

# MODELAGEM HIERÁRQUICA DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UMA ESTRUTURA ENGASTADA NA BASE, SOB CARREGAMENTO TRANSVERSAL.

Bruno Szpigel Dzialoszynski<sup>1</sup>  
Marcela Holanda Teixeira<sup>2</sup>  
Marcos André Margalho de Barros<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universidade de São Paulo - USP  
<sup>2</sup> Universidade Federal da Bahia - UFBA  
<sup>3</sup> Universidade Federal do Pará - UFPA

Seminário da disciplina PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas

## RESUMO

O presente trabalho consiste na análise comparativa de 3 modelos hierárquicos para o comportamento de uma estrutura engastada na base, sob um carregamento distribuído aplicado ao longo da uma de suas faces verticais. Primeiro aplica-se o modelo mais simples de cálculo, com analogia a um oscilador de um grau de liberdade. Em seguida, modela-se a estrutura como uma barra com múltiplos graus de liberdade ao longo de seu comprimento, através do programa *ADINA*. Por fim, utiliza-se o mesmo programa para modelar a estrutura como uma casca 3-D com múltiplos graus de liberdade ao longo de sua superfície média. A avaliação comparativa dos modelos, por um lado, ilustrou o valor da modelagem hierárquica e de modelos de baixa ordem como ferramenta de análise. Por outro, também explicitou a capacidade de modelos de maior ordem de representarem comportamentos mais complexos e oferecer maior montante de saídas.

**PALAVRAS-CHAVE:** modelagem hierárquica, carregamento distribuído, dinâmica das estruturas, vibrações.

## INTRODUÇÃO

Com a grande disponibilidade de ferramentas computacionais na engenharia de estruturas, pode surgir a problemática tendência de iniciar as análises por modelos de alta complexidade. De fato, apesar do potencial de oferecer respostas mais acuradas, modelos de alta ordem geram maior volume de resultados, de interpretação mais custosa e complexa. Modelos de baixa ordem, por outro lado, apoiam a interpretação de modelos mais sofisticados e podem oferecer respostas satisfatórias a depender da variável de interesse (Bucalem, M.L., 2011). Isso posto, a modelagem hierárquica figura como poderosa ferramenta para o estudo de um problema físico.

A análise dinâmica das estruturas consiste em formular e solucionar equações de movimento de sistemas estruturais na presença de perturbações cinemáticas, quando a estrutura está em equilíbrio, ou de ações variáveis no tempo (Mazzilli, C. E. N., 2016).

Para modelar as estruturas a serem analisadas dinamicamente, é preciso definir seus graus de liberdade / coordenadas generalizadas. No nível hierárquico mais baixo, desenvolve-se sistema com uma única coordenada generalizada. Uma vez conhecida a resposta no tempo para esta única coordenada generalizada, todo o campo de deslocamentos fica determinado e conseqüentemente é possível conhecer as deformações, tensões e esforços solicitantes (Mazzilli, C. E. N., 2016).

Evidentemente, nem toda estrutura pode ser representada

satisfatoriamente por esse modelo. A introdução de número maior de graus de liberdade permite, por exemplo, considerar crescente número de modos de vibração, bem como distribuição de massa, rigidez e carga mais realistas. Se tais fatores forem relevantes ao problema, os modelos de ordem crescente apresentarão resultados de acurácia crescente.

Nesse sentido, o presente trabalho apresenta uma análise comparativa de 3 modelos de hierarquia crescente para o comportamento dinâmico de uma estrutura engastada na base, sob um carregamento distribuído, aplicado ao longo da uma de suas faces verticais

## DESCRIÇÃO DO PROBLEMA FÍSICO

A estrutura em estudo é uma torre de 3m de altura com formato de um paralelepípedo vazado, de dimensões externas de 40 cm x 40 cm e espessura de 2 cm. Com densidade de 9.000 kg/m<sup>3</sup>, módulo de elasticidade de 3,706x10<sup>10</sup> N/m<sup>2</sup> e módulo de Poisson 0,3, a estrutura se encontra em repouso e engastada na base, sendo submetida a uma pressão horizontal distribuída ao longo da sua altura em uma das suas faces laterais, com valor máximo de 1,67x10<sup>4</sup> N/m<sup>2</sup> e variável no tempo segundo uma função senoidal. Foram feitas comparações para 2 valores de frequência de carregamento  $\omega' = 50$  rad/s e  $\omega' = 408,41$  rad/s sendo o amortecimento e as forças de gravidade desprezados. A Figura 1 ilustra o problema proposto.

