

Vibrações em Sistemas de Vários Graus de Liberdade: Estudo de Caso de Choque Inelástico em Pórtico.

Felipe Augusto da Silva Barbosa¹
Fernanda Silveira Ramos²
Tarcísio Dias da Silva²

¹ Universidade Federal da Paraíba – UFPB
² Universidade Federal da Bahia – UFBA

Seminário da disciplina PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas

RESUMO

Este trabalho discorre sobre o efeito dinâmico de um choque inelástico em uma estrutura apertada nodal plana, para a qual também se consideram vibrações forçadas. A análise é feita de forma sucinta, por meio de um modelo reduzido para um grau de liberdade e por outro modelo de seis. Desta maneira, verificam-se as máximas rotações que resultam nos maiores momentos, o que permite comparar as tensões atuantes na estrutura com as admissíveis do material.

PALAVRAS-CHAVE: choque inelástico, vibrações forçadas, sistemas de vários graus de liberdade, integração numérica, pórtico plano.

INTRODUÇÃO

Choques podem ser definidos como a transferência de muita energia em um curto espaço de tempo. No choque perfeitamente inelástico, considera-se que, após a colisão, as massas permanecem solidarizadas, podendo, assim, ser caracterizado como uma vibração livre. Além dessa consideração, deve-se levar em conta que a quantidade de movimento se conserva e que o amortecimento é desprezado em favor da segurança, já que o mesmo reduz o valor da resposta máxima.

Vibrações são provocadas por condições cinemáticas simultaneamente não nulas em $t = 0$. Para o caso de choque vertical, tem-se:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (1)$$

Na qual, $[\mathbf{M}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é a matriz massa, $[\mathbf{K}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é a matriz de rigidez, $\{\mathbf{R}\} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ são os esforços externos e N é o número de graus de liberdade do sistema. As matrizes $[\mathbf{M}]$ e $[\mathbf{K}]$ são simétricas e, geralmente, positivas definidas.

Os modos de vibração não amortecidos são síncronos, ou seja, todos os pontos atingem seus deslocamentos máximos e mínimos em um certo período de tempo, sucessivamente. Esses modos podem ser classicamente encontrados por autovalores (ω^2_k) e autovetores ($\{\hat{\mathbf{Q}}_k\}$):

$$([\mathbf{K}] - \omega^2_k [\mathbf{M}])\{\hat{\mathbf{Q}}_k\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2)$$

Observa-se que o vetor nulo é uma solução trivial do sistema. Para que esse sistema admita outras soluções, deve-se impor:

$$|[\mathbf{K}] - \omega^2_k [\mathbf{M}]| = 0 \quad (3)$$

Da equação (3) obtemos um polinômio de grau n , no qual as soluções ω_i são as frequências naturais não amortecidas do sistema. Para cada frequência podemos determinar um modo de vibração na forma espacial, o que nos leva à matriz modal $[\Phi]$ de ordem n , composta em cada coluna j pelos componentes referidos aos modos de vibração na forma espacial.

O objetivo deste trabalho é verificar a resistência de um dado pórtico ao choque inelástico de rochas em queda livre, através de respostas dinâmicas obtidas analiticamente, numericamente e computacionalmente através do software *Adina*®.

MODELO E METODOLOGIA DE ANÁLISE

Um túnel de 1000 km de comprimento e 5,0 m de altura foi escavado para a passagem de uma tubulação de gás natural entre duas cidades. Entretanto, a construtora optou por não revestir o túnel, de modo que, com o passar do tempo, observou-se que rochas começaram a cair, ameaçando a segurança da tubulação. Como medida imediata e de custo econômico, a construtora mapeou os locais críticos, ou seja, aqueles com rochas maiores e na iminência de queda, e optou por instalar coberturas metálicas apertadas, conforme ilustra a Figura 1.

