

# Oscilação Cinemática em Veículos Ferroviários (*Hunting*)

PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas

Debora Naomi Higa  
Paulo R. Refachinho de Campos

Maio/2017

# Motivação

# Oscilação Cinemática em Veículos Ferroviários (*Hunting*)

## Veículos Ferroviários



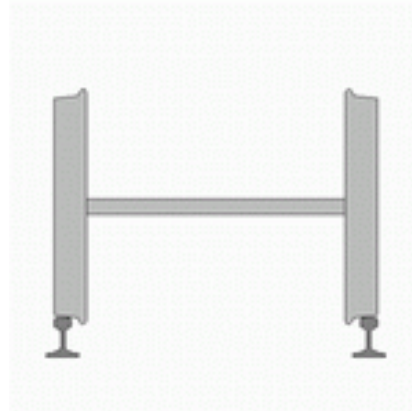
[1]



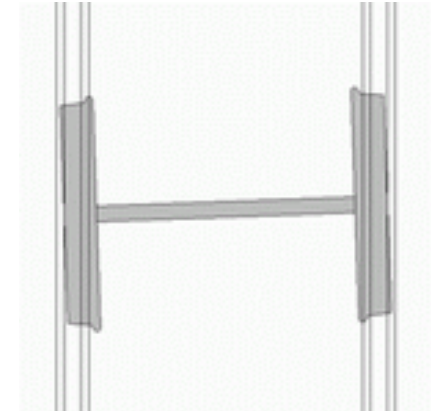
[2]

Diferem-se de outros meios de transporte pelo fato de operarem sobre trilhos. O mecanismo fundamental para guiar esses veículos é a geometria do rodeiro ferroviário, que conta com rodas cônicas rigidamente conectadas a um eixo.

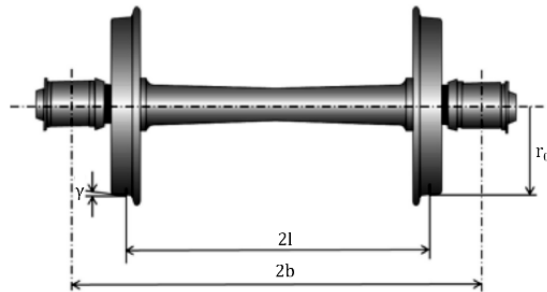
Tal geometria é benéfica em vários aspectos... No entanto, existe um efeito indesejado associado:



[4]

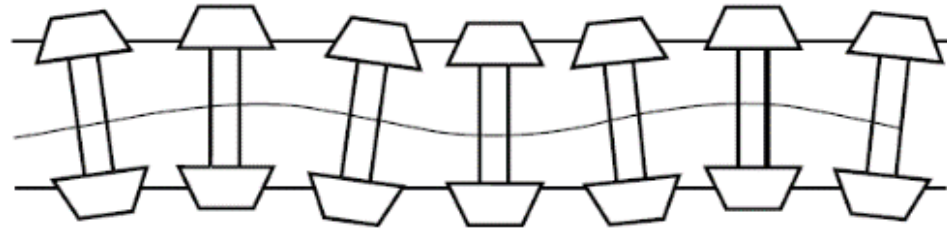


[4]



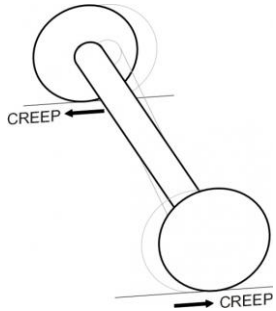
[3]

# Oscilação Cinemática em Veículos Ferroviários (*Hunting*)



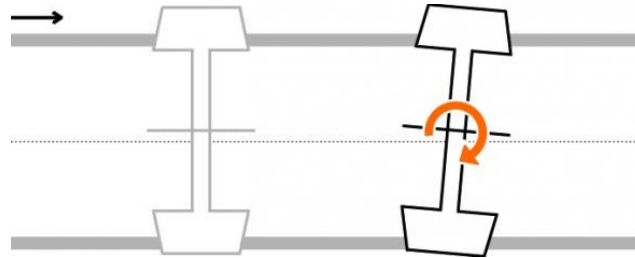
[5]

A instabilidade causada pelo fenômeno de *hunting* é um resultado do acoplamento entre deslocamentos lateral e angular (*yaw*) e das forças de *creep* (forças resultantes dos deslizamentos relativos entre roda e trilho).



