

# Um estudo da dinâmica e estabilidade de um tubo horizontal com escoamento interno utilizando um modelo de ordem reduzida para o problema linearizado.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – EPUSP

Seminário da disciplina PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas

*Guilherme Jorge Vernizzi Lopes*

*Igor Mancilla Lourenço*

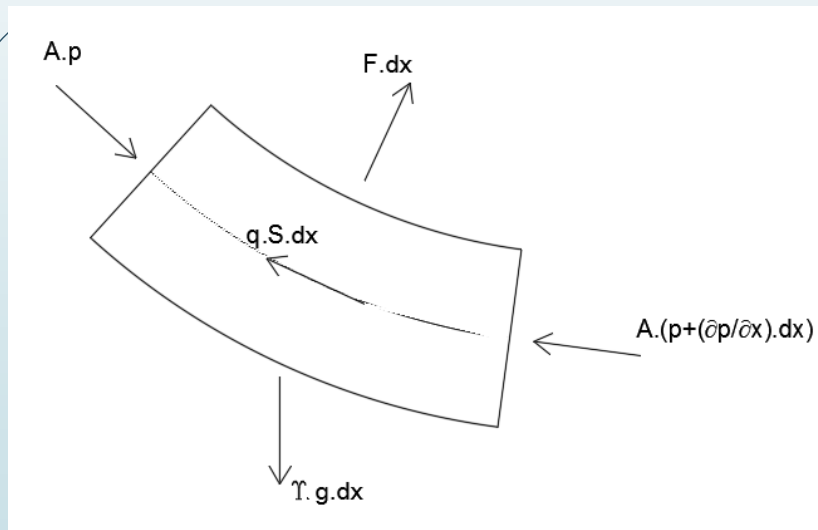
A dark blue arrow points to the right from the left edge of the slide. Below it, several thin, curved lines in shades of blue and grey sweep across the left side of the slide.

# Resumo

- ▶ Importância do estudo;
- ▶ Aplicação do método;
- ▶ Modelo linearizado e de ordem reduzida;
- ▶ Um grau de liberdade;
- ▶ Condições de estabilidade

# Equação do movimento

► Forças de equilíbrio aplicadas no fluido:

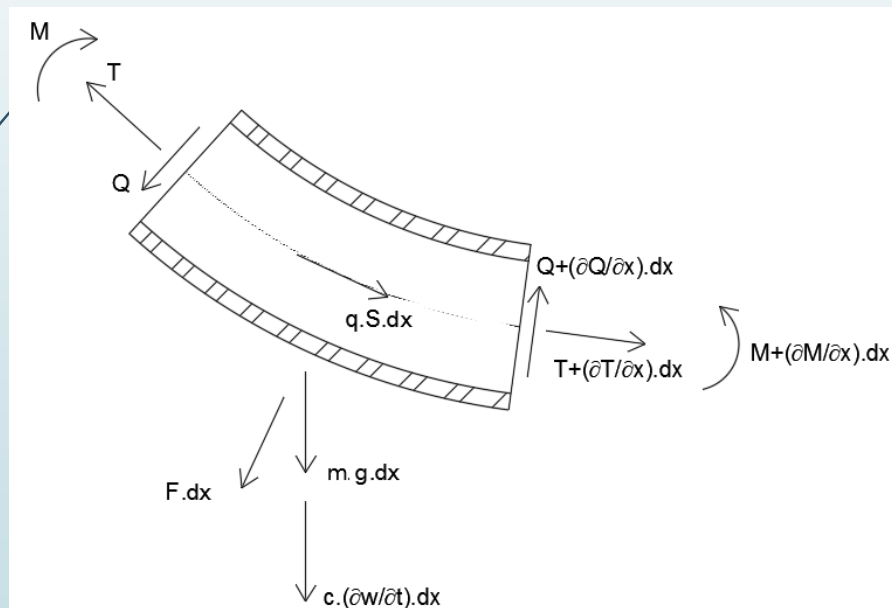


$$\text{► } F \frac{\partial w}{\partial x} - A \frac{\partial p}{\partial x} - qS = \gamma a_{fx} \quad (1)$$

$$\text{► } A \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial w}{\partial x} \right) + F + qS \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma g = \gamma a_{fy} \quad (2)$$

