PEF2603
Estruturas na Arquitetura III -
Sistemas Reticulados e Laminares

Placas/lajes

Cálculo da reações nas vigas
(15/05/2017)

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti , Leila Meneghetti Valverdes, Luís Bitencourt

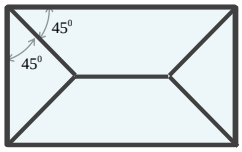
1º Semestre 2017

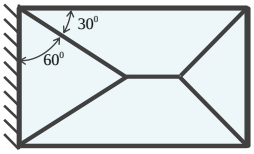
Cálculo das reações distribuídas ao longo dos apoios (vigas)

O cálculo das reações de apoio das lajes maciças retangulares sob a ação de cargas uniformemente distribuídas pode ser feito a partir das áreas de influência.
Essas áreas são definidas pelas linhas de ruptura da laje, as quais partem dos vértices do retângulo com os seguintes ângulos.

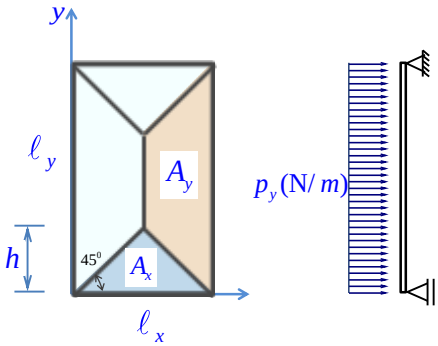
- 45º entre apoios do mesmo tipo
- 60º a partir do apoio engastado quando o outro for considerado simplesmente apoiado
- 90º a partir do apoio quando a borda vizinha for livre.

Admite-se, simplificadamente que as cargas resultantes sobre as vigas sejam uniformes.





Ex. 1. laje simplesmente apoiada nas bordas

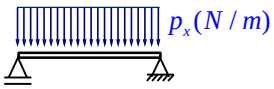


$$tg45^\circ = \frac{h}{\ell_x/2} \quad \therefore \quad h = \frac{\ell_x}{2}$$

$$A_y = \frac{(\ell_y + \ell_y - \ell_x)\times \ell_x/2}{2}$$

$$A_y = \frac{2\ell_y \times \ell_x}{4} - \frac{\ell_x^2}{4}$$

$$A_y = \frac{\ell_x}{4}(2\ell_y - \ell_x)$$



$$A_x = \ell_x \times \frac{\ell_x}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\ell_x^2}{4}$$

$$p_x = \frac{p \times A_x}{\ell_x} = p\frac{\ell_x^2}{4\ell_x}$$

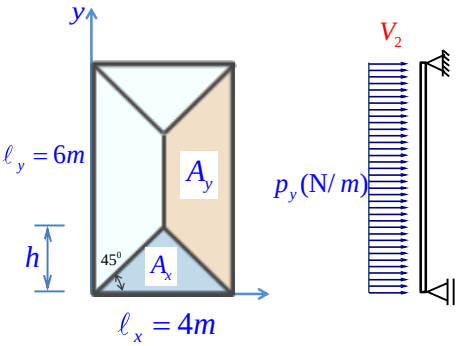
$$\boxed{p_x = p\frac{\ell_x}{4}}$$

$$p_y = \frac{p \times A_y}{\ell_y} = p\frac{\ell_x}{4}(2\ell_y - \ell_x)\frac{1}{\ell_y}$$

$$p_y = p_x(2\ell_y - \ell_x)\frac{1}{\ell_y}$$

$$\boxed{p_y = p_x\left(2 - \frac{\ell_x}{\ell_y}\right)}$$

Aplicando as equações para o exercício da aula passada

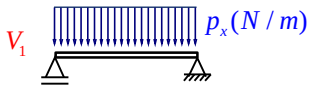


Cargas em V_1 e V_2

$$p = 6kN/\mathrm{m}^2$$

$$p_y = p_x\left(2 - \frac{\ell_x}{\ell_y}\right) = 6\left(2 - \frac{4}{6}\right)$$

$$\boxed{p_y = 8kN/\mathrm{m}}$$



$$\boxed{p_x = p\frac{\ell_x}{4} = 6\frac{4}{4} = 6kN/m}$$

TABELA DE CÁLCULO DE LAJES (Czerny, com Coeficiente de Poisson nulo)

p = carga uniformemente distribuída — Apoio Simples — Engaste

Flecha $a = p \cdot l_x^4 / (\alpha_v \cdot E \cdot h^3)$

$m_x = p \cdot l_x^2 / \alpha_x$; $m_y = p \cdot l_x^2 / \alpha_y$; $m_{ex} = -p \cdot l_x^2 / \beta_x$; $m_{ey} = -p \cdot l_x^2 / \beta_y$