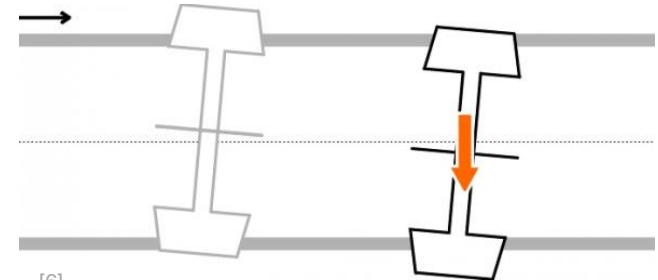
[6]

Deslocamento lateral inicial introduz movimento de yaw.



[6]

Yaw induz deslocamentos laterais.



[6]

# Objetivo e Metodologia

# Oscilação Cinemática em Veículos Ferroviários (*Hunting*)

---

## OBJETIVO

Investigar, em nível introdutório, o fenômeno de *hunting* em veículo ferroviários e apresentar dois modelos matemáticos utilizados na representação do problema: as equações de Klingel e o as equações de Carter.

## METODOLOGIA

- I. Estudar as equações de Klingel, assim como as de Carter, entendendo as respostas fornecidas e as limitações de cada modelo.
- II. Aplicar os modelos estudados em um caso teórico, com dimensões retiradas da literatura.

# Modelos Matemáticos: Klingel e Carter

# Equações de Klingel (1883)

(1)  $\Delta R = y\gamma$

(2)  $R_l = R_0 + y\gamma$  (3)  $R_r = R_0 - y\gamma$

(4)  $V_l = R_l\omega$  (5)  $V_r = R_r\omega$

(6)  $V = \frac{V_l + V_r}{2} = \frac{\omega}{2}(R_0 + y\gamma + R_0 - y\gamma) = R_0\omega$

(7)  $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \psi V = \psi R_0\omega$

(8)  $\frac{x_r - x_l}{G} = \tan\psi = \psi$

(9)  $\frac{d}{dt}\left(\frac{x_r - x_l}{G}\right) = \frac{d\psi}{dt} \rightarrow \frac{V_r - V_l}{G} = \dot{\psi}$

(10)  $\dot{\psi} = \frac{(R_r - R_l)\omega}{G} = \frac{((R_0 - y\gamma) - (R_0 + y\gamma))\omega}{G} = -\frac{2y\gamma\omega}{G}$

(11)  $\dot{y} = \dot{\psi}R_0\omega$

(12)  $\frac{\dot{y}}{R_0\omega} = -\frac{2y\gamma\omega}{G} \rightarrow \frac{\dot{y}}{R_0\omega} + \frac{2y\gamma\omega}{G} = 0$

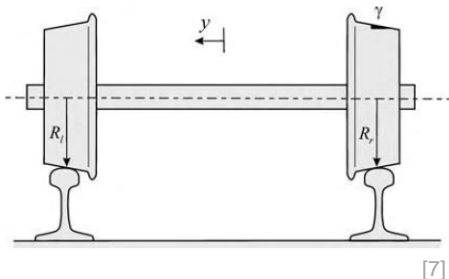
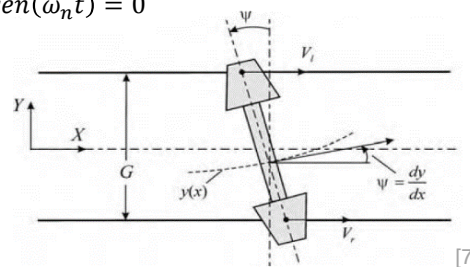
(13)  $\ddot{y} + \left(\frac{2R_0\gamma\omega^2}{G}\right)y = 0$

(14)  $y = A\sin(\omega_n t)$  (15)  $\dot{y} = A\omega_n \cos(\omega_n t)$  (16)  $\ddot{y} = -A\omega_n^2 \sin(\omega_n t)$

(17)  $-A\omega_n^2 \sin(\omega_n t) + KA\sin(\omega_n t) = 0$

(18)  $K = \frac{2R_0\gamma\omega^2}{G}$

(19)  $-\omega_n^2 + K = 0$



Dedução puramente geométrica

## Equações de Klingel

(20)  $\omega_n = \sqrt{K} = \sqrt{\frac{2R_0\gamma\omega^2}{G}} = R_0\omega \sqrt{\frac{2\gamma}{R_0G}} = V \sqrt{\frac{2\gamma}{R_0G}}$

