

# Um estudo da dinâmica e estabilidade de um tubo horizontal com escoamento interno utilizando um modelo de ordem reduzida para o problema linearizado.

Guilherme Jorge Vernizzi Lopes<sup>1</sup>  
Igor Mancilla Lourenço<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – EPUSP

Seminário da disciplina PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas

## RESUMO

Neste trabalho é apresentado o desenvolvimento para a obtenção da equação de movimento de tubos horizontais contendo um fluido em escoamento em seu interior. As equações são obtidas de modo que apenas termos lineares estejam presentes em sua apresentação final. Por fim, é proposto um modelo de ordem reduzida para as vibrações da estrutura, com um único grau de liberdade, permitindo uma análise sobre a dependência das frequências de vibração com a velocidade do escoamento interno, bem como sobre as condições de estabilidade deste movimento.

**PALAVRAS-CHAVE:** tubos com escoamento interno, instabilidade de movimento, modelo de ordem reduzida.

## INTRODUÇÃO

Estruturas compostas por tubos conduzindo fluidos em escoamento estão presentes em atividades industriais e exploração de petróleo offshore, sendo o estudo do comportamento dinâmico destas estruturas de necessários para a realização de análises de resistência mecânica e à fadiga.

O uso de modelos de ordem reduzida permite uma compreensão física do problema estudado e das condições que o afetam, o que pode se tornar um trabalho extremamente difícil ou até mesmo impossível quando se parte diretamente para modelos de alta hierarquia. Além disso, dependendo das condições do problema, o modelo de ordem reduzida pode fornecer resultados satisfatórios para a análise desejada, o que diminui custos operacionais da análise.

## EQUAÇÃO DE MOVIMENTO PARA TUBO HORIZONTAL

Para a obtenção da equação de movimento, é utilizada uma derivação newtoniana, sendo feito o mesmo que o apresentado por Paidoussis M. P. (2001). Na derivação aqui apresentada, não será incorporado o efeito de dissipações internas de energia, e a interação entre o tubo e o fluido que o envolve será modelada como um amortecedor linear constante distribuído ao longo do comprimento do tubo. Na dedução, os deslocamentos transversais do tubo, bem como todas as suas derivadas em relação à coordenada horizontal são considerados pequenos quando comparados ao comprimento horizontal do tubo, de forma que produtos destes termos serão negligenciados na dedução das equações de movimento. A relação mencionada está escrita na equação 1, sendo “ $w(x,t)$ ” o deslocamento vertical do tubo.

$$\frac{\partial^n w(x,t)}{\partial x^n} \frac{1}{L} = O(\epsilon), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \epsilon \ll 1 \quad (1)$$

Na figura abaixo é mostrada uma porção infinitesimal do fluido sendo conduzido pelo tubo, e as forças que atuam sobre o tubo.

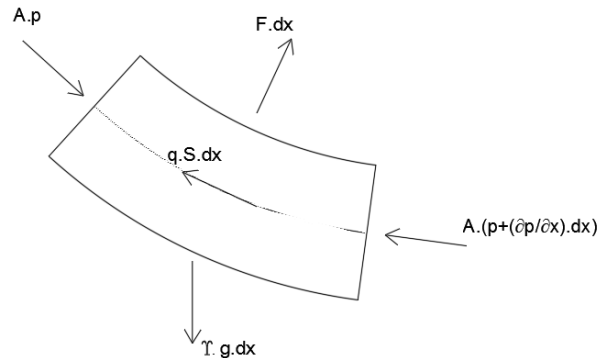


Figura 1

Os termos que aparecem na figura 1, “ $p$ ”, “ $A$ ”, “ $F$ ”, “ $q$ ”, “ $S$ ”, “ $g$ ” e “ $\gamma$ ”, são respectivamente a pressão do fluido, a área de condução do tubo, a força normal ao eixo do tubo exercida pelas paredes do tubo sobre o fluido, o cisalhamento existente entre o fluido e a parede interna do tubo, o perímetro da superfície interna do tubo, a aceleração da gravidade e a massa por unidade de comprimento do fluido dentro do tubo.