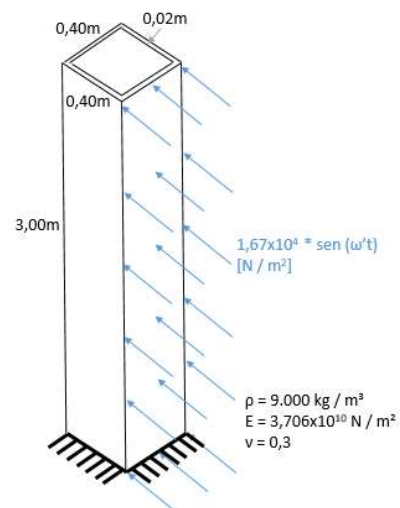


Figura 1 – Problema físico proposto

## MODELO I – OSCILADOR DE 1 GRAU DE LIBERDADE

Para o modelo hierárquico mais simples, adotou-se uma barra engastada na base com apenas 1 grau de liberdade, de deslocamento horizontal no topo. A analogia ao oscilador de um grau de liberdade implica a necessidade de considerar massa, carregamento e rigidez concentrados equivalentes na referida coordenada generalizada.

Primeiramente foi feita uma aproximação intuitiva da estrutura ao modelá-la com metade da massa (410,4 kg) concentrada no topo e a outra metade da massa na base, sendo a barra imponderável. O carregamento foi considerado pontual e também aplicado metade (10.000 N) no topo e a outra metade na base.

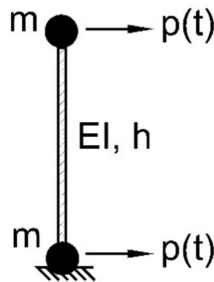


Figura 2 – Modelo I

Em seguida utilizou-se o mesmo sistema de 1 grau de liberdade, porém fazendo os cálculos para outro valor de massa (304,87 kg), que foi obtido pela multiplicação do coeficiente (156/420), extraído da matriz de massa consistente, para uma barra bi-engastada ( $E_{22} = E_{55}$ ).

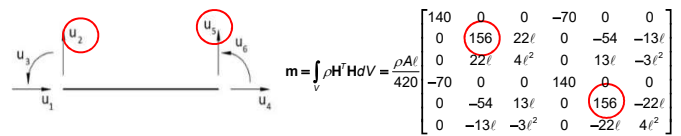


Figura 3 – Matriz de massa consistente

Como a base da barra é engastada, o momento e a força neste ponto não influenciam o deslocamento da massa no ponto superior. Portanto, o deslocamento da massa de topo é apenas provocado pela força pontual aplicada nele. Utilizando o conceito e fórmulas para vibrações forçadas em um sistema de 1 grau de liberdade, (Mazzilli, C. E. N., 2016), têm-se como respostas de saída:

### 1. Modos e frequências de vibração

Modos de vibração não corresponde a uma saída deste modelo, pois considera-se um único, definido pela coordenada generalizada e função de interpolação arbitrárias. A frequência natural da estrutura, por sua vez, é  $\omega = 85,80$  rad/s para a massa  $M/2$  e  $\omega = 99,55$  rad/s para a massa  $M(156/420)$ .

### 2. Deformada crítica

A massa no topo se desloca transversalmente para um lado e para o outro do eixo da barra. Ao longo do comprimento da barra os deslocamentos são inferidos segundo uma função de interpolação arbitrária.

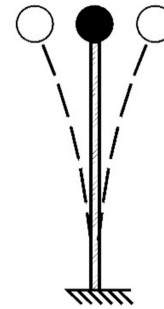


Figura 4 – Deformada, modelo I

### 3. Deslocamentos no topo da estrutura

Pelos gráficos de  $u(t)$ , consegue-se extrair os deslocamentos máximos de cada caso. A Figura 5 e a Figura 6 apresentam os resultados.

