1º semestre de 2017

Gabarito Lista de exercícios 6 – Variáveis Aleatórias Contínuas

Exercício 1

A temperatura T de destilação do petróleo numa refinaria é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo de 150° a 300°.

(a) Encontre f(t) e F(t);

(b) construa o gráfico de F(t);

(c) encontre E(T) e Var(T);

(d) se o óleo é destilado a uma temperatura inferior a 200º, o custo do galão fica em 0,40 USD, e se o petróleo é destilado numa temperatura superior o custo sobe para 0,50 USD. Qual o custo esperado para produzir um galão de petróleo?

Solução

(a) Seja T~U[150,300]. Então,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{150}, & \text{se } 150 \leq t \leq 300 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

A função de distribuição acumulada é dada por,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 150 \\ \int_{150}^{t} \frac{1}{150} dx = \frac{t-150}{150}, & \text{se } 150 \leq t \leq 300 \\ 1, & t > 300. \end{cases}$$

(b) A Figura5 representa o gráfico da distribuição acumulada para a variável T.

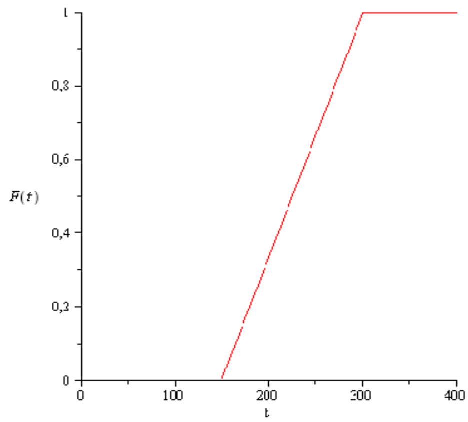

Figura 1: Gráfico da Função de distribuição cumulativa para a variável T

(c) Sabemos que se X~U(a,b), então, E(X) = $\frac{a+b}{2}$ e Var(X) = $\frac{(b-a)^2}{12}$. Como T~U[150,300] então,

$$E(T) = \frac{150 + 300}{2} = 225,$$

$$\mathrm{Var(T)} = \frac{(300-150)^2}{12} = \frac{22500}{12} = 1875.$$

Observação: Podemos resolver,

$$\mathrm{E(T)} = \int_{150}^{300} \frac{t}{150}dt = \frac{t^2}{2\times 150}\Big|_{t=150}^{300} = \frac{300^2-150^2}{300} = \frac{90000-22500}{300} = \frac{67500}{300} = 225$$

$$\mathrm{E(T^2)} = \int_{150}^{300} \frac{t^2}{150}dt = \frac{t^3}{3\times 150}\Big|_{t=150}^{300} = \frac{300^3-150^3}{4500} = \frac{27000000-3375000}{450} = 52500$$

$$\mathrm{Var(T)} = \mathrm{E(T^2)} - \mathrm{E^2(T)} = 52500 - 225^2 = 1875$$

(d) Seja C o custo para produzir um galão de petróleo,

$$C = \begin{cases} 0,4 & \text{se } t < 200 \\ 0,5 & \text{se } t \geq 200 \end{cases}.$$

O custo esperando para produzir um galão de petróleo fica dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{E(C)} &= 0,4\mathrm{P(T<200)} + 0,5\mathrm{P(T \geq 200)} = 0,4\int_{150}^{200}\frac{1}{150}dx + 0,5\int_{200}^{300}\frac{1}{150}dx \\ &= \frac{0,4\times 50}{150} + \frac{0,5\times 100}{150} = \frac{20+50}{150} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

Ou podemos resolver,

- probabilidade P(T<200) corresponde à área do retângulo A (Figura 2) de base $\Delta_A = 50$ e altura $h_A = \frac{1}{150}$. Essa área fica dada por

$$A = \Delta_A \times h_A = 50 \times \frac{1}{150} = \frac{1}{3};$$

- e temos que $P(T \geq 200) = 1 - P(T < 200) = \frac{2}{3}$.