# Equação do movimento

► Forças de equilíbrio aplicadas no tubo:



$$\text{► } \frac{\partial T}{\partial x} - F \frac{\partial w}{\partial x} + qS = 0 \quad (3)$$

$$\text{► } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right) - F - mg - c \frac{\partial w}{\partial t} - qS \frac{\partial w}{\partial x} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\text{► } Q = - \frac{\partial M}{\partial x} = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad [\text{Bernoulli-Euler}] \quad (5)$$

# Equação do movimento

- Velocidade no tubo:

$$\vec{V}_t = \frac{\partial w}{\partial x} \vec{j} \quad (6)$$

- Velocidade no fluido:

$$\vec{V}_f = \vec{V}_t + U \left( \vec{i} + \frac{\partial w}{\partial x} \vec{j} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) (x\vec{i} + w\vec{j}) = \frac{D}{dt} (x\vec{i} + w\vec{j}) \quad (7)$$

- Acelerações em x e y

$$a_{fx} = \frac{D}{dt} \vec{V}_f \cdot \vec{i} = \frac{DU}{dt} \quad (8)$$

$$a_{fy} = \frac{D}{dt} \vec{V}_f \cdot \vec{j} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{DU}{dt} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (9)$$

# Equação do movimento

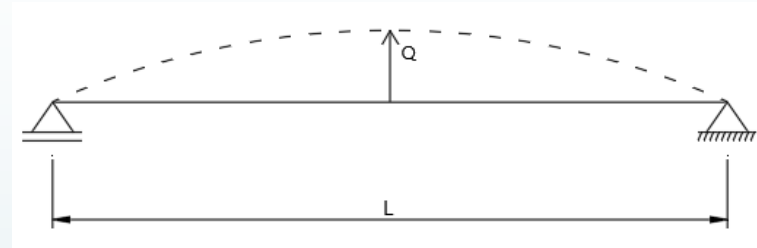
- Considerando a velocidade de escoamento constante e combinando as equações (1), (3) e (8):

$$\frac{\partial}{\partial x}(T - pA) = 0 \quad (10)$$

- Combinando as equações (2), (4), (5) e (9):

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (T - pA) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\gamma U \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + (m + \gamma) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + (m + \gamma)g = 0 \quad (11)$$

# Modelo de ordem reduzida



- A partir da equação (11), realizando a separação de variáveis utilizando a equação espacial do modo de vibração da viga de Euler:
- $w(x, t) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) f(t)$
- $f(t) \left[ \int_0^L EI \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) - (D + \gamma U^2) \frac{\pi^2}{l^2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx \right] + f'(t) \left[ \int_0^L 2\gamma U \frac{\pi}{l} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + c \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx \right] + f''(t) \left[ \int_0^L (m + \gamma) \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx \right] + \int_0^L (m + \gamma) g \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = 0$
- $f(t) \left[ EI \frac{\pi^4}{l^4} - (D + \gamma U^2) \frac{\pi^2}{l^2} \right] \frac{l}{2} + f'(t) [c] \frac{l}{2} + f''(t) [(m + \gamma)] \frac{l}{2} + (m + \gamma) g \frac{2l}{\pi} = 0$
- $f''(t) + \left[ \frac{c}{(m + \gamma)} \right] f'(t) + \left[ \left( \frac{1}{(m + \gamma)} \right) \left( \frac{EI \pi^4}{l^4} - (D + \gamma U^2) \frac{\pi^2}{l^2} \right) \right] f(t) = \frac{-4g}{\pi}$

Onde  $D = T - pA$ , por (10) sabemos que  $D$  é constante ao longo da viga e como uma forma de simplificar o problema, será adotado  $D=0$

$$f''(t) + \frac{c}{m + \gamma} f'(t) + \frac{1}{m + \gamma} \left( \frac{EI \pi^4}{L^4} - \frac{\gamma U^2 \pi^2}{L^2} \right) f(t) = \frac{-4g}{\pi} \quad (12)$$