(21)  $T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{V} \sqrt{\frac{R_0G}{2\gamma}}$  (22)  $\lambda = VT = 2\pi \sqrt{\frac{R_0G}{2\gamma}}$

**Conclusão importante:**  
A frequência da oscilação aumenta com o aumento da velocidade!



# Equações de Carter (1916)

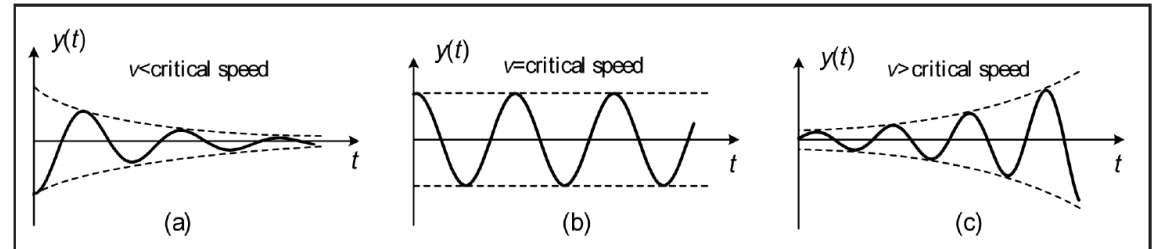
$$(1) \quad m\ddot{y} + 2f_{22} \left( \frac{\dot{y}}{V} - \psi \right) + k_y y = 0$$

$$(2) \quad \frac{2f_{11}\gamma l y}{R_o} + I_z \ddot{\psi} + \frac{2f_{11}l^2 \dot{\psi}}{V} + k_\psi \psi = 0$$

Além da conicidade da roda, Carter introduziu o conceito fundamental de *creep* (inicialmente desprezado por Klingel) no contexto da dinâmica lateral de veículos ferroviários.

Através das equações de Carter é possível prever os seguintes cenários de *Hunting*:

- Coeficientes de *creep* longitudinal e lateral:  $f_{11}$  e  $f_{22}$ , respectivamente.
- Por conveniência, utiliza-se aqui o parâmetro  $2l$  (equivalente a  $G$ ).
- $m$  e  $I_z$  representam, respectivamente, a massa e o momento de inércia do rodéiro.
- Por fim,  $k_y$  e  $k_\psi$  representam as rigidezes nas direções lateral e de *yaw*.



[3]

# Aplicação

# Solução

Parâmetros de um rodeiro típico foram selecionados na literatura:

Características de um rodeiro típico [7]		
$m = 1250 \text{ kg}$	$R_o = 0.45 \text{ m}$	$l = 0.7452 \text{ m}$
$I_z = 700 \text{ kg.m}^2$	$\gamma = 0.1174$	
$f_{11} = 7.44 \text{ MN}$	$k_y = 0.23 \text{ MN/m}$	
$f_{22} = 6.79 \text{ MN}$	$k_\psi = 2.5 \text{ MN.m/rad}$	

Wolfram  
Mathematica®



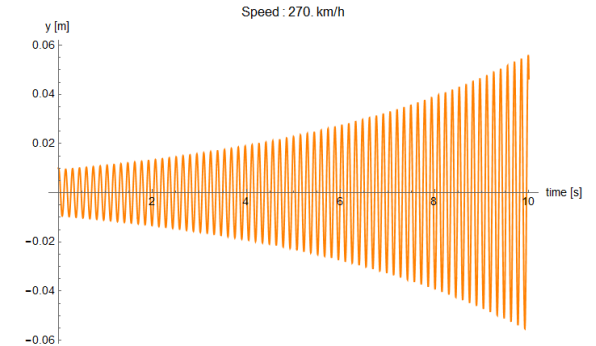
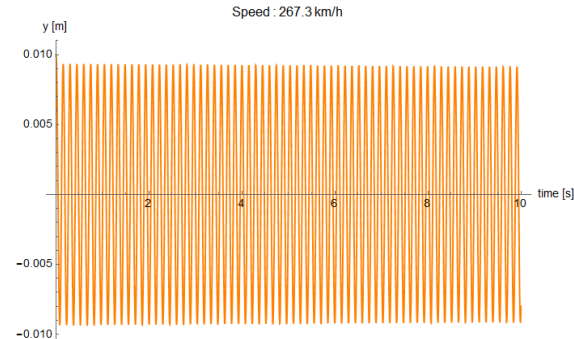
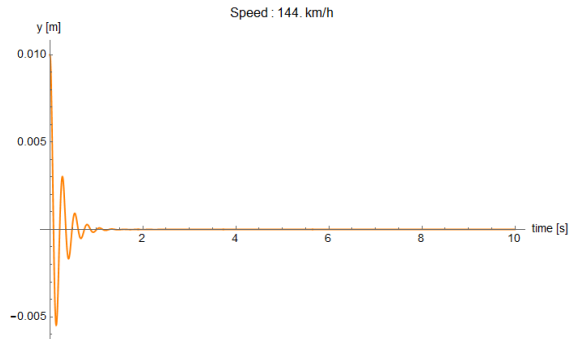
Os modelos estudados foram implementados no programa *Mathematica*® e, no caso das equações de Carter, a função `ParametricNDSolve[ ]` foi utilizada para resolver o sistema [8].