Portanto,

$$\mathrm{E(C)} = 0,4 \times \frac{1}{3} + 0,5 \times \frac{2}{3}$$

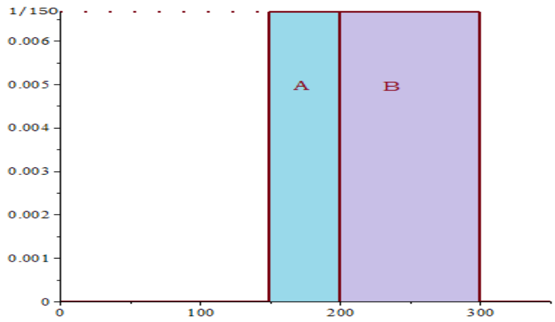

Figura 2: Gráfico de f(x)

Exercício 2

Seja X a demanda diária (em centenas de quilos) de um determinado produto. A função densidade de probabilidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3}, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{x}{3}, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{se } 0 > x \text{ ou } x > 3. \end{cases}$$

(a) Construa o gráfico de f(x);

(b) Encontre E(X) e Var(X);

(c) qual a probabilidade que, em um dado dia, se venda mais de 100 kg? E menos de 50kg?

Solução

a) A Figura3 representa o gráfico de f(x).

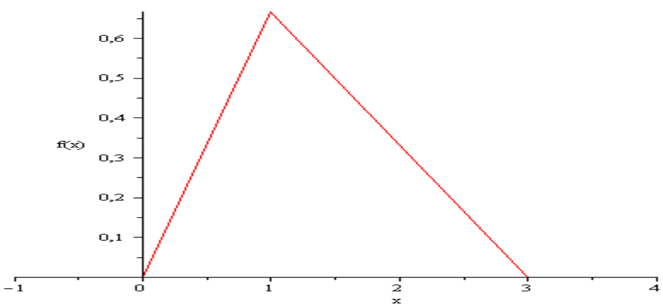

Figura 3: Gráfico de f(x)

b) Observamos facilmente pelo gráfico de f(x) dado no item a que X∼ T(0,1,3), portanto,

$$E(X) = \frac{0+1+3}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,333.$$

e

$$Var(X) = \frac{0^2+1^2+3^2-0\times 1-0\times 3-1\times 3}{18} = \frac{7}{18}.$$

Ou podemos resolver:

i) a esperança de X fica dada por,

$$\begin{aligned}
\text{E(X)} &= \int_0^1 x\frac{2x}{3}dx + \int_1^3 x\left(1-\frac{x}{3}\right)dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 x^2dx + \int_1^3 xdx - \frac{1}{3}\int_1^3 x^2dx \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^3 - \frac{1}{3}\times\frac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^3 \\
&= \frac{2}{3}\times\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right) + \left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right) - \frac{1}{3}\times\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{9-1}{2} - \frac{1}{3}\times\frac{27-1}{3} \\
&= \frac{2}{9}+\frac{8}{2}-\frac{26}{9} = 4-\frac{24}{9} = \frac{36-24}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}. \approx 1,333.
\end{aligned}$$

ii) Observe que,

$$\begin{aligned}
\text{E(X}^2) &= \int_0^1 x^2\frac{2x}{3}dx + \int_1^3 x^2\left(1-\frac{x}{3}\right)dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 x^3dx + \int_1^3 x^2dx - \frac{1}{3}\int_1^3 x^3dx \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^3 - \frac{1}{3}\times\frac{x^4}{4}\Big|_{x=1}^3 \\
&= \frac{2}{3}\times\left(\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right) + \left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) - \frac{1}{3}\times\left(\frac{3^4}{4}-\frac{1^4}{4}\right) \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{1}{4} + \frac{27-1}{3} - \frac{1}{3}\times\frac{(81-1)}{4} \\
&= \frac{2}{12}+\frac{26}{3}-\frac{80}{12} = \frac{1}{6}+\frac{26}{3}-\frac{40}{6} = \frac{1+52-40}{6} = \frac{13}{6}.
\end{aligned}$$

iii) Logo,

$$\text{Var(X)} = \text{E(X}^2) - \text{E}^2\text{(X)} = \frac{13}{6}-\frac{16}{9} = \frac{39-32}{18} = \frac{7}{18} \approx 0,389$$