# Solução geral analítica

$$\Rightarrow f(t) = \rho e^{-\varepsilon\omega t} \cos(\omega_D t - \theta) - \frac{4g}{\pi} \quad (13)$$

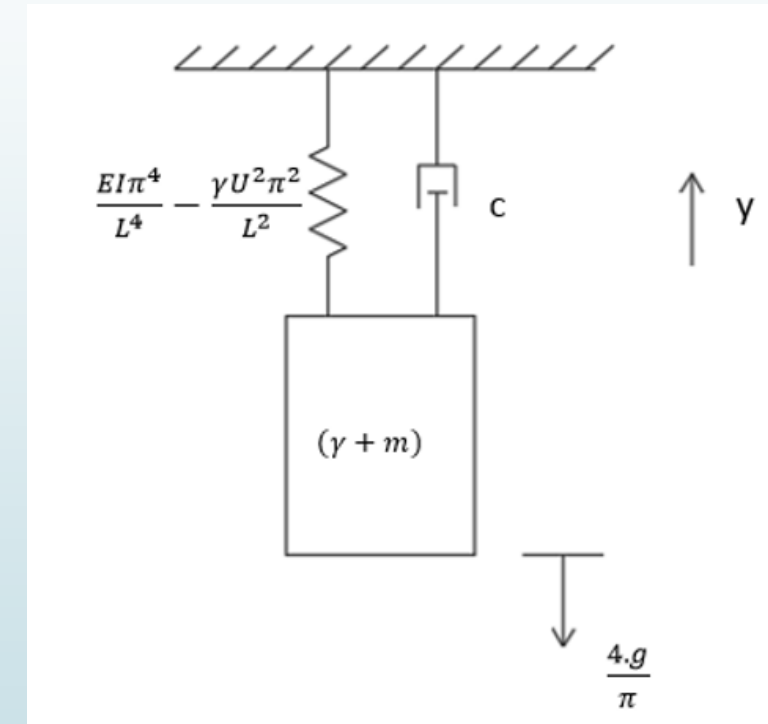
$$\Rightarrow \rho = \sqrt{\left(Q_0 + \frac{g\pi}{2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{Q}_0}{\omega_D} + \frac{\varepsilon\omega}{\omega_D} \left(Q_0 + \frac{4g}{\pi\omega^2}\right)\right)^2} \quad (14)$$

$$\Rightarrow \theta = \arctg\left(\frac{\dot{Q}_0 + \varepsilon\omega \left(Q_0 + \frac{4g}{\pi\omega^2}\right)}{\omega_D \left(Q_0 + \frac{4g}{\pi\omega^2}\right)}\right) \quad (15)$$

$$\Rightarrow \omega_D = \omega\sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{m+\gamma} \left(\frac{EI\pi^4}{L^4} - \frac{\gamma U^2 \pi^2}{L^2}\right) \quad (17)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{c}{2(m+\gamma)\omega} \quad (18)$$





# Análise de estabilidade

- A partir de (12):

$$\delta \dot{f}_1 = \delta f_2 \quad (19)$$

$$\delta \dot{f}_2 = \frac{-c}{m+\gamma} \delta f_2 - \frac{1}{m+\gamma} \left( \frac{EI\pi^4}{L^4} - \frac{\gamma U^2 \pi^2}{L^2} \right) \delta f_1 \quad (20)$$

- Com isso, a equação característica do método de Liapunov para os autovalores  $\lambda$  fica:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m+\gamma} \lambda + \frac{1}{m+\gamma} \left( \frac{EI\pi^4}{L^4} - \frac{\gamma U^2 \pi^2}{L^2} \right) = 0 \quad (21)$$

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4(m+\gamma)K}}{2(m+\gamma)} \quad (22)$$

- Considerando a equação 22, podem ser analisados quatro cenários.

$c < 0$  e  $K > 0$  ao termo fora da raiz, ao menos um dos autovalores será real positivo (instabilidade)

$c < 0$  e  $K < 0$  a raiz quadrada pode resultar complexa, de forma que os dois autovalores terão parte real positiva (instabilidade)

$c > 0$  e  $K < 0$  a raiz quadrada será real e em valor absoluto maior que "c", de forma que um dos autovalores será positivo (inst.)