Escrevendo o equilíbrio de forças nas direções horizontal e vertical, chega-se às equações 2 e 3 apresentadas abaixo, onde “ $a_{fx}$ ” é a aceleração do fluido na direção horizontal e “ $a_{fy}$ ” é a aceleração do fluido na direção vertical.

$$F \frac{\partial w}{\partial x} - A \frac{\partial p}{\partial x} - qS = \gamma a_{fx} \quad (2)$$

$$A \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial w}{\partial x} \right) + F + qS \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma g = \gamma a_{fy} \quad (3)$$

Na figura abaixo é apresentada a porção infinitesimal do tubo que envolve a porção de fluido mostrada na figura 1, e as forças que atuam sobre o tubo.

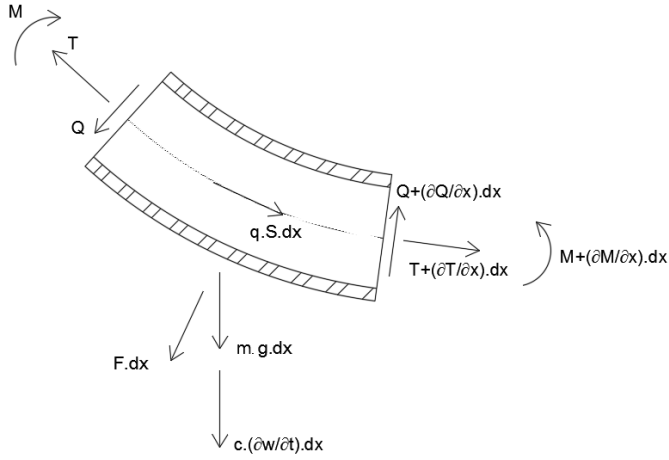


Figura 2

Os termos adicionais que aparecem na figura 2, “Q”, “N”, “M”, “c” e “m” são, respectivamente, a força cortante, a força normal, o momento fletor, a constante de amortecimento e a massa por unidade de comprimento do tubo.

Escrevendo o equilíbrio de forças na direção horizontal e vertical e o equilíbrio de momentos, chega-se as equações 4, 5 e 6 apresentadas abaixo, sendo desprezada a aceleração horizontal do tubo por ser de um infinitésimo de ordem superior às verticais (Paidoussis, M. P., 1998)

$$\frac{\partial T}{\partial x} - F \frac{\partial w}{\partial x} + qS = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right) - F - mg - c \frac{\partial w}{\partial t} - qS \frac{\partial w}{\partial x} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial x} = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (6)$$

Sendo na equação 6 “E” o módulo de elasticidade do material do tubo, “I” o momento de inercia da seção do tubo e tendo sido adotada a hipótese de Bernoulli-Euler.

A velocidade do tubo pode ser escrita em forma vetorial como:

$$\vec{V}_t = \frac{\partial w}{\partial x} \vec{j} \quad (7)$$

Escrevendo a velocidade do fluido como sendo a soma da velocidade do tubo com a velocidade relativa entre o fluido e o tubo “U”, pode-se definir a forma do operador derivada material para o fluido.

$$\begin{aligned} \vec{V}_f &= \vec{V}_t + U \left( \vec{i} + \frac{\partial w}{\partial x} \vec{j} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) (x\vec{i} + w\vec{j}) \\ &= \frac{D}{dt} (x\vec{i} + w\vec{j}) \end{aligned} \quad (8)$$

Com isso, pode-se obter as acelerações horizontal e vertical do fluido, resultando nas equações abaixo.

$$a_{fx} = \frac{D}{dt} \vec{V}_f \cdot \vec{i} = \frac{DU}{dt} \quad (9)$$

$$a_{fy} = \frac{D}{dt} \vec{V}_f \cdot \vec{j} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{DU}{dt} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (10)$$

Considerando agora apenas o caso de escoamento com velocidade constante dentro do tubo, somando as equações 2 e 4, e utilizando a equação 9, chega-se a:

$$\frac{\partial}{\partial x} (T - pA) = 0 \quad (11)$$

Somando agora as equações 3 e 5, e utilizando os resultados das equações 6 e 10 chega-se a:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (T - pA) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + 2\gamma U \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + (m + \gamma) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + (m + \gamma)g = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Pela equação 11 conclui-se que a diferença entre a força normal e a força de pressão do fluido não se alteram ao longo do comprimento do tubo. Por conveniência, será considerado a partir de agora que esta diferença é nula, isso poderia ser imaginado como a existência de um sistema de controle que garante uma força normal no tubo, apropriada para cada escoamento. Com isso, a equação de movimento é finalmente escrita na equação 13.

