Cálculo Numérico

Gabarito da P1

(Q1) Dada a tabela

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	a	-2	0

a) encontre o polinômio interpolador $p_a = p_f[-1,0,1,2]$;
b) faça a prova real, isto é, verifique se o polinômio que você encontrou realmente interpola os pontos da tabela;
c) para qual valor de a o polinômio é quadrático?

RESOLUÇÃO:

(a) Primeiro fazemos a tabela de diferenças divididas:

-1	**0**			
		a		
0	a		$-(a+1)$	
		$-2-a$		$1+a/2$
1	-2		$2+a/2$	
		2		
2	0			

E dela obtemos o polinômio:

$$p_a(x) = a(x+1) - (a+1)(x+1)x + \left(1+\frac{a}{2}\right)(x^2-1)x.$$

(b) Prova real:

Como $(x+1)$ pode ser fatorado em $p_a(x)$, então $p_a(-1) = 0$. Em $x = 0$ apenas o primeiro termo não se anula e é igual a a. Além disso:

$$p_a(1) = 2a - (a+1)\cdot 2\cdot 1 = -2,$$

$$p_a(2) = 3a - 6(a+1) + 6\left(1+\frac{a}{2}\right) = 0.$$

Portanto a interpolação foi cumprida corretamente.

(c) O polinômio é quadrático se e somente se o último termo se anula, isto é,

$$1+\frac{a}{2} = 0,$$

o que só ocorre para $a = -2$.

(Q2) Dada a tabela

x	-1	1	2
$f(x)$	0	-2	0

a) encontre o polinômio q_d de grau até 3 que interpola os dados da tabela e que tem derivada d em $x = -1$;
b) faça a prova real...;
c) para qual valor de d se tem $q_d(0) = a$?
d) se d tem o valor obtido no item anterior, é possível concluir que $q_d = p_a$, onde p_a é o polinômio da Q1? (É para responder sem fazer contas)

RESOLUÇÃO:

(a) Agora fazemos a tabela de diferenças divididas, desta vez repetindo o ponto -1 e colocando a derivada d na coluna das diferenças divididas de ordem 1:

-1	**0**			
		d		
-1	0		$-(d+1)/2$	
		-1		$1/2 + d/6$
1	-2		1	
		2		
2	0			

O polinômio fica:

$$q_d(x) = d(x+1) - \frac{1+d}{2}(x+1)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{d}{6}\right)(x+1)^2(x-1)$$

(b) Primeiro conferimos os valores de q_d: $q_d(-1) = 0$ porque $(x+1)$ fatora o polinômio; $q_d(1) = 2d - 2(1+d) = -2$; $q_d(2) = 3d - \frac{9}{2}(1+d) + 9\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{6}\right) = \cdots = 0$.
Falta $q'(-1)$. Temos

$$q_d'(x) = d - (1+d)(x+1) + \left(1 + \frac{d}{3}\right)(x^2 - 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{d}{6}\right)(x+1)^2$$

Como há um fator $(x+1)$ em cada termo exceto o primeiro, então $q_d'(-1) = d$.

(c) Primeiro calculamos

$$q_d(0) = d - \frac{1+d}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{d}{6}\right) = -1 + \frac{d}{3}.$$

Para que isso dê igual a a, é necessário e suficiente que $d = 3(a+1)$.

(d) Como p_a é o **único** polinômio cúbico que interpola os pontos da tabela e, com essa escolha de d, q_d é um polinômio cúbico que interpola os mesmos 4 pontos da tabela, então $q_d = p_a$.

(Q3)

a) Sabendo que a primitiva de $\sqrt{x}$ é $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, obtenha o valor exato da integral $\int_1^2 \sqrt{x}dx$;
b) compare com a aproximação que se obtém pelo Método de Simpson com 3 células e 8 casas decimais depois da vírgula para os valores do integrando.