$c > 0$  e  $K > 0$  a raiz pode resultar complexa, de forma que os dois autovalores terão parte real negativa (estabilidade)

# Análise de estabilidade

Com isso ficam caracterizados dois casos críticos, a saber,  $c = 0$  e  $K = 0$

►  $c = 0$

O decréscimo do posto da matriz que fornece a equação característica dos autovalores é igual a um, e a multiplicidade dos autovalores também é igual um, de forma que se tem estabilidade.

►  $K = 0$

O decréscimo do posto da matriz que fornece a equação característica dos autovalores é zero, de forma que se tem instabilidade.

Ficam então caracterizadas a passagem de estabilidade para instabilidade dinâmica,  $c < 0$ , e a passagem de estabilidade para instabilidade estática,  $K = 0$ .

$$\text{► } \left( \frac{EI\pi^4}{L^4} - \frac{\gamma U_{cr}^2 \pi^2}{L^2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma U_{cr}^2 \pi^2}{L^2} = \frac{EI\pi^4}{L^4} \Rightarrow U_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\gamma}}$$

# Solução geral numérica

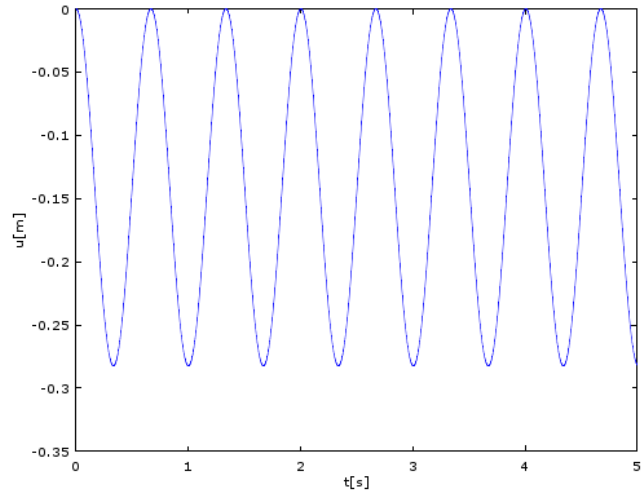
Valores adotados para solução do problema:

- ▶ Tubo de PVC ( $E=830 \text{ Mpa}$ ,  $\rho=1400\text{kg/m}^3$ )
- ▶ Diâmetro ( $D=200\text{mm}$ ,  $d=194\text{mm}$ )
- ▶ Fluido ( $\rho=1000\text{kg/m}^3$ )
- ▶ Comprimento do Tubo ( $L=4\text{m}$ )
- ▶ Coeficiente de amortecimento ( $c=90\text{Ns/m}$ )
- ▶ Velocidade do escoamento
- ▶ Velocidade crítica do escoamento ( $U_{cr}=12,49\text{m/s}$ )
- ▶ Aceleração da gravidade ( $g=9,81\text{m/s}^2$ )

