

# Estudo da dinâmica em um pórtico com o auxílio do MATLAB

Juan Carlo Olmo Breda<sup>1</sup>  
Karina Bradaschia Rocha<sup>1</sup>  
Paula Meirelles Bolelli<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Mauá de Tecnologia - IMT

Seminário da disciplina PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas

## RESUMO

Neste trabalho, desenvolveu-se o estudo da ação de um carregamento harmônico em um pórtico simples de quatro pavimentos utilizando o conceito de *shear building*, considerando-se apenas os deslocamentos horizontais como graus de liberdade da estrutura. Utilizando o método da superposição modal, o problema foi desacoplado em sistemas de um grau de liberdade e, com o auxílio do software MATLAB, foi criada uma rotina para determinar a resposta dinâmica da estrutura. Ao final, analisou-se a eficiência de um modelo simplificado de TMD (*Tuned Mass Damper*) no topo do pórtico, a fim de reduzir o deslocamento máximo neste pavimento.

**PALAVRAS-CHAVE:** análise modal, deslocamento, MATLAB, *shear building*.

## INTRODUÇÃO

Antigamente, como forma de simplificar qualquer problema de engenharia, era usual realizar apenas uma análise estática das estruturas, majorando os carregamentos pelos chamados coeficientes de amplificação dinâmica. Porém, com o passar do tempo e devido ao desenvolvimento de novas tecnologias, os sistemas estruturais tornaram-se cada vez mais esbeltos e passíveis de vibrações, sendo necessário, para que se faça corretamente seu dimensionamento e verificação, o estudo das ações dinâmicas sobre eles atuantes. Como forma de atenuar essas vibrações, são utilizados sistemas passivos de controle, tais como molas e amortecedores, que, quando posicionados adequadamente nas estruturas, atenuam a transmissibilidade dos efeitos dinâmicos. (MAZZILLI et al, 2016)

Nesse contexto, podem ser utilizados os chamados *Tuned Mass Dampers* (TMDs), que são amortecedores de massa sintonizados. Esses TMDs são conectados a uma mola passiva e a um amortecedor, além de possuírem certa massa, determinada para cada caso, de maneira que a energia na estrutura principal seja absorvida por esse conjunto, impedindo, na pior das hipóteses, que a estrutura entre no modo ressonante. Ou seja, a energia transmitida para esse sistema é dissipada na forma de amortecimento da estrutura.

Com o intuito de analisar o deslocamento horizontal de uma estrutura em pórtico devido a um carregamento harmônico e tentar reduzir o mesmo através da colocação de um TMD, foi criada uma rotina para simular os

efeitos dinâmicos em um modelo de uma estrutura simples de quatro pavimentos do tipo *shear building*, no qual as vigas são consideradas infinitamente rígidas quando comparadas às colunas, além de toda a massa da estrutura estar concentrada nas lajes.

## MODELO E METODOLOGIA DE ANÁLISE

Para a formulação do problema, parte-se da ideia de um edifício contendo apenas um pavimento com massa  $m$ , constante de amortecimento  $c$  e rigidez  $k$ , como representado na Figura 1, de modo que a equação de equilíbrio para um grau de liberdade seja calculada pela Equação 1:

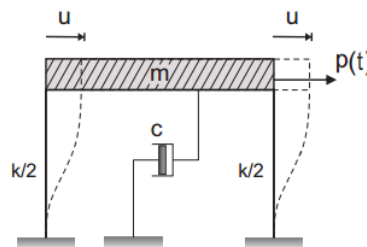


Figura 1 – Modelo de um pavimento com um grau de liberdade

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (1)$$

Analogamente, para um modelo de edifício com quatro pavimentos (Figura 2), é obtido um sistema de quatro graus de liberdade, tal que a equação de equilíbrio a ser analisada seja descrita pela Equação 2:

$$[M][\ddot{U}] + [C][\dot{U}] + [K][U] = [R(t)] \quad (2)$$

onde  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura e os vetores  $[U]$  e  $[P(t)]$  são, respectivamente, os deslocamentos laterais e os carregamentos externos.

