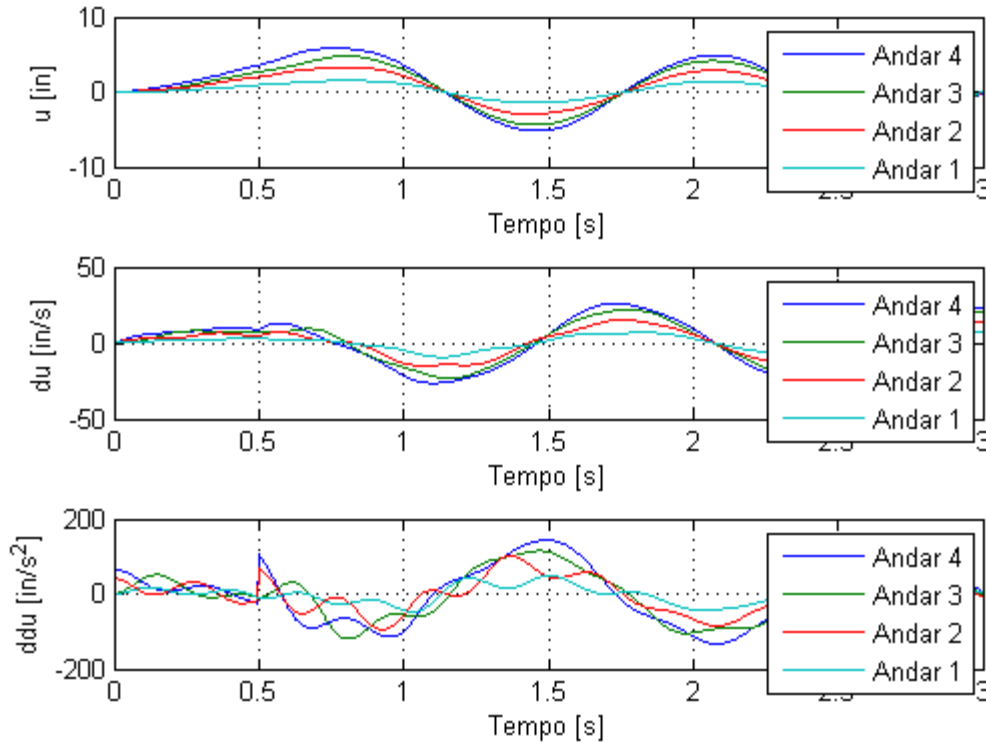
Variando a rigidez K – primeira hipótese:

$$K = K_0 * (1.0 + i * 0.1)$$

K → 2K

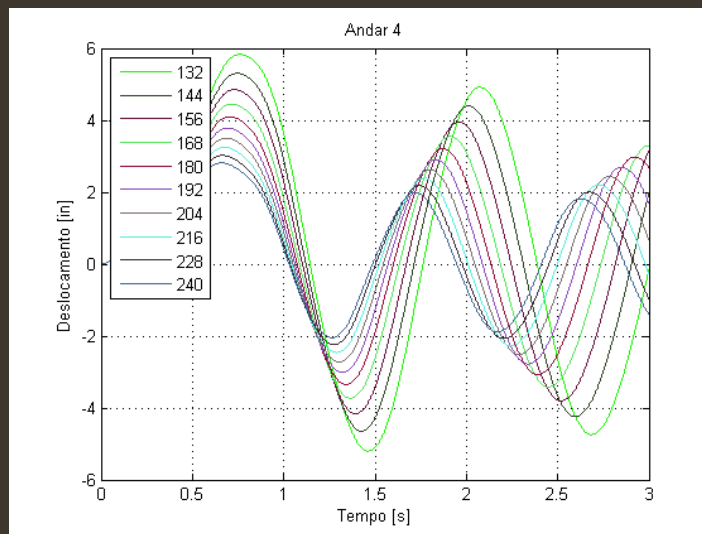
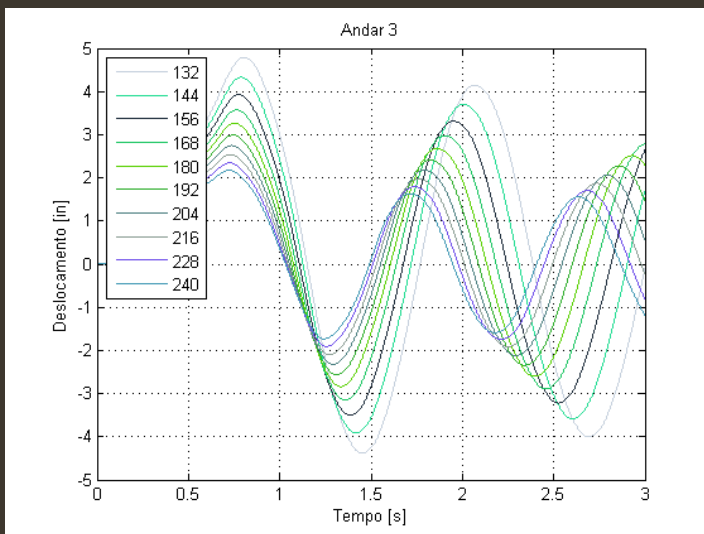
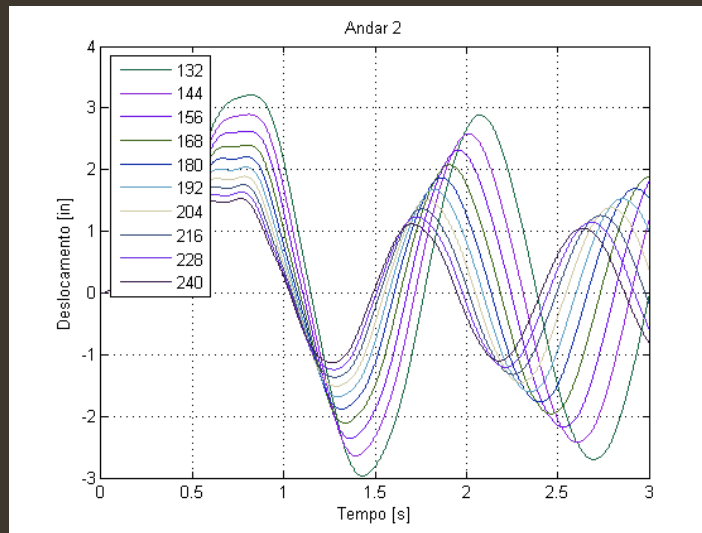
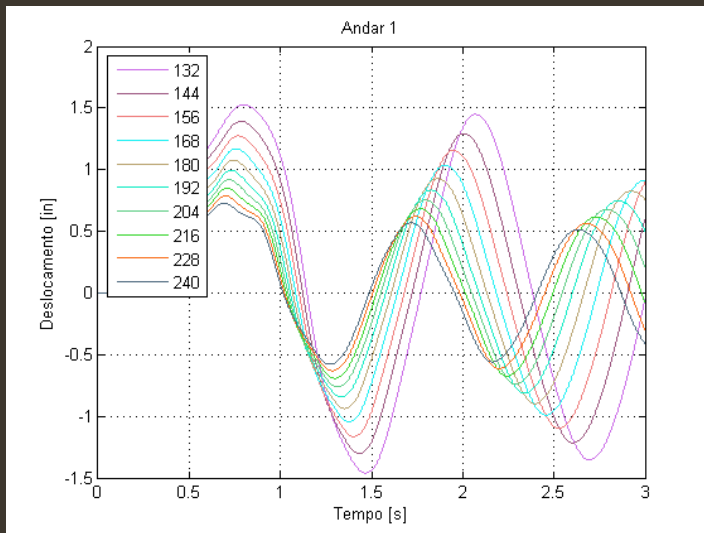


Perfil de Carregamento aplicado a estrutura de um edifício de quatro pavimentos.