Revisão R0

TIPO — lx = lado menor — ly = lado maior

TIPO		ly/lx	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45	1,5	1,55	1,6	1,65	1,7	1,75	1,8	1,85	1,9	1,95	2	3
A1	lx	α_x	20,5	18,7	17,1	15,8	14,7	13,7	13,0	12,4	11,9	11,2	10,6	10,4	10,0	9,7	9,4	9,2	8,9	8,7	8,6	8,4	8,3	8,7
		α_y	27,2	24,5	22,4	20,7	19,1	17,8	16,8	15,8	15,0	14,3	13,7	13,2	12,7	12,3	11,9	11,5	11,3	11,0	10,8	10,6	10,4	8,0
	ly	α_y	27,2	27,5	27,9	28,4	29,1	29,9	30,9	31,8	32,8	33,8	34,7	35,4	36,1	36,7	37,3	37,9	38,5	38,9	39,4	39,8	40,3	40,5
A2	lx	α_x	28,9	26,5	23,7	21,4	19,5	18,0	16,6	15,5	14,5	13,7	12,9	12,3	11,7	11,2	10,8	10,4	10,1	9,7	9,5	9,2	9,0	8,7
		α_y	41,2	36,5	31,9	28,3	25,9	23,4	21,7	20,1	18,8	17,5	16,6	15,7	15,0	14,3	13,8	13,2	12,8	12,3	12,0	11,6	11,4	8,0
	ly	α_y	29,4	29,0	28,8	28,6	28,9	29,2	29,7	30,2	30,8	31,6	32,3	33,0	33,6	34,3	34,9	35,6	36,2	36,9	37,5	38,2	38,8	38,8
		β_x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		β_y	11,9	11,3	10,9	10,4	10,1	9,8	9,6	9,3	9,2	9,0	8,9	8,8	8,7	8,6	8,5	8,5	8,4	8,4	8,3	8,3	8,2	8,0
A3	lx	α_x	43,5	37,8	33,0	29,2	26,1	23,5	21,4	19,6	18,1	16,8	15,6	14,7	13,9	13,1	12,5	11,9	11,4	10,9	10,5	10,2	9,9	8,7
		α_y	63,0	52,2	46,1	39,8	35,5	31,5	28,5	25,8	23,7	22,0	20,4	19,0	17,9	16,9	16,0	15,2	14,6	13,9	13,4	12,9	12,5	8,0
	ly	α_y	35,1	33,7	32,9	32,2	31,7	31,3	31,2	31,2	31,4	31,7	32,1	32,7	33,3	34,0	34,9	35,9	37,1	38,3	39,7	41,1	42,4	43,0
		β_x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		β_y	14,3	13,4	12,7	12,0	11,5	11,1	10,7	10,3	10,0	9,8	9,5	9,3	9,2	9,1	8,9	8,8	8,7	8,6	8,5	8,4	8,4	8,0
B1	lx	α_x	29,9	28,0	26,3	24,9	23,8	22,8	22,0	21,2	20,6	20,1	19,6	19,2	18,8	18,5	18,2	18,0	17,8	17,6	17,4	17,2	17,1	16,7
		α_y	31,4	29,2	27,3	25,6	24,5	23,4	22,4	21,6	21,0	20,3	19,8	19,4	19,0	18,6	18,3	18,0	17,8	17,5	17,4	17,2	17,1	14,3
	ly	α_y	41,2	43,2	45,1	47,1	48,8	50,3	51,8	53,2	54,3	55,0	55,6	56,2	56,8	57,3	57,8	58,2	58,6	58,8	59,0	59,1	59,2	60,0
		β_x	11,9	11,3	10,9	10,5	10,2	9,9	9,7	9,4	9,3	9,1	9,0	8,9	8,8	8,7	8,6	8,5	8,4	8,3	8,3	8,3	8,3	8,0
		β_y	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
B2	lx	α_x	39,7	35,6	33,1	30,4	28,7	27,1	25,7	24,5	23,5	22,6	21,8	21,2	20,7	20,2	19,7	19,3	18,9	18,6	18,3	18,1	17,8	16,7
		α_y	42,7	36,0	35,1	32,2	30,0	28,0	26,5	25,2	24,1	23,1	22,2	21,8	21,0	20,4	19,9	19,5	19,1	18,7	18,4	18,1	17,9	14,3
	ly	α_y	40,2	41,0	42,0	42,9	44,0	45,6	47,6	49,6	51,0	52,1	53,0	54,1	54,8	55,6	56,3	57,0	57,7	58,3	59,0	59,6	60,2	62,0