Para  $\omega' = 50$  rad/s:  $u_{\text{máx}} = 7,9 \times 10^{-3}$  m ( $M/2$ ) e  $u_{\text{máx}} = 5,7 \times 10^{-3}$  m ( $M(156/420)$ ):

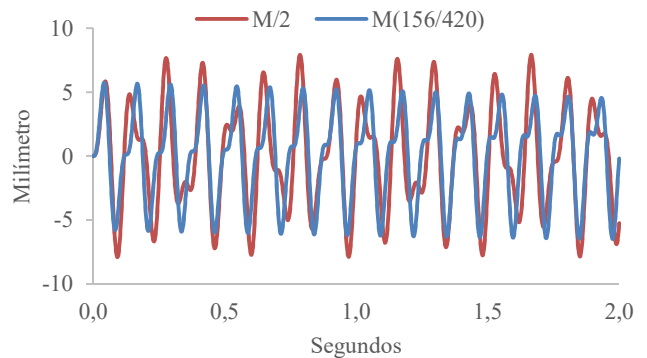


Figura 5 -  $u(t)$  para  $\omega' = 50$  rad/s

Para  $\omega' = 408,41$  rad/s:  $u_{\text{máx}} = 8,7 \times 10^{-4}$  m ( $M/2$ ) e  $u_{\text{máx}} = 1,0 \times 10^{-3}$  m para ( $M(156/420)$ ):

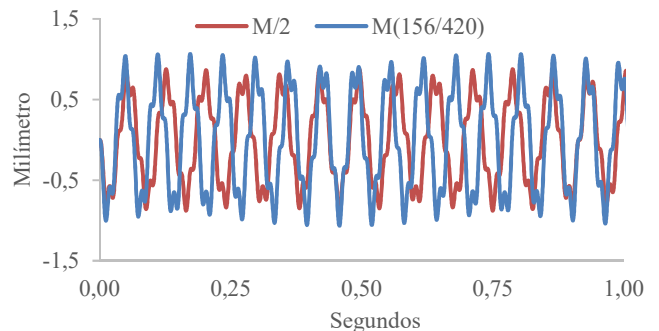


Figura 6 -  $u(t)$  para  $\omega' = 408,41$  rad/s

#### 4. Análise

Através desse modelo é possível obter o deslocamento da massa M, enquanto a deformada da barra é apenas inferida por uma função de interpolação. Logo, este modelo hierárquico não é o mais completo. A observação das curvas revela comportamento harmônico no tempo para a grandeza estudada. De fato, tal comportamento é esperado, uma vez que não há amortecimento e a parcela “transitória” perdura por toda a análise. Isso é, a resposta será representada pela sobreposição de duas funções senoidais/cossenoidais defasadas, segundo a formulação proposta.

Também é possível verificar diferenças nos gráficos de deslocamento para os dois valores de massa adotados. Isso é esperado, uma vez que a frequência natural de vibração das estruturas difere.

#### MODELO II – BARRA UNIDIMENSIONAL COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE NO PLANO

Utilizando o software de elementos finitos ADINA, modelou-se um modelo com hierarquia superior, discretizando a estrutura com elementos finitos de barra, com nós em cada extremidade e cada nó com 3 graus de liberdade (translação em X, translação em Y e rotação em Z). As características mecânicas e geométricas foram mantidas do modelo de hierarquia inferior.

Detalhou-se o comportamento mecânico aplicando:

- Material elástico isotrópico com as propriedades do modelo anterior e o associou a estrutura ( $E=37,06\text{GPa}$ ,  $\rho=9000\text{kg/m}^3$ );

Definiu-se o elemento finito:

- Elemento finito de barra: barra de Euler-Bernoulli;
  - 101 nós;
  - 303 graus de liberdade (3 graus de liberdade cada nó);
- Matriz de massa consistente (massa distribuída ao longo da estrutura);

Estipulou-se a amplitude do carregamento conforme é demonstrado na formulação abaixo:

$$Carga_{distribuída} = \frac{2P}{l} = 6666,67 \text{ kN/m}$$

Sendo:

- P: carga concentrada;
- l: comprimento da estrutura;

Implementou-se duas frequências de excitação: 50 rad/s e 408,41 rad/s.

Os dados de saída extraídos do modelo são: os 6 primeiros modos de vibração e suas frequências naturais e deslocamento ao longo do tempo na extremidade.

O modelo foi resolvido com o módulo Dynamics-Implicit do software ADINA, com integração numérica no domínio do tempo segundo o método de Bathe. Auxiliarmente, foi realizada a análise modal da estrutura com o mesmo software. Os resultados são desenvolvidos a seguir.