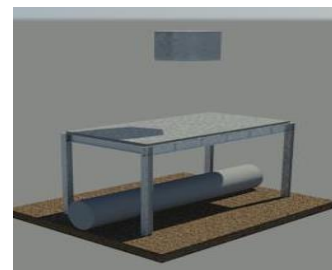


Figura 1 - Esquema da Cobertura Metálica

Neste trabalho, para a estrutura apresentada, verifica-se a resistência do pórtico de maior vão ao choque da rocha com os seguintes dados fornecidos pela construtora: 1) massa da rocha de 5000 kg, transformada em carga pontual e aplicada no meio do vão; 2) altura de queda de 2,5 m; 3) perfis metálicos dos pilares W200x59 e das vigas W200x86 de aço ASTM A 572 Grau 50 (Figura 2).

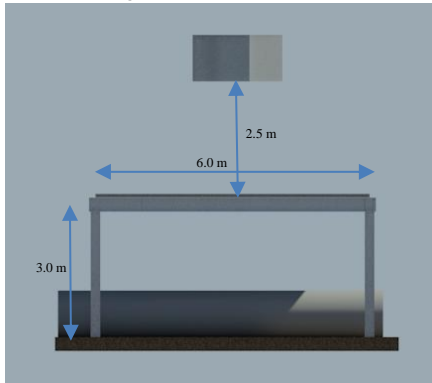


Figura 2 - Geometria analisada

A estrutura em análise possui 3 graus de liberdade, considerando-se as barras inextensíveis, conforme mostrado na Figura 3.

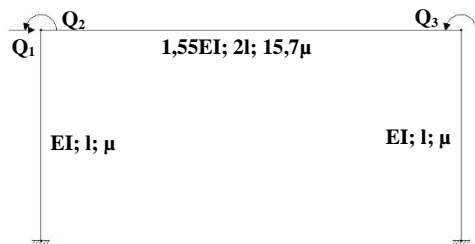


Figura 3 - Graus de Liberdade

O primeiro método utilizado para análise foi o analítico, no qual é possível fazer uma simplificação para um grau de liberdade (Q_2) já que para uma carga vertical aplicada no meio do vão, o deslocamento horizontal é nulo e as rotações são simétricas, porém opostas ($Q_3 = -Q_2$). Em seguida foi utilizado o método de integração numérica no domínio do tempo de Euler-Gauss para resolução da Equação (1), sendo este um caso particular do método de Newmark, também para um grau de liberdade. Por fim, foi utilizado o software *Adina*® para integração no domínio do tempo pelo mesmo método, considerando-se 6 graus de liberdade, com um nó a mais no local de aplicação da carga.

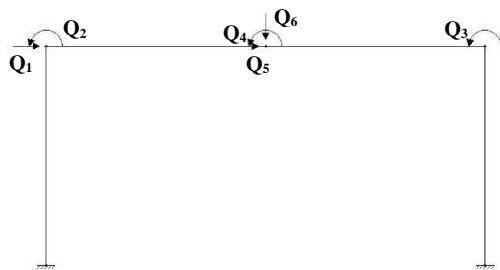


Figura 4 - 6 Graus de Liberdade

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A. Método Analítico

No sistema da Figura 3, a matriz de massa e rigidez reduzidas para elementos de barra 2D são, respectivamente:

$$[\mathbf{M}] = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 13500 & 22l & 22l \\ 22l & 506,4l^2 & -376,8l^2 \\ 22l & -376,8l^2 & 506,4l^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[\mathbf{K}] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 6l & 6l \\ 6l & 7,1l^2 & 1,55l^2 \\ 6l & 1,55l^2 & 7,1l^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Utilizando os dados fornecidos anteriormente e adicionalmente com os dados seguintes: $l = 3 \text{ m}$; $\mu = 59 \text{ kg/m}$; $E = 210 \text{ GPa}$; $I = 6140 \text{ cm}^4$, tem-se:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 5689,29 & 27,81 & 27,81 \\ 27,81 & 1920,70 & -1429,15 \\ 27,81 & -1429,15 & 1920,70 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 11461333,33 & 8596000 & 8596000 \\ 8596000 & 30515800 & 6661900 \\ 8596000 & 6661900 & 30515800 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Resolvendo a Equação (3), os autovalores são $\omega_1 = 36,188 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 84,385 \text{ rad/s}$ e $\omega_3 = 275,753 \text{ rad/s}$. Assim, a matriz modal é:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} -4,26 & 0 & 0,031 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Desta forma, a matriz de massa e rigidez modais são:

$$[\mathbf{M}^*] = \begin{bmatrix} 104153,11 & 0 & 0 \\ 0 & 6699,7 & 0 \\ 0 & 0 & 991,91 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[\mathbf{K}^*] = \begin{bmatrix} 136394790,49 & 0 & 0 \\ 0 & 47707800 & 0 \\ 0 & 0 & 75424573,52 \end{bmatrix} \quad (10)$$

O modo simétrico dado pela frequência natural ω_2 é o que resulta nos maiores deslocamentos, como ilustra a figura a seguir:

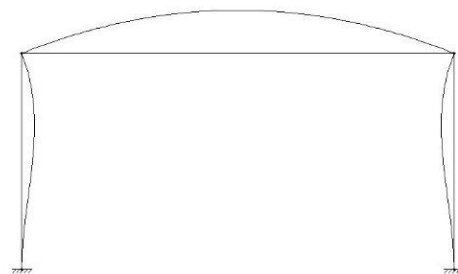


Figura 5 - Segundo Modo de Vibração

O desafio da resolução para 3 graus de liberdade é a transformação da velocidade inicial vertical devido à queda da rocha em uma velocidade angular compatível com o grau de liberdade Q_2 . Desta forma, o conceito de potência das forças entre uma carga concentrada P aplicada no meio do vão de uma viga bi-engastada e o momento provocado por ela na direção de Q_2 é utilizado para essa transformação: $u_0 = 0,044779 \text{ m/s} \rightarrow Q_{2,0} = 0,059705 \text{ rad/s}$.

Outra consideração é de que a vibração é livre e o deslocamento inicial é nulo ($u_0 = 0$), assim, a resolução da Equação (1) é dada por:

$$Q_2 = \rho \cos(\omega_2 t - \theta) \quad (11)$$

A Equação (11) possui valor máximo igual à:

$$Q_{D2,m\acute{a}x} = \frac{\rho}{\omega_2} = 0,00070962 \text{ rad} \quad (12)$$

O qual corresponde apenas à resposta dinâmica da vibração analisada.

B. Método Euler-Gauss

Assim como no método analítico, a estrutura é calculada para 1 grau de liberdade pelo método implícito de integração numérica no domínio do tempo de Euler-Gauss com o auxílio do software *Excel*®. Inicialmente definiu-se apenas a resposta dinâmica para efeito de comparação com o método analítico. Posteriormente, determinou-se a resposta harmônica contabilizando-se o efeito do carregamento estático, obtendo-se a rotação total para comparação com o resultado do software *Adina*®. Utilizando um $\alpha = 0,25$, $\delta = 0,50$, $\Delta t = T_2/20 \approx 0,004$ e resolvendo a Equação (1) para as devidas particularidades deste método implícito, tem-se:

- Resposta dinâmica:

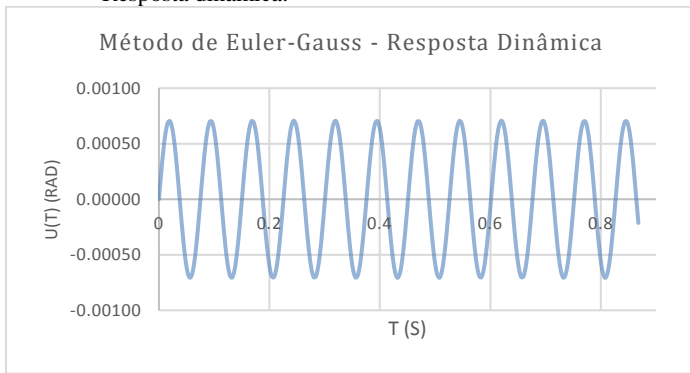


Gráfico 1 - Método de Euler-Gauss – Dinâmica

Com máximo valor para a rotação Q_2 igual à:

$$Q_{D2,m\acute{a}x} = 0,00070753 \text{ rad} \quad (13)$$

- Resposta dinâmica mais estática:

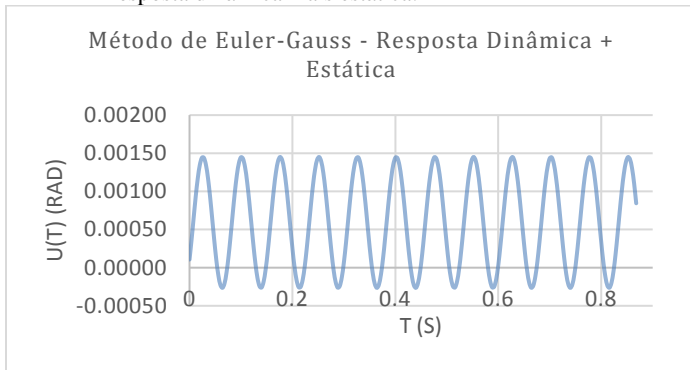


Gráfico 2 - Método de Euler-Gauss – Dinâmica + Estática

Com máximo valor para a rotação total Q_2 igual à:

$$Q_{total,2,m\acute{a}x} = 0,00145181 \text{ rad} \quad (14)$$

C. Software *Adina*®

A estrutura foi modelada no software como mostra a Figura 6:

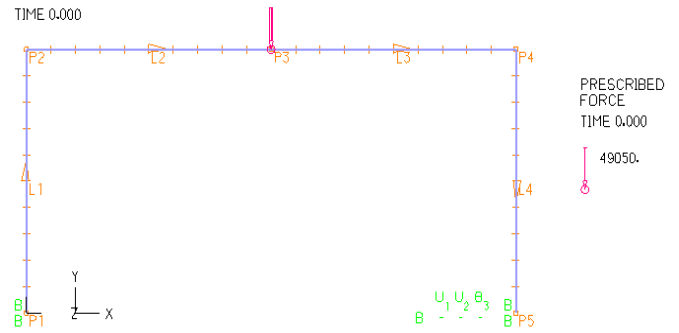


Figura 6 - Modelagem no *Adina*®

As frequências naturais são:

MODE NUMBER	NATURAL FREQUENCY
1	5.10225E+01
2	9.15941E+01
3	2.71248E+02
4	5.02442E+02
5	6.16034E+02
6	6.83740E+02

Figura 7 - Frequências Naturais

Foi utilizado o mesmo método de integração numérica para um mesmo Δt , porém para mais graus de liberdade. O resultado obtido para a rotação total Q_2 é o mostrado no Gráfico 3.

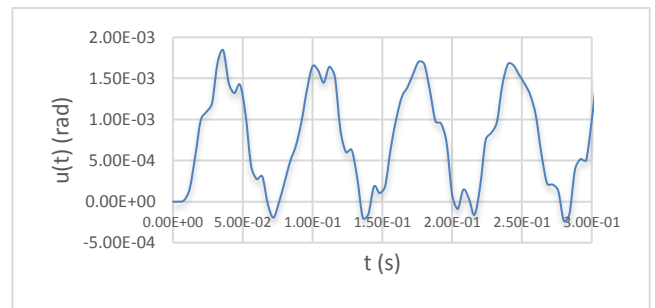


Gráfico 3 - Método de Euler-Gauss – *Adina*®

Com máximo valor para a rotação total Q_2 igual à:

$$Q_{total,2,m\acute{a}x} = 0,00186397 \text{ rad} \quad (15)$$

D. Verificação da estrutura à flexão

Quando a estrutura é carregada com o seu peso próprio e a força concentrada da rocha de forma estática, como na Figura 8, o diagrama de momentos fletores da estrutura é ilustrado na Figura 9:

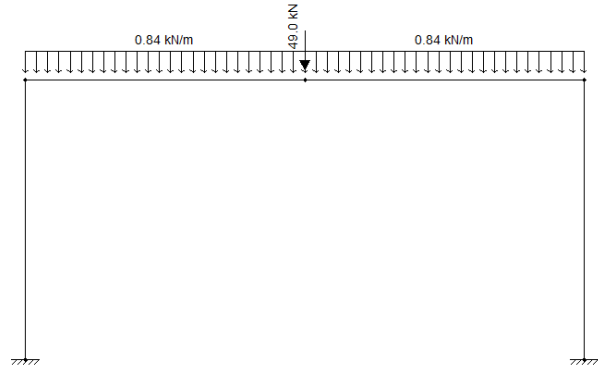


Figura 8 - Carregamento Estático

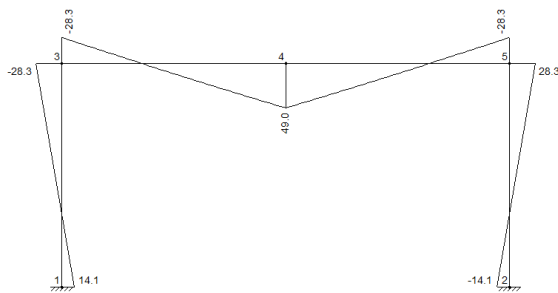


Figura 9 - Diagrama de Momento Fletor para Carga Estática [KNm]

A partir das máximas rotações dinâmicas obtidas pelos 2 primeiros métodos mencionados, utilizou-se o máximo Q_{D2} dentre eles para obtenção dos esforços aplicados nos respectivos graus de liberdade utilizando-se da seguinte equação:

$$[F] = [K] \begin{bmatrix} 0 \\ 0,00070962 \\ -0,00070962 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 16927,21 \\ -16927,21 \end{bmatrix} [N, m] \quad (16)$$

Os valores de momentos calculados na Equação (16) foram adicionados ao carregamento estático, gerando um novo diagrama de momento fletor, conforme ilustram as Figura 10 e 11, respectivamente.

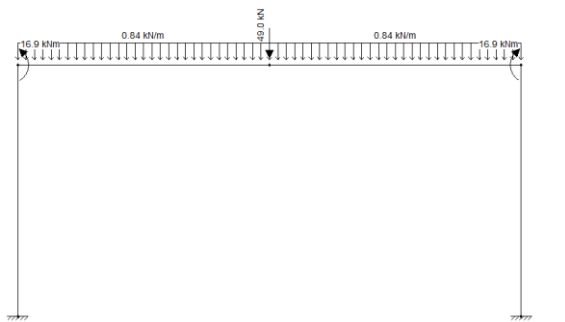


Figura 10 - Carregamento Estático e Dinâmico

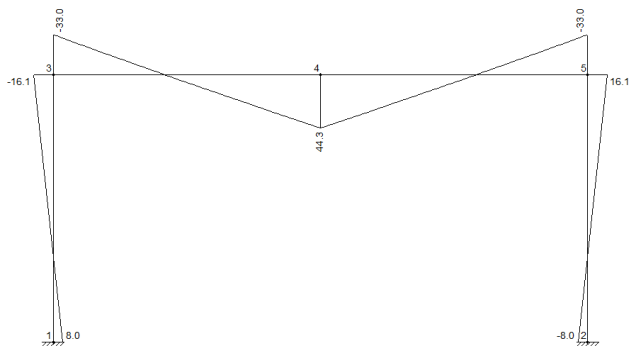


Figura 11 - Diagrama de Momento Fletor para Carga Estática e Dinâmica [kNm]

Desta forma, o coeficiente de amplificação do carregamento dinâmico D para o nó 3 é de 1,16 ao relacionar o momento total de $M_T = 33$ kNm com o momento estático $M_E = 28,3$ kNm para este nó.