# Solução

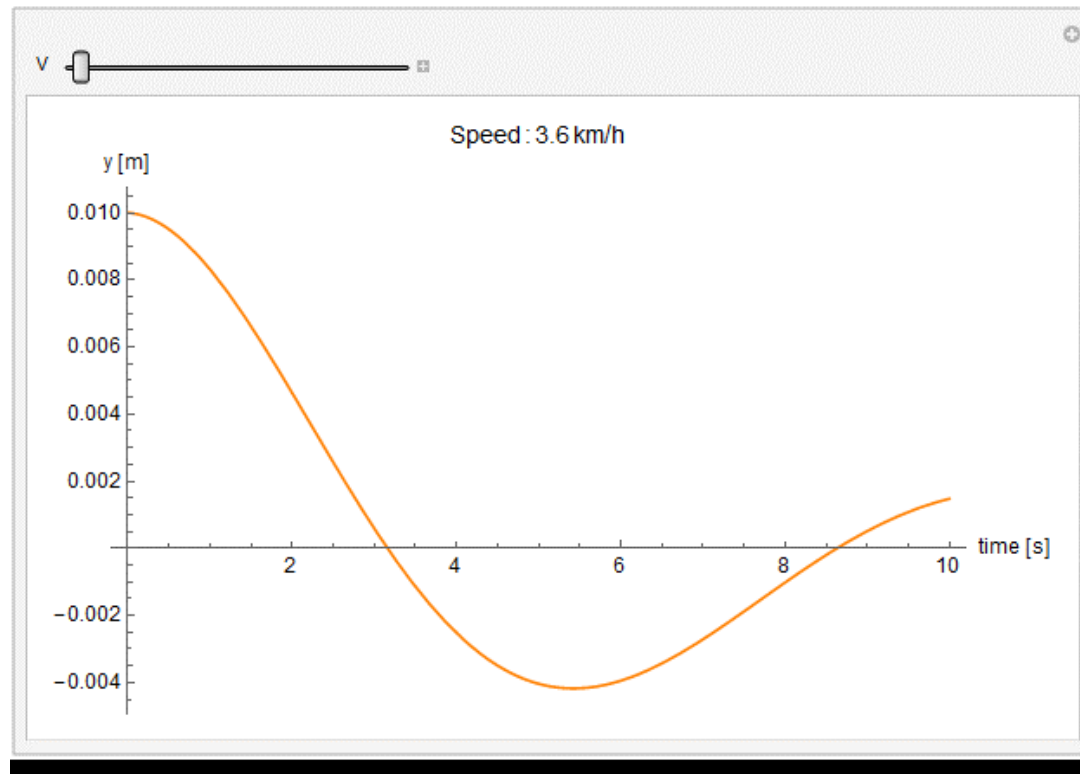
Resumo dos resultados das equações de Klingel:

$V$ [km/h]	$\omega_n$ [rad/s]	$T$ [s]	$\lambda$ [m]
144	23.7	0.26	10.6
267.3	43.9	0.14	10.6
270	44.4	0.14	10.6

Resumo dos resultados das equações de Carter:



# Solução



# Solução

Comentários sobre análise da estabilidade do sistema:

A determinação da velocidade crítica, ou seja, aquela a partir da qual o sistema torna-se instável, pode ser feita através do **Primeiro Método de Lyapunov**.