#### 1. Modos e frequências de vibração

A Figura 7 ilustra os modos de vibração para as primeiras 6 frequências naturais da estrutura. Observa-se que as deformações presentes, demonstram deslocamentos permitidos pelos 3 graus de liberdade implementados no sistema.

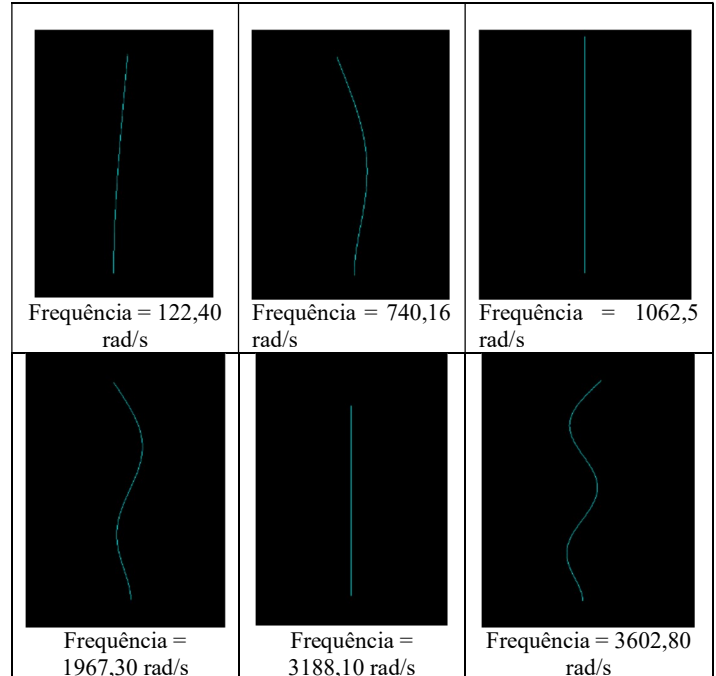


Figura 7 - Modos de vibração do modelo computacional discretizado por elementos finitos de barra.

O primeiro modo é o que apresenta a menor frequência natural, logo é de se esperar que quando a estrutura for submetida a menor frequência de excitação, o comportamento se assemelhar a este modo.

#### 2. Deformada crítica

As configurações deformadas de maior deslocamento na extremidade da estrutura, são ilustradas na Figura 8 e Figura 9. Nota-se que, quando submetida a uma frequência de 50 rad/s, a estrutura possui uma deformação próxima à do primeiro modo de vibração, porém, ao ser submetida a uma frequência de 408,41 rad/s, a maior deformada da estrutura apresenta uma deformação aproximadamente 4 vezes menor do que apresenta no primeiro caso.

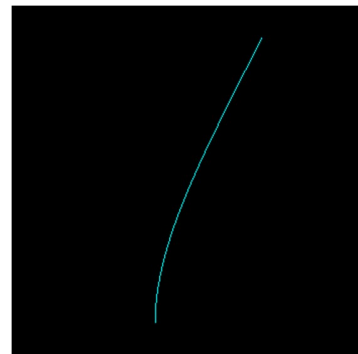


Figura 8 - Deformada no instante de máxima deformação na

extremidade com  $w' = 50 \text{ rad/s}$

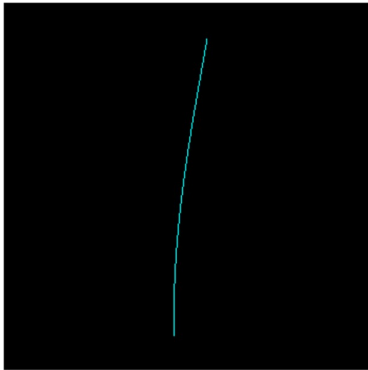


Figura 9 - Deformada no instante de máxima deformação na extremidade com  $w' = 408,41 \text{ rad/s}$

### 3. Deslocamentos na extremidade da estrutura

Os dados de saída da plataforma ADINA consistem no monitoramento ao longo do tempo do deslocamento (na mesma direção da força aplicada) da extremidade da estrutura.

A Figura 10 apresenta o comportamento da extremidade da estrutura quando submetida à uma frequência de excitação de  $50 \text{ rad/s}$ , o deslocamento máximo é de  $4,23 \text{ mm}$ .

Para  $\omega' = 50 \text{ rad/s}$ :  $u_{x\text{máx}} = 4,23 \times 10^{-3} \text{ m}$ . Nó no topo da barra.