c) A probabilidade de que um dado dia se venda mais de cem kg é dada por P $(X > 1)$ que corresponde à área do triângulo A de base $\Delta_A = 3-1 = 2$ e altura $h_A = f(1) = 1-1/3 = 2/3$, isto é

$$P(X > 1) = \frac{2 \times 2/3}{2} = \frac{2}{3}.$$

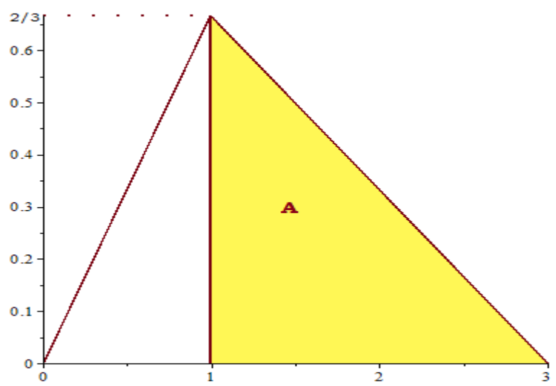

Figura 4: Gráfico de f(x)

A probabilidade de que um dado dia se venda menos de 50 kg é dada por, P $(X < 0,5)$ que corresponde à área do triângulo B de base $\Delta_B = 1/2 = 0,5$ e altura $h_A = f(0,5) = (2 \times 0,5)/3 = 1/3$, isto é

$$P(X < 1) = \frac{1/2 \times 1/3}{2} = \frac{1}{12}.$$

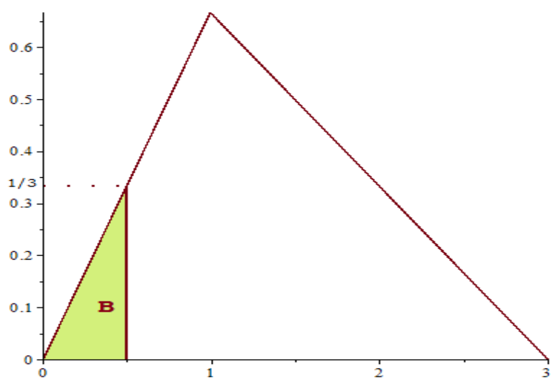

Figura 5: Gráfico de f(x)

Observação: Ou pode-se resolver:

– A probabilidade de que um dado dia se venda mais de cem kg é dada por,

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= \int_1^3 1 - \frac{x}{3}dx = \left[x - \frac{x^2}{6}\right]_{x=1}^3 = \left[3 - \frac{3^2}{6}\right] - \left[1 - \frac{1^2}{6}\right] \\ &= 2 - \frac{(9-1)}{6} = \frac{12-8}{6} = \frac{2}{3} \approx 0,667. \end{aligned}$$

– A probabilidade de que se venda menos de cinquenta kg é dada por,

$$\begin{aligned} P(X < 0,5) &= \int_0^{0,5} \frac{2x}{3}dx = \left[2 \times \frac{x^2}{6}\right]_{x=0}^{0,5} = \left[2 \times \frac{0,5^2}{6}\right] - \left[2 \times \frac{0^2}{6}\right] \\ &= \frac{2 \times (0,25)}{6} = \frac{0,25}{3} = \frac{1}{12} \approx 0,083. \end{aligned}$$

Exercício 3

As alturas de 1000 alunos de uma universidade tem distribuição aproximadamente $N(1,7m,(0,05m)^2)$. Responda às questões abaixo.

(a) Determinar o número esperado de estudantes com alturas superiores a 1,65m.

(b) Qual o número esperado de estudantes com altura entre 1,67m e 1,73m? [As probabilidades podem ser calculadas no R ou Excel.]