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad m\ddot{y} + 2f_{22}\left(\frac{\dot{y}}{V} - \psi\right) + k_y y = 0 \\
 (2) \quad \frac{2f_{11}\gamma l y}{R_o} + I_z \ddot{\psi} + \frac{2f_{11}l^2 \dot{\psi}}{V} + k_\psi \psi = 0
 \end{array}
 \xrightarrow[\text{sist. 1ª. ordem}]{\text{Redução}}
 \left. \begin{array}{l}
 x_1 = y \\
 x_2 = \psi \\
 x_3 = \dot{y} \\
 x_4 = \dot{\psi}
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 \dot{x}_1 = x_3 \\
 \dot{x}_2 = x_4 \\
 \dot{x}_3 = \ddot{y} \\
 \dot{x}_4 = \ddot{\psi}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \ddot{y} = -\frac{1}{m}\left(2f_{22}\left(\frac{\dot{y}}{V} - \psi\right) + k_y y\right) \\
 \ddot{\psi} = -\frac{1}{I_z}\left(\frac{2f_{11}\gamma l y}{R_o} + \frac{2f_{11}l^2 \dot{\psi}}{V} + k_\psi \psi\right)
 \end{array}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_y}{m} & \frac{2f_{22}}{m} & -\frac{2f_{22}}{mV} & 0 \\ -\frac{2f_{11}\gamma l}{I_z R_o} & -\frac{k_\psi}{I_z} & 0 & -\frac{2f_{11}l^2}{I_z V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

- Extração dos autovalores de  $A$ :
  - Se  $Re_k < 0$ , L-Estável
  - Se  $Re_k > 0$ , L-Instável
  - Se  $Re_k = 0$ , L-Crítico
- Portanto, é possível determinar  $V$  de tal forma a se obter uma das condições acima.

# Solução

Lyapunov.nb - Wolfram Mathematica 10.3 Student Edition - Personal Use Only

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

Wolfram Mathematica | STUDENT EDITION

Demonstrations | MathWorld | Wolfram Community | Help

+

▼ Características do veículo

^ Lyapunov

```
inc = 0.01;
V = 0;
While[True, V = V + inc;
  A = {{0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {-ky/m, (2 f22)/m, (-2 f22)/(m V), 0}, {(-2 f11 gamma 1)/(Iz R0), -kPsi/Iz, 0, (-2 f11 l^2)/(Iz V)}}; eig = Eigenvalues[A];
  If[Re[eig[[1]]] >= 0 || Re[eig[[2]]] >= 0 || Re[eig[[3]]] >= 0 || Re[eig[[4]]] >= 0, Break[]];
]
StringForm["V = `` m/s (`` km/h)", NumberForm[V, 4], NumberForm[V*3.6, 4]]
V = 74.26 m/s (267.3 km/h)
```

OBRIGADO!



# Oscilação Cinemática em Veículos Ferroviários (*Hunting*)

## REFERÊNCIAS

- [1] Figura retirada de: <http://www.goodhopefreight.com/freightimg/freight-train.jpg> (10/05/2017)
- [2] Figura retirada de: <http://static3.businessinsider.com/image/57a4cae68d3eae23650ac95c-1190-625/this-animated-map-shows-how-radically-a-high-speed-train-system-would-improve-travel-in-the-us.jpg> (10/05/2017)
- [3] Figura retirada de: TOURNAY, H. The Fundamentals of Vehicle/Track Interaction. In: INTERNATIONAL HEAVY HAUL ASSOCIATION **Guidelines to Best Practices For Heavy Haul Railway Operations**: Management of the Wheel and Rail Interface. Virginia: Simmons-Boardman Books, Inc., 2015. Cap. 1.
- [4] Animação retirada de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hunting\\_oscillation](https://en.wikipedia.org/wiki/Hunting_oscillation) (10/05/2017)
- [5] Figura retirada de: WICKENS, A. H. A History of Railway Vehicle Dynamics. In: IWNICK, S. **Handbook of Railway Vehicle Dynamics**. Boca Raton: CRC Press, 2006. Cap. 2.
- [6] Figura retirada de: <http://the-contact-patch.com/book/rail/r0418-hunting> (10/05/2017)
- [7] Dados retirados de: WICKENS, A. H. **Fundamentals of Rail Vehicle Dynamics**: Guidance and Stability. Lisse: Swets & Zeitlinger Publishers, 2005.
- [8] Mais informações em: <https://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveOverview.html>