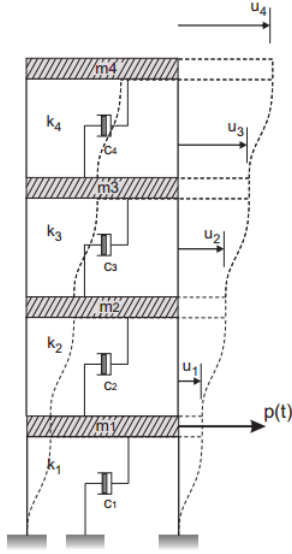


Figura 2 – Modelo de quatro pavimentos com quatro graus de liberdade

Retomando o modelo e as respectivas variáveis apresentadas na Figura 2, é possível definir as matrizes de massa (Equação 3) e rigidez (Equação 4) definidas anteriormente pela Equação 2:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Primeiro, determinam-se as frequências naturais do sistema não amortecido para vibrações livres (Equação 5). Esse problema é solucionado pelo problema clássico de autovalores e autovetores, como demonstrado na Equação 6, tal que os autovalores correspondem ao quadrado da frequência natural e os autovetores são respectivos modos

de vibração.

$$[M][\ddot{U}] + [K][U] = [0] \quad (5)$$

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \Rightarrow |[A] - \lambda[I]| = 0 \Rightarrow [A] = [M]^{-1}[K] \quad (6)$$

Considera-se, em seguida, o amortecimento do tipo Rayleigh, ou seja, a matriz de amortecimento é resultado de uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez (Equação 7). Para o desenvolvimento desse trabalho, determinou-se que o amortecimento só seria condicionado pela matriz de massa. Em outras palavras,  $a_0 = 0$  e calibra-

se o valor de  $a_1$  a fim de que a razão de amortecimento (Equação 8) seja próxima de 2% para o primeiro modo de vibração.

$$[C] = a_0 \cdot [M] + a_1 \cdot [K] \quad (7)$$

$$\xi_i = \frac{a_1 \omega_i}{2} \quad (8)$$

Para a análise da resposta dinâmica do sistema de quatro graus de liberdade, foi escolhido o método da superposição modal, a fim de se obter matrizes diagonais (Equações 8 a 12). Fazendo uma mudança de variáveis utilizando a matriz modal  $[\Phi]$ , o sistema descrito na Equação 1 é desacoplado em quatro equações diferenciais de segunda ordem, ou seja, esse sistema é convertido em quatro problemas de um grau de liberdade.

$$[M_p][\ddot{Y}] + [C_p][\dot{Y}] + [K_p][Y] = [R_p] \quad (7)$$

$$[U] = [\Phi][Y] \quad (8)$$

$$[M_p] = [\Phi]^T [M] [\Phi] \quad (9)$$

$$[K_p] = [\Phi]^T [K] [\Phi] \quad (10)$$

$$[C_p] = [\Phi]^T [C] [\Phi] = a_1 \cdot [\Phi]^T [K] [\Phi] \quad (11)$$

$$[R_p] = [\Phi]^T [R] \quad (12)$$

Ao fim, realiza-se uma integração numérica para a determinação da resposta gráfica do problema proposto.

Após a análise realizada previamente, optou-se por adotar um modelo simplificado de TMD no topo da estrutura, como mostrado na Figura 3.

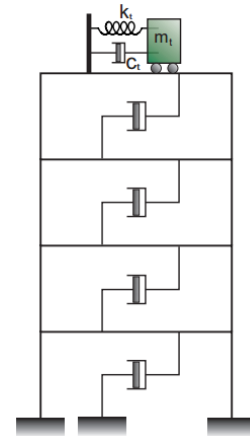


Figura 3 – Pórtico com TMD

Trata-se o TMD como um pavimento adicional no modelo inicialmente proposto, e todo o procedimento descrito anteriormente é repetido, porém, para um sistema de cinco graus de liberdade, tal que as novas matrizes de massa (Equação 13) e de amortecimento (Equação 14) são:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_t \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_t & -k_t \\ 0 & 0 & 0 & -k_t & k_t \end{bmatrix} \quad (14)$$

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir da metodologia anteriormente descrita, foram determinados os parâmetros básicos necessários para a resolução do problema (Quadro 1) e foi aplicada uma excitação harmônica forçada descrita pela equação  $p(t) = p_0 \cdot \text{sen}(\bar{\omega}t) = 66560 \text{ sen}(16t)$ , correspondente a uma máquina rotativa desbalanceada, locada no primeiro pavimento. A Figura 4 ilustra o modelo.