Solução

a) Seja X a variável referente a altura de 1000 alunos de uma universidade, $X \sim N(1,7,(0,05m)^2)$. Vamos determinar inicialmente a probabilidade de um estudante aleatório ter altura superior a 1,65.

$$P(X > 1,65) = 1 - P(X \leq 1,65) = 1 - 0,1586553 = 0,8413447.$$

Logo o número esperado de estudantes com altura superior a 1,65 fica dado por

$$0,8413447 \times 1000 = 841,3447 \approx 841.$$

b) Vamos determinar a probabilidade de um estudante aleatório ter altura entre 1,67 e 1,73m.

$$P(1,67 < X < 1,73) = P(X < 1,73) - P(X \leq 1,67) = 0,7257469 - 0,2742531 = 0,4514938.$$

Logo o número esperado de estudantes com altura entre a 1,67 e 1,73 fica dado por

$$0,4514938 \times 1000 = 451,4938 \approx 451.$$

Código para obter no R as probabilidades necessárias,

```
pnorm(1.65, mean = 1.7, sd = 0.05)
pnorm(1.67, mean = 1.7, sd = 0.05)
pnorm(1.73, mean = 1.7, sd = 0.05)
```

Exercício 4

Seja T o tempo necessário para eliminar o perigo de contaminação de certo pesticida, após sua aplicação em um pomar. Sabe-se que a variável aleatória T segue distribuição exponencial de parâmetro λ=2 (em anos). O maior ou menor tempo depende de fatores como chuva, vento e umidade da região. Tendo em vista esse comportamento, as autoridades sanitárias recomendam que o contato direto ou indireto com as frutas pulverizadas seja evitado por algum tempo após a aplicação. Responda às questões abaixo. Calcule a probabilidade de uma fruta desse pomar, escolhida ao acaso, não estar mais contaminada após 1 ano da pulverização. Se num determinado lote 1000 frutas continuam contaminados após um ano, quantas frutas espera-se estarem ainda contaminadas após 2 anos? Calcule P(T > E(X) + 2DP(T)).

Solução

Seja T o tempo necessário para eliminar o perigo de contaminação de certo pesticida, após sua aplicação em um pomar, T~ exp(2).

- A probabilidade de uma fruta deste pomar, escolhida ao acaso, não estar contaminada após 1 ano da pulverização é igual a probabilidade de $T \leq 1$, isto é, a probabilidade de que o tempo necessário para eliminar o perigo de contaminação de certo pesticida seja menor ou igual a um ano. Temos,

$$P(T \leq 1) = \int_0^1 2e^{-2x}dx = -e^{-2} + e^{-0} = -e^{-2} + 1 = 1 - 0,1353353 = 0,8646647.$$

- Incialmente, note o seguinte:

Teorema 0.1 *Se* $X \sim \exp(\lambda)$ *então*

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s) \tag{1}$$

em que $s > 0$ *e* $t > 0$.

Prova 0.1

$$\begin{aligned} P(X > s + t | X > t) &= \frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{P(X > t | X > s + t)\, P(X > s + t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{1\, P(X > s + t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq s + t)}{1 - P(X \leq t)} \\ &= \frac{1 - \left(1 - e^{-\lambda\,(s+t)}\right)}{1 - (1 - e^{-\lambda\, t})} \\ &= \frac{e^{-\lambda\,(s+t)}}{e^{-\lambda\, t}} \\ &= e^{-\lambda\, s} \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\lambda\, s}\right) = P(X > s). \end{aligned}$$

Agora, vamos começar com a sulução do problema. Assim, a probabilidade de que uma fruta deste pomar contaminada após de um ano, esteja contaminada ainda após de dois anos é dada por:

$$P(T > 2|T > 1)$$

e pela equação (1) e usando o item acima temos que

$$P(T > 2|T > 1) = P(T > 1) = 1 - P(t \leq 1) = 1 - 0,8646647 = 0,1353353.$$

Logo, num lote de 1000 frutas contaminadas após 1 ano, espera-se que após 2 anos o número de frutas ainda contaminadas seja dada por:

$$0,1353353 \times 1000 = 135,3353$$

Isto é, aproximadamente 135 frutas.

- Como T~exp(2) então, E(T) = $\frac{1}{2}$ e Var(T) = $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

  Logo,

$$\begin{aligned} P(T > E(T) + 2DP(T)) &= P\left(\mathrm{T} > \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{4}}\right) = P\left(\mathrm{T} > \frac{3}{2}\right) \\ &= \int_{3/2}^{\infty} 2e^{-2x}dx = lim_{t\to\infty} - e^{-2x} + e^{-3} = -0 + e^{-3} \\ &= 0,04978707 \approx 0,0498 \end{aligned}$$