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \gamma U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\gamma U \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + 2\gamma U \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + \\ + (m + \gamma) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + (m + \gamma)g = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

#### MODELO DE ORDEM REDUZIDA

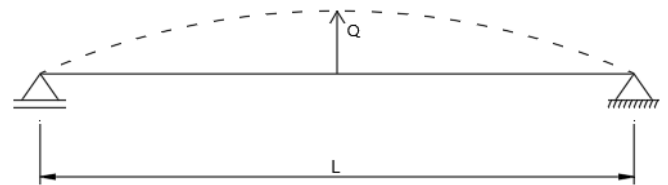


Figura 3

Será estudado o caso em que o tubo constitui uma via bi apoiada. Realizando uma separação de variáveis, e utilizando como função espacial o modo de vibração da viga de Euler (Blevins, R. D., 2001) chega-se a:

$$w(x, t) = \text{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) f(t) \quad (14)$$

O modo utilizado atende as condições de contorno do problema proposto, a saber, deslocamento nulo nas duas extremidades da viga. Substituindo o resultado na equação 13 e multiplicando o resultado por  $\text{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right)$  e integrando no domínio [0,L], chega-se a equação que determina f(t), obtendo uma equação igual a de um oscilador de um grau de liberdade apresentado na figura 4.

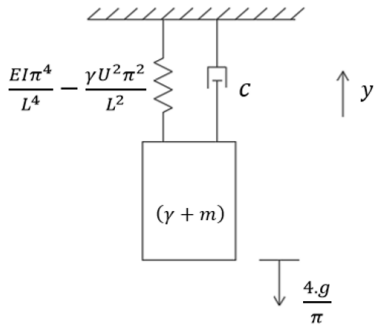


Figura 4

$$f''(t) + \frac{c}{m + \gamma} f'(t) + \frac{1}{m + \gamma} \left( \frac{EI\pi^4}{L^4} - \frac{\gamma U^2 \pi^2}{L^2} \right) f(t) = \frac{-4g}{\pi} \quad (15)$$

A solução geral para a equação 15 é dada por:

$$f(t) = \rho e^{-\varepsilon \omega t} \cos(\omega_D t - \theta) - \frac{4g}{\pi \omega^2} \quad (16)$$

$$\rho = \sqrt{\left( Q_0 + \frac{4g}{\pi \omega^2} \right)^2 + \left( \frac{\dot{Q}_0}{\omega_D} + \frac{\varepsilon \omega}{\omega_D} \left( Q_0 + \frac{4g}{\pi \omega^2} \right) \right)^2} \quad (17)$$

$$\theta = \arctg \left( \frac{\dot{Q}_0 + \varepsilon \omega \left( Q_0 + \frac{4g}{\pi \omega^2} \right)}{\omega_D \left( Q_0 + \frac{4g}{\pi \omega^2} \right)} \right) \quad (18)$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (19)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{m + \gamma} \left( \frac{EI\pi^4}{L^4} - \frac{\gamma U^2 \pi^2}{L^2} \right) \quad (20)$$

$$\varepsilon = \frac{c}{2(m + \gamma)\omega} \quad (21)$$

Sendo “ $Q_0$ ” e “ $\dot{Q}_0$ ” respectivamente o valor do deslocamento inicial no meio do vão e a velocidade inicial no meio do vão.