O diagrama de momento da estrutura fornecido pelo *Adina*® para 6 graus de liberdade é o que se segue:

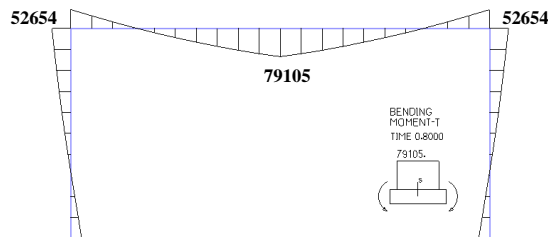


Figura 12 - Diagrama de Momento - *Adina*® [Nm]

Neste caso, o coeficiente de amplificação do carregamento dinâmico D para o nó 4 é de 1,61 ao relacionar o momento total de $M_T = 79,11$ kNm com o momento estático $M_E = 49,0$ kNm nos nós do pórtico.

A partir da Figura 12, é possível definir as tensões atuantes nas vigas e pilares com o máximo momento e compará-las com a tensão admissível de escoamento do aço ASTM A 572 Grau 50 ($f_{yk} = 345$ MPa):

$$\sigma_{\text{máx,viga}} = \frac{My}{I} = 91,61 \text{ MPa} < f_{yk} = 345 \text{ MPa} \rightarrow \text{OK!} \quad (17)$$

$$\sigma_{\text{máx,pilar}} = \frac{My}{I} = 90,04 \text{ MPa} < f_{yk} = 345 \text{ MPa} \rightarrow \text{OK!} \quad (18)$$

Portanto, para o choque de uma rocha de 5000 kg, a estrutura apresenta tensões resistentes bem superiores às tensões de sollicitação, o que poderia implicar na utilização de perfis de menor inércia.

Sobre as frequências, a discrepância entre os valores analítico e computacional é devida às hipóteses iniciais assumidas para o modelo de 1 grau de liberdade como a desconsideração da rigidez axial dos elementos e uma menor discretização que o modelo computacional levando a uma maior flexibilidade do elemento.

Em relação aos métodos aplicados, a diferença entre a solução analítica e a integração numérica para a resposta somente dinâmica é de apenas 0,3%, o que caracteriza boa aplicabilidade do modelo. Já a diferença entre o método de Euler-Gauss do *Adina*® com 6 graus de liberdade e o método de Euler Gauss com 1 grau de liberdade é de 22%, o que é uma discrepância considerável devido à influência de outros modos de vibração além do segundo no modelo computacional como pode ser visto pela existência de diferentes picos no Gráfico 3.

Por fim, os momentos fletores máximo para 1 grau e para 6 graus possuem 44% de discrepância entre si. Neste ponto, deve-se levar em consideração todas as suposições feitas para redução do modelo de 3 graus para 1 grau de liberdade, em especial a conversão da velocidade inicial vertical em velocidade angular, já que esta etapa acarreta o uso de várias hipóteses que podem ocasionar uma propagação maior de erros, levando à diferença citada. Essa diferença também pode ser atribuída ao fato de que as frequências naturais dos métodos diferem entre si como mencionado anteriormente e, por último, ao fato do *Adina*® considerar outros modos de vibração além do segundo para cálculo da estrutura.

REFERÊNCIAS

- Hibbeler, Russell Charles. *Resistência dos Materiais*. São Paulo: Pearson, 2010.
- Mazzilli, Carlos Eduardo Nigro, João Cyro André, Miguel Luiz Bucalem, e Sergio Cifú. *Lições em Mecânica das Estruturas: Dinâmica*. São Paulo: Blucher, 2016.
- Tedesco, Joseph, William McDougal, e C. Allen Ross. *Structural Dynamics - Theory and Applications*. Pearson, 1999.