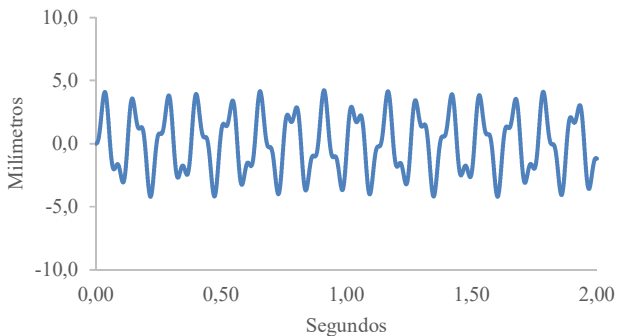


Figura 10 -  $u(t)$  para  $\omega' = 50 \text{ rad/s}$

A Figura 11 ilustra o deslocamento do nó na extremidade da estrutura quando submetida a uma frequência de excitação de  $408,41 \text{ rad/s}$ , neste regime, o deslocamento máximo é de  $1,14 \text{ mm}$ .

Para  $\omega' = 408,41 \text{ rad/s}$ :  $u_{\text{máx}} = 1,14 \times 10^{-3} \text{ m}$ . Nó no topo da barra.

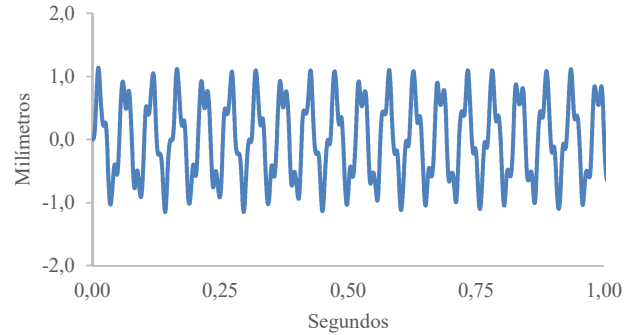


Figura 11 -  $u(t)$  para  $\omega' = 408,41 \text{ rad/s}$

### 4. Análise

A análise do comportamento estrutural, através do gráfico que detalha o deslocamento da extremidade ao longo do tempo, remete que, em ambos os casos, obteve-se uma resposta harmônica onde a parcela da equação homogênea perdura ao longo de toda simulação visto que não associara amortecimento à estrutura.

Quando exposta a frequência de excitação de  $50 \text{ rad/s}$ , a amplitude do deslocamento alcança valores próximos a  $4,23 \text{ mm}$ , alterando a frequência de excitação para  $408,41 \text{ rad/s}$ , o deslocamento máximo diminui para  $1,14 \text{ mm}$ . A explicação deste fenômeno baseia-se no fato de que  $408,41 \text{ rad/s}$  está se afastando da primeira frequência natural, porém permanece distante da segunda frequência natural do modelo.

### MODELO III – CASCA TRIDIMENSIONAL COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE NO ESPAÇO

Para a presente hierarquia a estrutura foi modelada por meio de cascas planas em um domínio tridimensional. Como a espessura de estrutura é pequena em relação a suas demais dimensões (5% da largura) assume-se boa representatividade, salvo nos cantos, onde haverá sobreposição de material.

Para tal, empregaram-se elementos bidimensionais retangulares tipo *shell* com 9 nós. A malha foi gerada a partir da discretização das arestas de cada face em 5 partes de mesmo comprimento obtendo um total de 100 elementos e 900 nós. A Figura 12 apresenta a malha empregada na análise bem como os vínculos e carregamentos pertinentes.



Figura 12 – Malha de elementos com vínculos e carregamentos impostos

O modelo foi resolvido com o módulo Dynamics-Implicit do software ADINA, com integração numérica no domínio do tempo segundo o método de Bathe. Auxiliariamente, foi realizada a análise modal da estrutura com o mesmo software. Os resultados são desenvolvidos a seguir.

### 1. Modos e frequências de vibração

A Figura 13 exprime os 6 primeiros modos de vibração segundo as proporções dos valores em cada grau de liberdade e as respectivas frequências. É importante notar a indicação dos eixos em cada caso. A configuração indeformada é plotada em tonalidade mais escura.