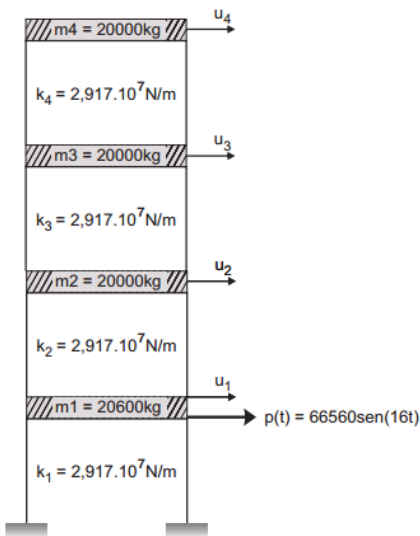


Figura 4 – Representação do shear building

Parâmetros	
Massa do 1º pavimento + máquina rotativa	20600 kg
Massa dos demais pavimentos	20000 kg
Massa do TMD	100 kg
Módulo de elasticidade do concreto	21 GPa
Altura de cada pilar	3,0 m
Dimensões dos pilares	0,15 m x 0,5 m
Rigidez por pavimento	2,917.10 <sup>7</sup> N/m

Quadro 1 – Considerações iniciais

Dessa forma, a partir das Equações 3 e 4, foram calculadas as matrizes de massa e rigidez da estrutura (Equações 15 e 16).

$$[M] = \begin{bmatrix} 20600 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20000 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[K] = 10^7 \begin{bmatrix} 5,833 & -2,917 & 0 & 0 \\ -2,917 & 5,833 & -2,917 & 0 \\ 0 & -2,917 & 5,833 & -2,917 \\ 0 & 0 & -2,917 & 2,917 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Em seguida, a partir da Equação 6, foram encontrados os autovalores e autovetores do sistema livre não amortecido, possibilitando assim a obtenção da frequência natural de cada modo:  $\omega_1 = 13,25 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 38,00 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_3 = 58,14 \text{ rad/s}$  e  $\omega_4 = 71,58 \text{ rad/s}$ .

Assim, para a determinação da matriz de amortecimento do tipo Rayleigh (Equação 17), a qual é condicionada apenas pela matriz de rigidez, calibrou-se o valor de  $a_1$  até um valor ótimo igual a 0.0041.

$$[C] = 10^5 \begin{bmatrix} 2,392 & -1,196 & 0 & 0 \\ -1,196 & 2,392 & -1,196 & 0 \\ 0 & -1,196 & 2,392 & -1,196 \\ 0 & 0 & -1,196 & 1,196 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Para a obtenção da resposta dinâmica do sistema, foi realizada a integração numérica no domínio do tempo a partir do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, por meio de uma rotina criada no software MATLAB, obtendo o gráfico dos deslocamentos para cada andar mostrado na Figura 5, sendo que deslocamento máximo ocorreu no topo do edifício com valor de 4,86 cm.

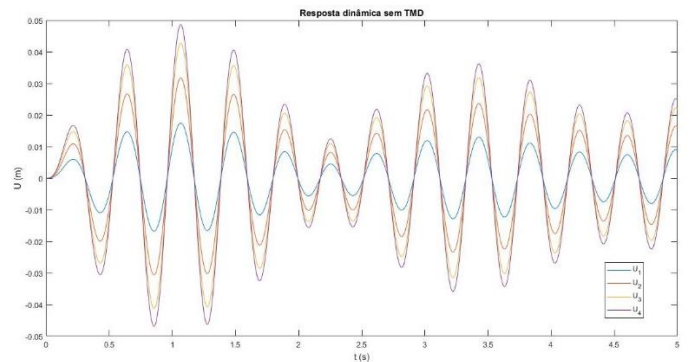


Figura 5 – Resposta dinâmica sem o TMD

De forma a tentar diminuir o deslocamento horizontal máximo no topo do edifício, foi dimensionado um TMD (*Tuned Mass Damper*), cuja massa corresponde a 0,5% da massa total do último pavimento. A frequência do amortecedor foi sintonizada com a frequência natural do primeiro modo de vibração da estrutura não amortecida, obtendo-se, assim, uma rigidez para o TMD correspondente a cerca de 0,6% da rigidez total do último pavimento. Por fim, seguindo as Equações 3 e 4,