RESOLUÇÃO:

(a) $\int_1^2 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3} \simeq 1.218951416$
(b) Para 3 células, usamos a tabela de valores (com 8 casas decimais depois da vírgula)

x	$f(x) = \sqrt{x}$	coeficiente	coeficiente $\times f(x)$
$x_0 = 1$	1	1	1
$m_1 = 7/6$	1.08012345	4	4.32049380
$x_1 = 8/6$	1.15470054	2	2.30940108
$m_2 = 9/6$	1.22474487	4	4.89897948
$x_2 = 10/6$	1.29099445	2	2.58198890
$m_3 = 11/6$	1.35400640	4	5.41602560
$x_3 = 2$	1.41421356	1	1.41421356

A soma da última coluna dá 21.94110242. Então a aproximação pelo Método de Simpson é igual a

$$\frac{2-1}{6\times 3}\times 21.94110242 = \frac{21.94110242}{18} = 1.218950134$$

Isso dá uma diferença de menos de 0.000002, isto é, o erro foi menor do que 2×10^{-6}.

(Q4) Dada a tabela

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	0

obtenha o spline cúbico $S(x)$ correspondente, com as seguintes condições de contorno (mistas): $S'(-1) = 0$ (grampeado à esquerda) & $S''(1) = 0$ (condição natural à direita).

RESOLUÇÃO:

Para que S seja um spline cúbico, sua restrição ao intervalo $[-1,0]$ será um polinômio cúbico p_1 e sua restrição ao intervalo $[0,1]$ será um polinômio cúbico p_2. Como incógnita, deixaremos as derivadas $S'(0) = d_1$ e $S'(1) = d_2$. A derivada em $x = -1$ não é incógnita, por ser já dada por uma das condições de contorno.

Em uma única tabela, construiremos as duas tabelas de diferenças divididas, para p_1 e p_2, aproveitando que essas tabelas têm pedaços em comum. As posições sombreadas correspondem aos coeficientes que serão utilizados para a montagem dos dois polinômios:

-1	**0**			
		0		
-1	0		1	
		1		$d_1 - 2$
0	1		$d_1 - 1$	
		d_1		
0	1		$-(d_1 + 1)$	
		-1		$d_1 + d_2 + 2$
1	0		$d_2 + 1$	
		d_2		
1	0			

Então

$$p_1(x) = (x+1)^2\{1 + (d_1 - 2)x\}$$

$$p_2(x) = 1 + d_1 x - (d_1 + 1)x^2 + (d_1 + d_2 + 2)x^2(x - 1)$$

Calculamos suas derivadas:

$$p_1'(x) = 2(x+1)\{1 + (d_1 - 2)x\} + (d_1 - 2)(x+1)^2$$

$$p_1''(x) = 2\{1 + (d_1 - 2)x\} + 4(d_1 - 2)(x + 1)$$

$$p_2'(x) = d_1 - 2(3 + 2d_1 + d_2)x + 3(d_1 + d_2 + 2)x^2$$

$$p_2''(x) = -(6 + 4d_1 + 2d_2) + 6(d_1 + d_2 + 2)x$$

A equação de continuidade de S'' em $x = 0$ é $p_1''(0) = p_2''(0)$, que se traduz em $4d_1 - 6 = -6 - 4d_1 - 2d_2$, ou

$$8d_1 + 2d_2 = 0.$$

A condição de contorno natural à direita é $p_2''(1) = 0$, que se traduz em

$$2d_1 + 4d_2 = -6.$$

Resolvendo o sistema, chegamos em $d_1 = \frac{3}{7}$ e $d_2 = -\frac{12}{7}$.

Substituindo nas expressões dos polinômios, chegamos no resultado:

$$p_1(x) = 1 + \frac{3}{7}x - \frac{15}{7}x^2 - \frac{11}{7}x^3$$

$$p_2(x) = 1 + \frac{3}{7}x - \frac{15}{7}x^2 + \frac{5}{7}x^3$$