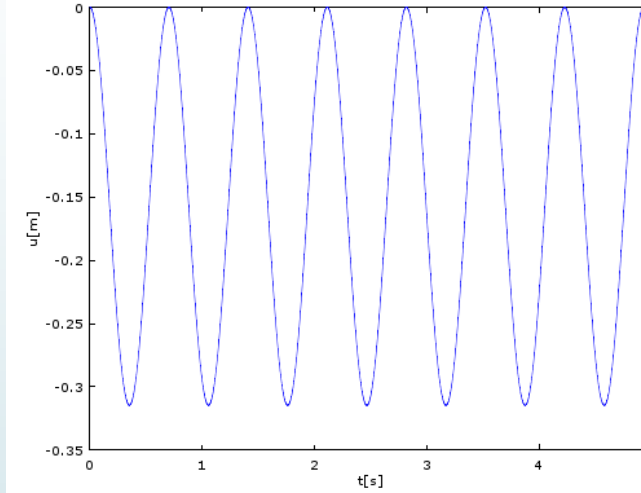
# Solução geral numérica

► Sem amortecimento

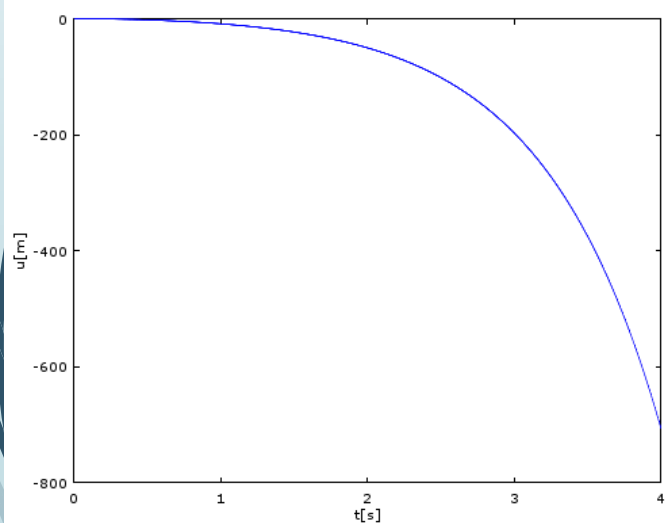
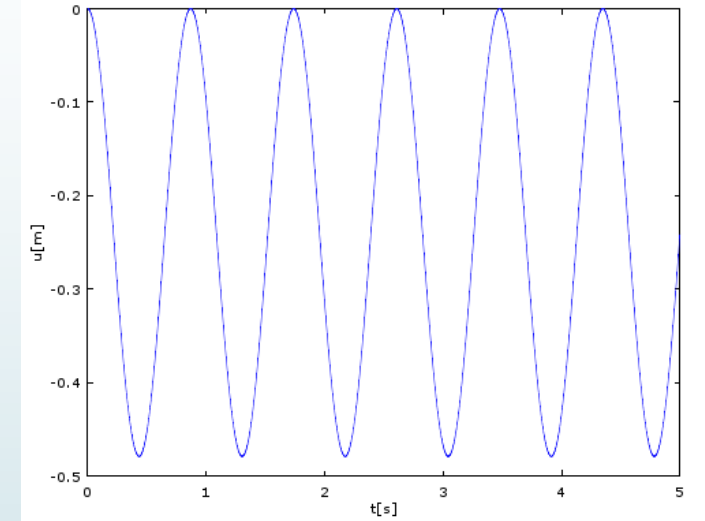
$V=0\text{m/s}$     $w=9,41\text{rad/s}$     $p=0,140\text{m}$