A partir da equação 15 é possível efetuar uma análise de estabilidade do movimento para o problema utilizando o primeiro método de Liapunov. Pode então ser escrito o seguinte sistema de equações nas variações da função  $f(t)$ :

$$\delta \dot{f}_1 = \delta f_2 \quad (22)$$

$$\delta \dot{f}_2 = \frac{-c}{m + \gamma} \delta f_2 - \frac{1}{m + \gamma} \left( \frac{EI\pi^4}{L^4} - \frac{\gamma U^2 \pi^2}{L^2} \right) \delta f_1 \quad (23)$$

Com isso, a equação característica do método de Liapunov para os autovalores  $\lambda$  fica:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m + \gamma} \lambda + \frac{1}{m + \gamma} \left( \frac{EI\pi^4}{L^4} - \frac{\gamma U^2 \pi^2}{L^2} \right) = 0 \quad (24)$$

Que fornece a solução geral para os autovalores:

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4(m + \gamma) \left( \frac{EI\pi^4}{L^4} - \frac{\gamma U^2 \pi^2}{L^2} \right)}}{2(m + \gamma)} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4(m + \gamma)K}}{2(m + \gamma)} \quad (25)$$

Considerando a equação 25, podem ser analisados quatro cenários. Fazendo  $c < 0$  e  $K < 0$ , a raiz quadrada na equação sempre será um número real, de forma que, quando somado ao termo fora da raiz, ao menos um dos autovalores será real positivo, portanto, tem-se instabilidade.

Fazendo agora  $c < 0$  e  $K > 0$ , a raiz quadrada pode resultar complexa, de forma que os dois autovalores terão parte real positiva, ou, a raiz resultará real e em valor absoluto menor que “ $c$ ”, resultando em autovalores positivos, e tem-se novamente instabilidade.

Fazendo  $c > 0$  e  $K < 0$ , a raiz quadrada será real e em valor absoluto maior que “ $c$ ”, de forma que um dos autovalores será positivo, caracterizando também instabilidade.

Por fim, no caso em que  $c > 0$  e  $K > 0$ , a raiz pode resultar complexa, de forma que os dois autovalores terão parte real negativa, ou, a raiz resultará real com valor absoluto menor que “ $c$ ”, e ambos os autovalores serão negativos, de forma que este cenário é considerado estável.

Com isso ficam caracterizados dois casos críticos, a saber,  $c = 0$  e  $K = 0$ . Nos casos em que o parâmetro não nulo é negativo, pelos cenários apresentados, ocorre instabilidade, portanto, falta avaliar apenas os casos em que um parâmetro é nulo e o outro positivo. No caso  $c = 0$ , o decréscimo do posto da matriz que fornece a equação característica dos autovalores é igual a um, e a multiplicidade dos autovalores também é igual um, de forma que se tem estabilidade.

Para o caso  $K = 0$ , o decréscimo do posto da matriz que fornece a equação característica dos autovalores é zero, de forma que se tem instabilidade.

Ficam então caracterizadas a passagem de estabilidade para instabilidade dinâmica,  $c < 0$ , e a passagem de estabilidade para instabilidade estática,  $K = 0$ . Pela transição para instabilidade estática pode-se definir a velocidade crítica do escoamento que causa este cenário, como segue:

$$\left( \frac{EI\pi^4}{L^4} - \frac{\gamma U_{cr}^2 \pi^2}{L^2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma U_{cr}^2 \pi^2}{L^2} = \frac{EI\pi^4}{L^4} \Rightarrow U_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\gamma}} \quad (26)$$

O resultado encontrado na equação 26 é idêntico ao apresentado por Blevins (2001).

## EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para a realização da análise computacional deste problema, foi adotado um tubo com massa específica de  $1,4\text{g/cm}^3$ , módulo de elasticidade de  $830\text{ MPa}$ , diâmetro interno de  $194\text{mm}$  e externo de  $200\text{mm}$ . O vão tem  $4\text{m}$  de comprimento, o fluido tem massa específica de  $1,0\text{g/cm}^3$  e o coeficiente do amortecedor é  $c=90\text{Ns/m}$ . Com estas informações e as equações 16 a 21 calcularam-se os gráficos a seguir, sendo comparadas as situações de escoamento nulo e escoamento a 64% da velocidade crítica.