		β_x	14,3	13,3	12,7	12,0	11,5	11,1	10,7	10,3	10,0	9,8	9,6	9,4	9,2	9,1	8,9	8,8	8,7	8,6	8,5	8,4	8,4	8,0
		β_y	14,3	13,8	13,6	13,3	13,1	12,9	12,8	12,7	12,6	12,5	12,4	12,3	12,3	12,2	12,2	12,2	12,2	12,2	12,2	12,2	12,2	12,2
B3	lx	α_x	53,2	47,2	42,4	38,5	35,2	32,5	30,4	28,5	27,0	25,6	24,4	23,5	22,6	21,9	21,2	20,7	20,2	19,7	19,3	18,9	18,6	16,7
		α_y	58,5	51,6	46,1	41,4	37,5	34,2	31,8	29,6	28,0	26,4	25,2	24,2	23,3	22,5	21,7	21,1	20,5	20,0	19,5	19,1	18,7	14,3
	ly	α_y	44,1	43,6	43,7	44,2	44,8	45,8	46,9	48,6	50,3	52,3	55,0	58,2	61,8	65,6	70,4	75,0	79,6	84,7	89,8	95,4	101,0	101,0
		β_x	18,3	16,6	15,4	14,4	13,5	12,7	12,2	11,6	11,2	10,9	10,6	10,3	10,1	9,9	9,7	9,5	9,4	9,2	9,0	8,9	8,8	8,0
		β_y	16,2	15,4	14,8	14,3	13,9	13,5	13,3	13,1	13,0	12,8	12,7	12,6	12,6	12,5	12,5	12,4	12,4	12,3	12,3	12,3	12,3	12,3
C1	lx	α_x	43,5	41,5	39,8	38,5	37,5	36,4	35,7	35,1	34,6	34,1	33,7	33,3	33,1	32,8	32,6	32,5	32,4	32,3	32,2	32,1	31,9	31,3
		α_y	35,1	33,0	31,7	30,4	29,4	28,5	27,8	27,1	26,6	26,1	25,8	25,4	25,2	24,9	24,7	24,5	24,4	24,3	24,3	24,2	24,1	23,8
	ly	α_y	61,7	64,5	67,2	69,6	71,5	72,8	73,5	74,1	74,6	75,3	75,8	76,5	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0
		β_x	14,3	13,8	13,5	13,2	13,0	12,7	12,6	12,4	12,3	12,2	12,2	12,1	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0
		β_y	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
C2	lx	α_x	53,2	49,5	46,7	44,2	42,4	40,8	39,5	38,3	37,3	36,5	35,7	35,1	34,6	34,0	33,6	33,2	33,0	32,8	32,6	32,5	32,4	31,3
		α_y	44,1	40,5	37,8	35,5	33,8	32,3	31,0	29,9	29,0	28,2	27,6	27,0	26,5	26,1	25,7	25,3	25,1	24,9	24,7	24,6	24,5	23,8
	ly	α_y	55,9	57,5	60,3	64,2	66,2	67,7	69,0	70,5	72,0	73,4	75,2	76,9	78,7	80,5	82,5	84,6	86,6	89,2	91,7	94,3	97,0	100,0
		β_x	16,2	15,3	14,8	14,2	13,9	13,5	13,2	12,9	12,7	12,6	12,5	12,4	12,3	12,2	12,2	12,1	12,1	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0
		β_y	18,3	17,9	17,7	17,6	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5
C3	lx	α_x	65,8	59,9	55,2	51,3	48,3	45,7	43,5	41,7	40,3	38,8	37,9	36,9	36,1	35,5	34,8	34,4	34,0	33,7	33,3	33,1	32,9	31,3
		α_y	56,8	50,6	46,1	42,4	39,4	37,0	34,8	33,3	31,9	30,6	29,6	28,8	28,1	27,5	26,9	26,4	26,0	25,7	25,4	25,2	25,0	23,8
	ly	α_y	56,8	58,2	60,3	62,6	65,8	69,4	73,6	78,4	83,4	89,4	93,5	96,1	98,1	99,9	101,3	102,4	103,3	104,0	104,6	104,9	105,0	105,0
		β_x	19,4	18,2	17,1	16,3	15,5	14,9	14,5	14,0	13,7	13,4	13,2	13,0	12,8	12,7	12,5	12,4	12,3	12,2	12,1	12,0	12,0	12,0
		β_y	19,4	18,8	18,4	18,1	17,9	17,7	17,6	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5