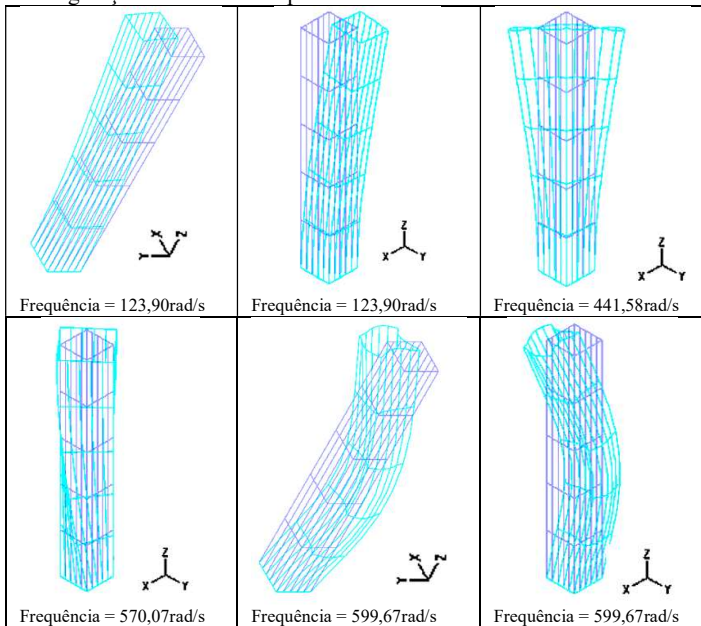


Figura 13 – Modos de vibração, modelo III

É interessante notar que os dois primeiros modos apresentam frequência muito mais baixa que os demais. Adicionalmente, destaca-se que, dois a dois, o 1º e 2º modos e 5º e 6º modos possuem frequência equivalente e geometria simétrica em relação à bissetriz dos eixos x e y. Isso é esperado devido à mesma simetria na estrutura. De fato, qualquer combinação linear dos modos, dois a dois, será um modo natural com a referida frequência.

### 2. Deformada crítica

A Figura 14 apresenta a deformada no instante de máximo deslocamento nodal para as duas frequências de excitação avaliadas.

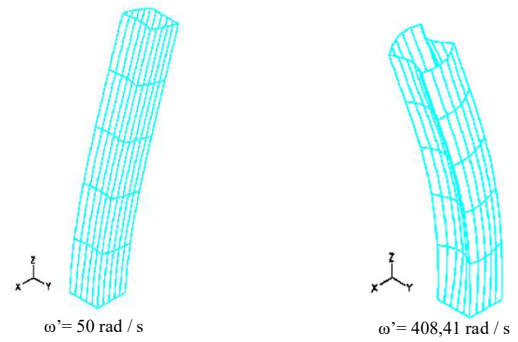


Figura 14 – Deformadas, modelo III

Para o primeiro caso, nota-se similitude com uma combinação do 1º e 2º modos (de mesma frequência), salvo por uma leve flexão na face que recebe o carregamento. O segundo caso novamente remete aos 2 primeiros modos, mas também se nota geometria que pode associar-se ao 3º, 5º e 6º modo.

### 3. Deslocamentos no topo da estrutura

A Figura 15 e a Figura 16 apresentam os resultados dos deslocamentos ao longo do tempo para o nó onde foi verificado máximo deslocamento ao longo do eixo x para cada frequência.

Para  $\omega' = 50 \text{ rad/s}$ :  $u_{y_{\text{máx}}} = 3,99 \times 10^{-3} \text{ m}$ . Nó no topo da barra no centro da aresta onde é aplicada a carga.

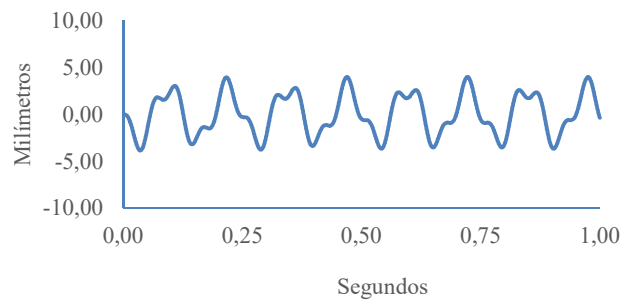


Figura 15 -  $u(t)$  para  $\omega' = 50 \text{ rad / s}$

Para  $\omega' = 408,41 \text{ rad/s}$ :  $u_{y_{\text{máx}}} = 1,33 \times 10^{-3} \text{ m}$ . Nó no topo da barra no centro da aresta oposta à aplicação da carga.