foram determinadas as novas matrizes de massa e de rigidez com o TMD (Equações 18 e 19), assim como a nova matriz de amortecimento (Equação 20).

$$[M_{TMD}] = \begin{bmatrix} 20600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[K_{TMD}] = 10^5 \begin{bmatrix} 5833 & -2917 & 0 & 0 & 0 \\ -2917 & 5833 & -2917 & 0 & 0 \\ 0 & -2917 & 5833 & -2917 & 0 \\ 0 & 0 & -2917 & 2934 & -1.753 \\ 0 & 0 & 0 & -1.753 & 1.753 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[C_{TMD}] = 10^2 \begin{bmatrix} 2392 & -1196 & 0 & 0 & 0 \\ -1196 & 2392 & -1196 & 0 & 0 \\ 0 & -1196 & 2392 & -1196 & 0 \\ 0 & 0 & -1196 & 1203 & -718,7 \\ 0 & 0 & 0 & -718,7 & 718,7 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Repetindo a integração numérica, obteve-se a nova resposta dinâmica do sistema. O deslocamento máximo no topo do edifício passou a 4,68 cm, ou seja, houve uma redução de 3,70% com relação ao modelo inicial. A Figura 6 mostra o gráfico da resposta dinâmica para esse último modelo.

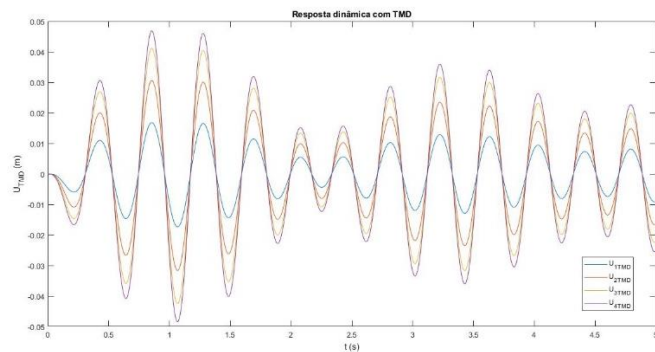


Figura 6 – Resposta dinâmica com TMD

Conclui-se que, após a colocação do TMD nessa estrutura, os deslocamentos horizontais máximos em cada pavimento foram diminuídos com relação à condição inicial adotada; porém, tal redução aconteceu na ordem de milímetros, o que não se revelou significativo para o problema proposto. Portanto, não é vantajoso o uso desse TMD no referido caso. Sabe-se que o uso desse mecanismo é mais frequente e eficiente em grandes construções, tais como edifícios altos e grandes pontes. É possível que a menor eficácia nesse problema tenha ocorrido por se optar por um modelo mais simples, além de possíveis erros associados à escolha do TMD.

## REFERÊNCIAS

Clough, R. W.; Penzien, J.. **Dynamics of Structures**. Berkeley: Computers & Structures, Inc., 2003, 730 p.

MAZZILLI, Carlos Eduardo Nigro et al. **Lições em Mecânica das Estruturas: Dinâmica**. São Paulo: Blucher, 2016. 334 p.

SRINIVASULU, P.; VAIDYANATHAN, C. V.. **Handbook of Machine Foundations**. New Delhi: Tata Mcgraw-hill Publishing Company Limited, 1980. 233 p.

LOPEZ-YANEZ, P. A.; ACCIOLY, M. M. L.. **Controle de Vibrações em Edifícios de Concreto Submetidos à Ação de Cargas Dinâmicas**. In: IV SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO. São Paulo: Epusp, 2000. p. 1 - 14.