Caso de referência, em que os parâmetros α e β do método são definidos de modo a representar o caso em que o algoritmo é incondicionalmente estável ($\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.25$).

Resposta dos deslocamentos, velocidades e acelerações em função do tempo para um passo $dt = 0,01 s$.



Resultados para os deslocamentos do primeiro ao quarto pavimento, respectivamente.

	• PRIMEIRO PAVIMENTO			
MÁX.	RIGIDEZ K	MÍN.	RIGIDEZ K	
1,5 in	132 N	0,54 in	240 N	
	• SEGUNDO PAVIMENTO			
MÁX.	RIGIDEZ K	MÍN.	RIGIDEZ K	
3,2 in	132 N	1,6 in	240 N	
	• TERCEIRO PAVIMENTO			
MÁX.	RIGIDEZ K	MÍN.	RIGIDEZ K	
4,8 in	132 N	2,1 in	240 N	
	• QUARTO PAVIMENTO			
MÁX.	RIGIDEZ K	MÍN.	RIGIDEZ K	
5,9 in	132 N	2,9 in	240 N	

Resposta parametrizada do deslocamento do andar inferior ao superior, em relação ao passo de tempo 'dt' para valores de ' $\alpha = 0.5$ ' e ' $\beta = 0.25$ '.

Modelo adotado – Análise paramétrica Shear B.

Condições Iniciais:

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0$$

Intervalo de análise:

$$t_{final} = 3 \text{ s}$$

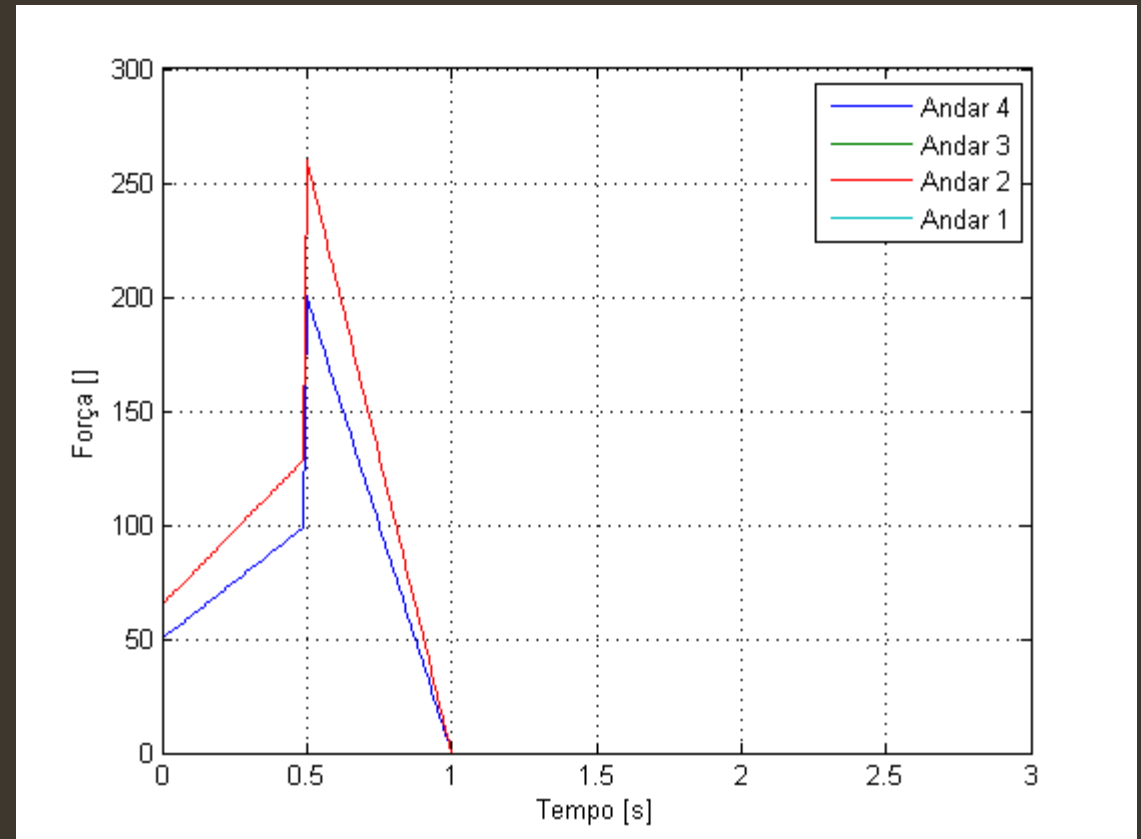
$$dt = 0.01 \text{ s}$$

Mantendo os parâmetros alpha e beta para o caso incondicionalmente estável, isto é, $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.25$

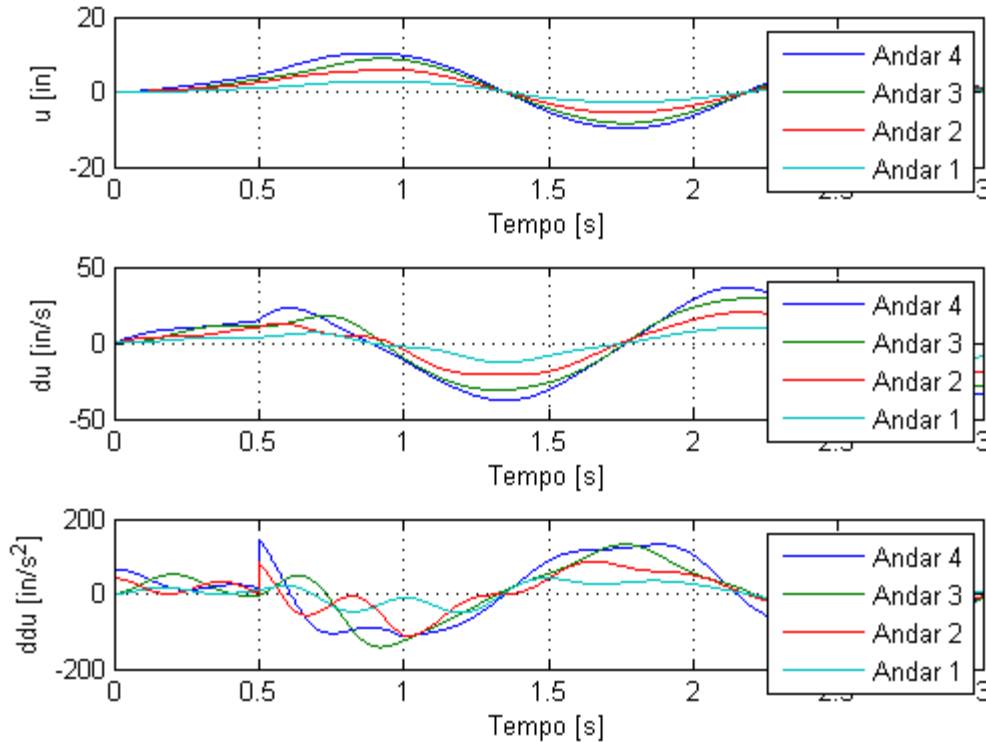
Variando a rigidez K – primeira hipótese:

$$K = K_0 * (0.5 + i * 0.1)$$

0,5K \longrightarrow 1,5K

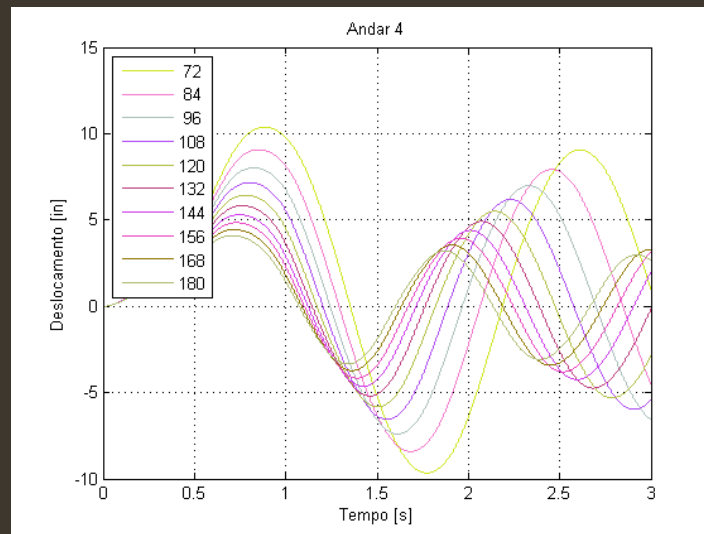
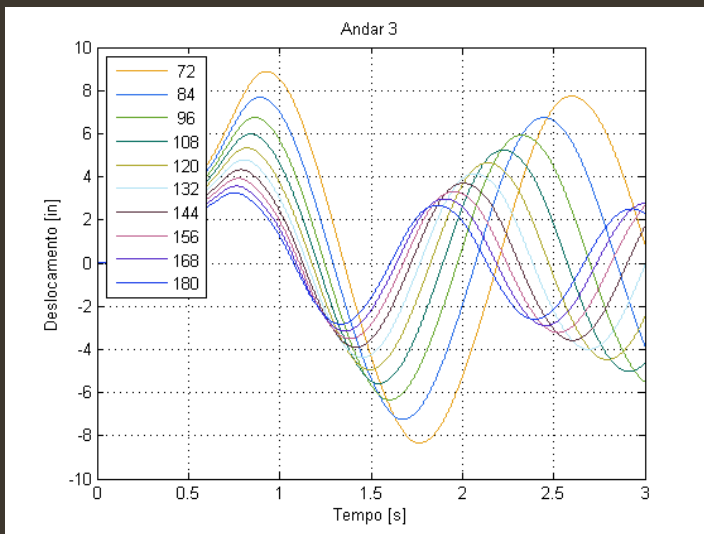
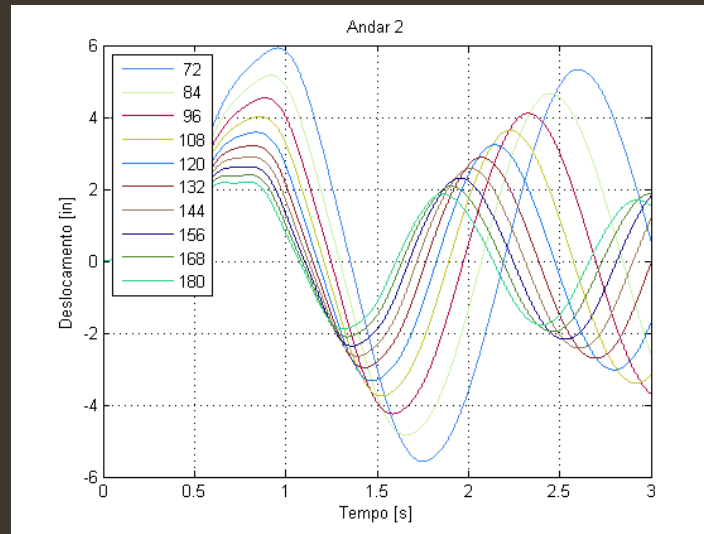
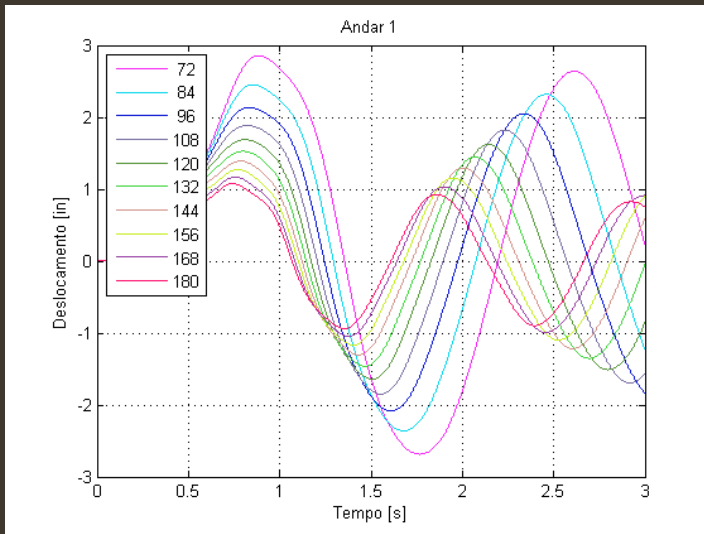