B2 lx α_x 39,7 35,6 33,1 30,4 28,7 27,1 25,7 24,5 23,5 22,6 21,8 21,2 20,7 20,2 19,7 19,3 18,9 18,6 18,3 18,1 17,8 16,7
α_y 42,7 36,0 35,1 32,2 30,0 28,0 26,5 25,2 24,1 23,1 22,2 21,8 21,0 20,4 19,9 19,5 19,1 18,7 18,4 18,1 17,9 14,3
ly α_y 40,2 41,0 42,0 42,9 44,0 45,6 47,6 49,6 51,0 52,1 53,0 54,1 54,8 55,6 56,3 57,0 57,7 58,3 59,0 59,6 60,2 62,0
β_x 14,3 13,3 12,7 12,0 11,5 11,1 10,7 10,3 10,0 9,8 9,6 9,4 9,2 9,1 8,9 8,8 8,7 8,6 8,5 8,4 8,4 8,0
β_y 14,3 13,8 13,6 13,3 13,1 12,9 12,8 12,7 12,6 12,5 12,4 12,3 12,3 12,2 12,2 12,2 12,2 12,2 12,2 12,2 12,2 12,2
B3 lx α_x 53,2 47,2 42,4 38,5 35,2 32,5 30,4 28,5 27,0 25,6 24,4 23,5 22,6 21,9 21,2 20,7 20,2 19,7 19,3 18,9 18,6 16,7
α_y 58,5 51,6 46,1 41,4 37,5 34,2 31,8 29,6 28,0 26,4 25,2 24,2 23,3 22,5 21,7 21,1 20,5 20,0 19,5 19,1 18,7 14,3
ly α_y 44,1 43,6 43,7 44,2 44,8 45,8 46,9 48,6 50,3 52,3 55,0 58,2 61,8 65,6 70,4 75,0 79,6 84,7 89,8 95,4 101,0 101,0
β_x 18,3 16,6 15,4 14,4 13,5 12,7 12,2 11,6 11,2 10,9 10,6 10,3 10,1 9,9 9,7 9,5 9,4 9,2 9,0 8,9 8,8 8,0
β_y 16,2 15,4 14,8 14,3 13,9 13,5 13,3 13,1 13,0 12,8 12,7 12,6 12,6 12,5 12,5 12,4 12,4 12,3 12,3 12,3 12,3 12,3
C1 lx α_x 43,5 41,5 39,8 38,5 37,5 36,4 35,7 35,1 34,6 34,1 33,7 33,3 33,1 32,8 32,6 32,5 32,4 32,3 32,2 32,1 31,9 31,3
α_y 35,1 33,0 31,7 30,4 29,4 28,5 27,8 27,1 26,6 26,1 25,8 25,4 25,2 24,9 24,7 24,5 24,4 24,3 24,3 24,2 24,1 23,8
ly α_y 61,7 64,5 67,2 69,6 71,5 72,8 73,5 74,1 74,6 75,3 75,8 76,5 77,0 77,0 77,0 77,0 77,0 77,0 77,0 77,0 77,0 77,0
β_x 14,3 13,8 13,5 13,2 13,0 12,7 12,6 12,4 12,3 12,2 12,2 12,1 12,0 12,0 12,0 12,0 12,0 12,0 12,0 12,0 12,0 12,0
β_y -
C2 lx α_x 53,2 49,5 46,7 44,2 42,4 40,8 39,5 38,3 37,3 36,5 35,7 35,1 34,6 34,0 33,6 33,2 33,0 32,8 32,6 32,5 32,4 31,3
α_y 44,1 40,5 37,8 35,5 33,8 32,3 31,0 29,9 29,0 28,2 27,6 27,0 26,5 26,1 25,7 25,3 25,1 24,9 24,7 24,6 24,5 23,8
ly α_y 55,9 57,5 60,3 64,2 66,2 67,7 69,0 70,5 72,0 73,4 75,2 76,9 78,7 80,5 82,5 84,6 86,6 89,2 91,7 94,3 97,0 100,0
β_x 16,2 15,3 14,8 14,2 13,9 13,5 13,2 12,9 12,7 12,6 12,5 12,4 12,3 12,2 12,2 12,1 12,1 12,0 12,0 12,0 12,0 12,0
β_y 18,3 17,9 17,7 17,6 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5
C3 lx α_x 65,8 59,9 55,2 51,3 48,3 45,7 43,5 41,7 40,3 38,8 37,9 36,9 36,1 35,5 34,8 34,4 34,0 33,7 33,3 33,1 32,9 31,3
α_y 56,8 50,6 46,1 42,4 39,4 37,0 34,8 33,3 31,9 30,6 29,6 28,8 28,1 27,5 26,9 26,4 26,0 25,7 25,4 25,2 25,0 23,8
ly α_y 56,8 58,2 60,3 62,6 65,8 69,4 73,6 78,4 83,4 89,4 93,5 96,1 98,1 99,9 101,3 102,4 103,3 104,0 104,6 104,9 105,0 105,0
β_x 19,4 18,2 17,1 16,3 15,5 14,9 14,5 14,0 13,7 13,4 13,2 13,0 12,8 12,7 12,5 12,4 12,3 12,2 12,1 12,0 12,0 12,0
β_y 19,4 18,8 18,4 18,1 17,9 17,7 17,6 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5 17,5