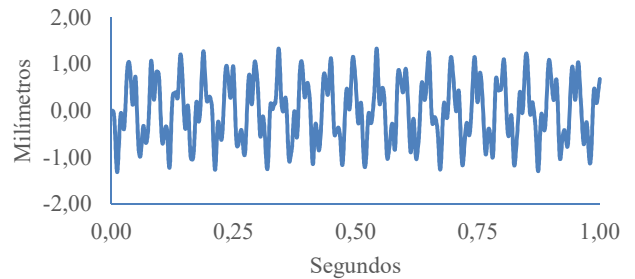


Figura 16 -  $u(t)$  para  $\omega' = 408,41 \text{ rad/s}$

### 4. Análise

A observação dos gráficos de deslocamento remete a uma resposta harmônica, como esperado, devido à influência de múltiplos modos de

vibração. É latente a influência de uma frequência de excitação mais alta nos gráficos de resposta, resultando picos mais estreitos. Adicionalmente, como esperado, a primeira frequência resulta maiores valores, por sua maior proximidade às frequências dos primeiros modos de vibração.

É interessante notar que a análise modal resulta modos de vibração que não poderiam ser considerados nos modelos de hierarquia mais baixa – a saber, 3º, 4º e, em parte 5º e 6º devido à deformação da seção transversal. Observando as deformadas, verifica-se que tais efeitos fazem-se sentir com a flexão das faces ao longo do plano xy, não considerada nos demais modelos.

## ANÁLISE COMPARATIVA E CONCLUSÕES

A observação e comparação dos resultados ilustra o valor da modelagem hierárquica como ferramenta de análise de problemas físicos. Ao mesmo tempo, fica explicitado o potencial e limitações de cada ordem hierárquica aplicada.

O modelo de ordem hierárquica mais baixa – oscilador com um grau de liberdade – mostrou resposta ao menos em ordem de grandeza e em caráter qualitativo compatível com o esperado, especialmente para o caso de matriz de massa consistente. Tais resultados ilustram o valor de modelos de grande simplicidade na compreensão do comportamento básico de problemas físicos complexos, bem como em triagens iniciais de respostas. É interessante notar que tal modelo superestima a resposta para o primeiro carregamento, mas subestima para a segundo, por não considerar modos de vibração de maior frequência.

Analisando o modelo de ordem média percebe-se que os resultados para os deslocamentos máximos se aproximam consideravelmente daqueles auferidos no modelo de mais alta ordem.

De fato, para o primeiro carregamento testado, a diferença de resposta entre o segundo e terceiro modelo é da ordem de 6%, considerada baixa. Atribui-se a qualidade de tal resposta ao fato de a frequência de excitação ser menor que aquela do primeiro modo de vibração identificado nos modelos – que apresenta grande semelhança, tanto na frequência quanto na forma. Isso é, esse modo de vibração, bem representado por ambos os modelos, governa o comportamento físico e, portanto, o modelo de menor hierarquia é mais representativo da realidade. Observando a deformada do modelo de casca, percebe-se que a deformação da seção transversal – comportamento não identificado no segundo modelo – é baixa.

No caso do segundo carregamento, todavia, o desvio entre modelos cresce para a ordem de 16%. Nesse caso a frequência de excitação aproxima-se daquela do 3º modo de vibração (e em menor monta, do 4º, 5º e 6º). Todos esses modos de vibração consideram deslocamentos que não podem ser avaliados no modelo de ordem média. A observação de deformada da casca torna latente que deslocamentos da seção transversal agora são relevantes, e, portanto, a qualidade da resposta do modelo de média ordem deve cair.

Em suma, por um lado, percebe-se o valor de modelos de baixa ordem para a avaliação do comportamento físico básico de problemas de engenharia. Por outro, percebe-se que a seleção da ordem hierárquica de um modelo aplicado deve ser criteriosa, e garantir que o mesmo seja capaz de representar os comportamentos físicos relevantes à resposta buscada.

## REFERÊNCIAS

BUCALEM, Miguel Luiz; BATHE, Klaus-Jurgen. **The mechanics of solids and structures-hierarchical modeling and the finite element solution**. Springer Science & Business Media, 2011.

MAZILLI, Carlos Eduardo Nigro; ANDRÉ, João Cyro; BUCALEM, Miguel Luiz; CIFÚ, Sergio. **Lições em mecânica das estruturas: dinâmica**. Blucher, 2016.