$V=4\text{m/s}$     $w=8,91\text{rad/s}$     $p=0,157\text{m}$



$V=8\text{m/s}$     $w=7,22\text{rad/s}$     $p=0,239\text{m}$

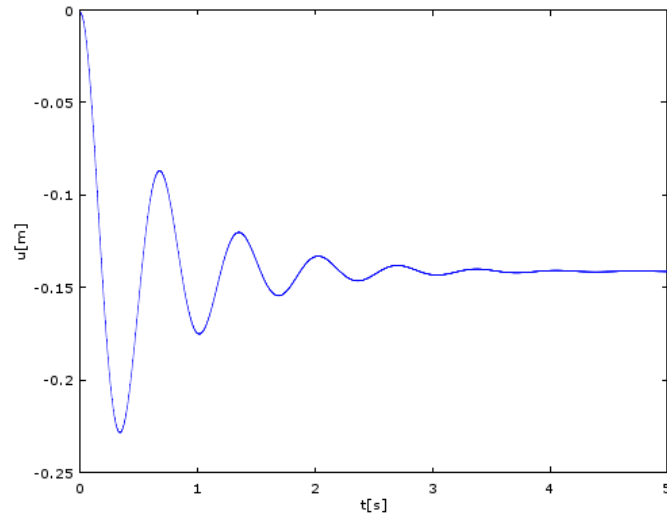


$V=12,5\text{ m/s}$

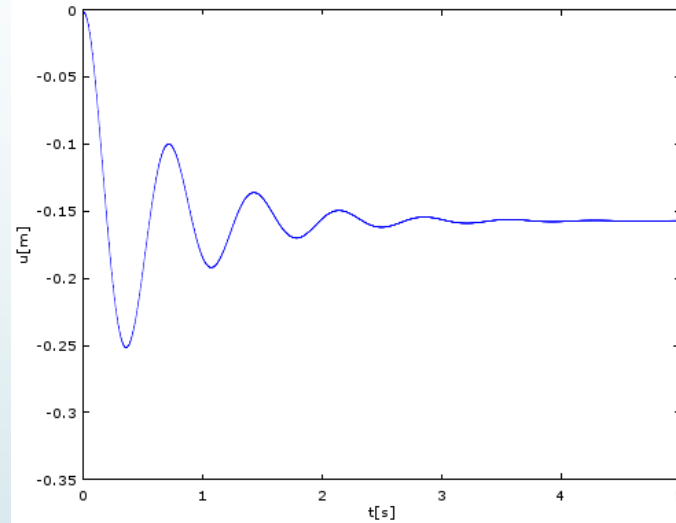
# Solução geral numérica

► Com amortecimento

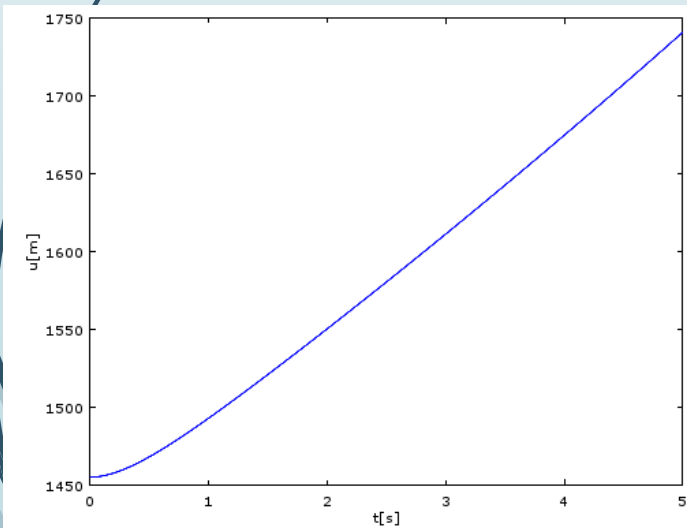
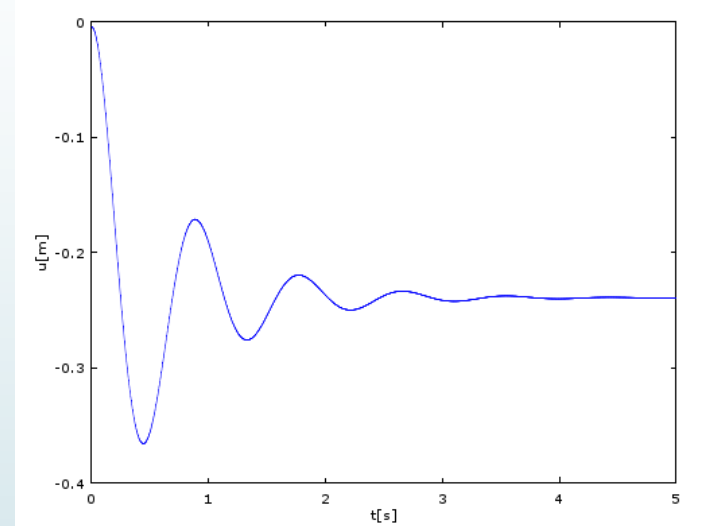
$V=0\text{m/s}$   $\omega d=9,30\text{rad/s}$   $p=0,141\text{m}$



$V=4\text{m/s}$   $\omega=8,80\text{rad/s}$   $p=0,157\text{m}$



$V=8\text{m/s}$   $\omega=7,22\text{rad/s}$   $p=0,239\text{m}$



$V=12,5\text{ m/s}$



# Referências



- ▶ Paidoussis, M. P. (2001). “Fluid – Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow”.
- ▶ Blevins, R. D. (2001). “Formulas For Natural Frequency And Mode Shape”.