Perfil de Carregamento aplicado a estrutura de um edifício de quatro pavimentos.



Caso de referência, em que os parâmetros α e β do método são definidos de modo a representar o caso em que o algoritmo é incondicionalmente estável ($\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.25$).

Resposta dos deslocamentos, velocidades e acelerações em função do tempo para um passo $dt = 0,01 s$.



Resultados para os deslocamentos do primeiro ao quarto pavimento, respectivamente.

• PRIMEIRO PAVIMENTO			
MÁX.	RIGIDEZ K	MÍN.	RIGIDEZ K
2,8 in	72 N	1,1 in	180 N
• SEGUNDO PAVIMENTO			
MÁX.	RIGIDEZ K	MÍN.	RIGIDEZ K
6,0 in	72 N	2,1 in	180 N
• TERCEIRO PAVIMENTO			
MÁX.	RIGIDEZ K	MÍN.	RIGIDEZ K
8,5 in	72 N	3,5 in	180 N
• QUARTO PAVIMENTO			
MÁX.	RIGIDEZ K	MÍN.	RIGIDEZ K
10,1 in	72 N	4,7 in	180 N

Resposta parametrizada do deslocamento do andar inferior ao superior, em relação ao passo de tempo 'dt' para valores de ' $\alpha = 0.5$ ' e ' $\beta = 0.25$ '.

Conclusões

- Em relação a estabilidade do método, temos que para valores de alpha e beta definidos é possível determinar dentro do gráfico apresentado o possível comportamento do método em relação ao incremento definido. Valendo lembrar que a acurácia do mesmo é função destes mesmos parâmetros.
- Mantendo os parâmetros de integração alpha valendo 0,5 e beta valendo 0,25, que determinam a estabilidade e variando os parâmetros da rigidez, observou-se que aumentando a rigidez entre “k” e duas vezes “k” da estrutura, os deslocamentos, velocidades e acelerações foram menores quando comparado com a estrutura variando a rigidez entre “k” de 50% abaixo e 50% acima do “k” adotado, porém em relação a variação no tempo a primeira hipótese atingiu seus máximos em menor intervalo de tempo e para segunda hipótese os máximos foram atingidos em maior intervalo de tempo.

Referências

- [1] Alves, L.S. Controle De Vibrações Em Edifícios Altos Sujeitos A Vento Ou Terremoto, Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás, 2015.
- [2] Paz, M. Structural Dynamics: Theory and Computation. 2.ed. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 561p., 1985.
- [3] Brasil, Reyolando M.L.R.F., Não-Linearidade Geométrica na Dinâmica de Estruturas Aperticadas Planas: Um Tratamento Pelo Método dos Elementos Finitos”. Tese submetida para obtenção de título de doutor em Engenharia Civil pela Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, Brasil, 1990.
- [5] Wriggers, P., Nonlinear Finite Element Methos, Springer, 2008.
- [5] Mechanical Vibrations
-https://web.stanford.edu/group/frg/course_work/AA242B/CA-AA242B-Ch7.pdf,
acessado em 10/05/2017