$V=0\text{m/s}$     $\omega=9,41\text{rad/s}$     $p=0,140\text{m}$

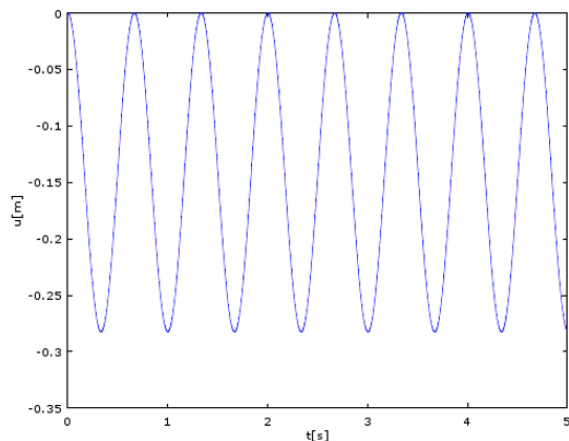


Gráfico 1 – Amortecimento nulo

$V=8\text{m/s}$     $\omega=7,22\text{rad/s}$     $p=0,239\text{m}$

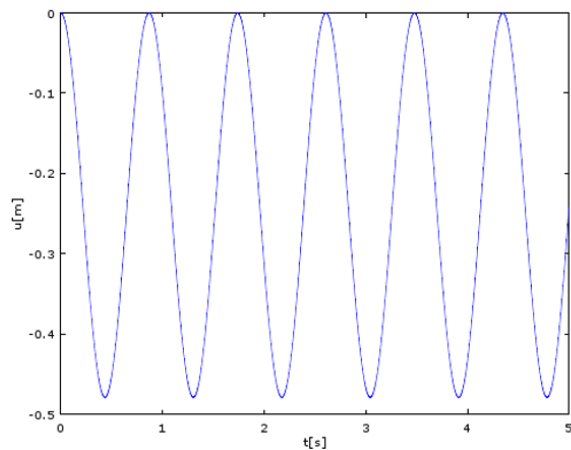


Gráfico 2 – Amortecimento nulo

V=0m/s  $\omega d=9,30\text{rad/s}$   $p=0,141\text{m}$

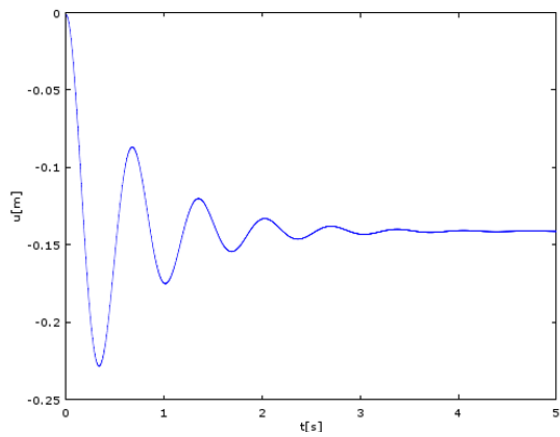


Gráfico 3 – Amortecimento atuando

V=8m/s  $\omega=7,22\text{rad/s}$   $p=0,239\text{m}$

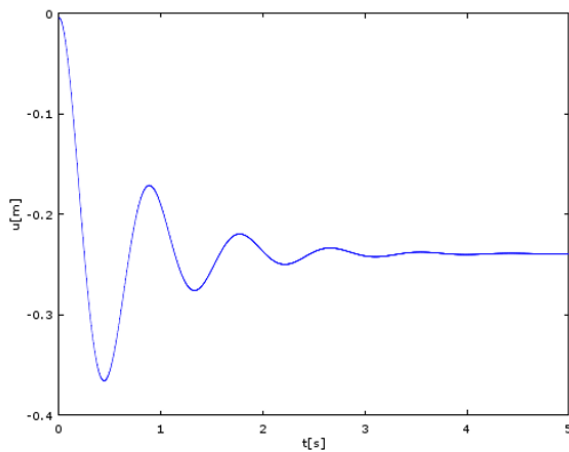


Gráfico 4 – Amortecimento atuando

## CONCLUSÕES

Comparando as frequências de resposta apresentadas nos gráficos 2 e 4 com as apresentadas nos gráficos 1 e 3 respectivamente, nota-se o efeito da velocidade do escoamento interno na rigidez do sistema. É notável também o efeito da velocidade do escoamento sobre a amplitude da resposta dinâmica, causando um aumento de 78 % da amplitude em relação ao caso de escoamento nulo.

## REFERÊNCIAS

- Paidoussis, M. P. (2001). “Fluid – Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow”.
- Blevins, R. D. (2001). “Formulas For Natural Frequency And Mode Shape”.