03 de maio de 2017

4ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Questão 1 – Considere a equação constitutiva para um material isótropo elástico linear, o qual fica bem definido por:

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}[\mathbf{E}] = 2\mu\mathbf{E} + \lambda\,\mathbf{tr}(\mathbf{E})\,\mathbf{I}$$

Pedem-se:

a) Deduzir $\mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1}$ tal que $\mathbf{E} = \mathbf{K}[\mathbf{T}]$.

b) Determinar que condições devem obedecer μ e λ para que a inversão acima seja possível.

Questão 2 – Considerando uma situação de pressão uniforme dada por:

$$\begin{cases} \mathbf{T} = -p\mathbf{I} \\ \mathbf{E} = -\dfrac{1}{3k}\, p\mathbf{I} \end{cases}$$

onde p é a pressão. Como o módulo de compressibilidade k se relaciona com μ e λ?

Questão 3 – Seja um ensaio de tração pura, de modo que:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando as definições usuais de E (módulo de elasticidade) e ν (coeficiente de Poisson), pedem-se:

a) Deduzir E e ν como funções de μ e λ.

b) Mostrar que vale a relação, bastante utilizada, dada por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\mathbf{T} - \nu\,\mathbf{tr}(\mathbf{T})\,\mathbf{I}\right]$$

Escrever a relação acima em componentes.

03 de maio de 2017

Questão 4 – Considere a função de tensão dada por:

$$\phi = Ax^3 y$$

onde A é uma constante. Determine o problema que é resolvido por tal função quando se considera uma região $-a \le x \le a, -b \le y \le b$.

Questão 5 – Mostre que a função

$$\phi = \frac{q}{20c^3}\left[10x^2\left(2y^3 - 3cy^2\right) - 2y^2\left(2y^3 - 5cy^2 + 4c^2y - c^3\right)\right]$$

pode ser usada como uma função de tensão para a região $0 \le x \le L, 0 \le y \le c$. Determine as condições de contorno correspondentes à solução produzida pela função de tensão acima.

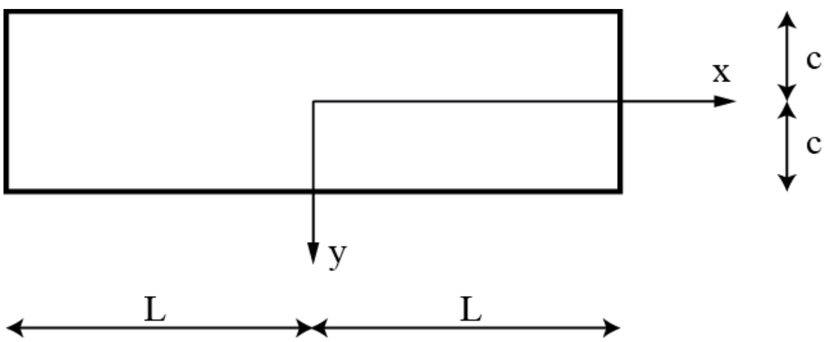
Questão 6 – Considere os seguintes polinômios:

$$\Omega_1 = \frac{a}{2}x^2; \quad \Omega_2 = \frac{b}{2}x^2y; \quad \Omega_3 = \frac{d}{6}\left(x^2y^3 - \frac{1}{5}y^5\right)$$

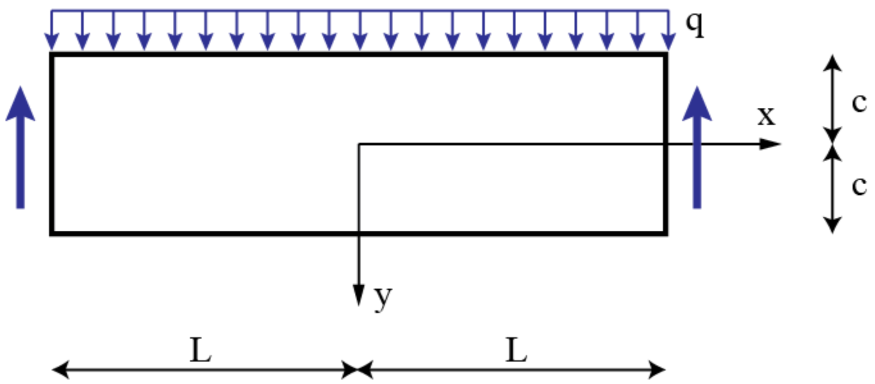
onde a, b e d são constantes. Pedem-se:

a) Justificar se tais polinômios podem ou não ser tomados como funções de tensão de Airy.

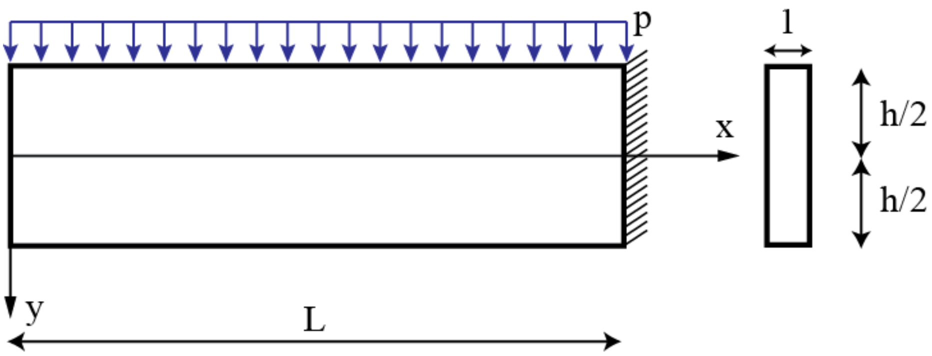
b) Considerando a chapa de espessura unitária mostrada abaixo, mostrar as condições de borda associadas à escolha de Ω_1, Ω_2 e Ω_3 como funções de tensão de Airy.



c) Considerando o problema dado pela figura abaixo, determinar as constantes *a*, *b* e *d* tal que a superposição das soluções geradas pelas funções de tensão Ω_1, Ω_2 e Ω_3 satisfaça as condições de contorno para as bordas $y = c$ e $y = -c$.



Questão 7 – Considere o modelo plano mostrado na figura a seguir:



Com o intuito de se obter uma solução aproximada para o modelo descrito acima, utiliza-se a seguinte função de tensão de Airy:

$$\Omega(x, y) = ax^2 + bx^2 y + cx^2 y^3 + dy^5$$

Onde *a*, *b*, *c* e *d* são constantes. Pedem-se:

a) Determinar se $\Omega(x, y)$ é, de fato, uma função de tensão de Airy. Impor restrições para as constantes, se necessário.

b) Determinar os campos de tensão a partir de $\Omega(x, y)$. Para determinarem-se as constantes, impor as condições de contorno para as bordas $y = \frac{h}{2}$ e $y = -\frac{h}{2}$.

c) Determinar se é possível satisfazerem-se as condições de contorno para a borda dada por $x = 0$. Calcular as resultantes da distribuição de tensão para este borda, comentando os resultados.

Questão 8 – Considere que se deseja utilizar a seguinte função como função de tensão de Airy:

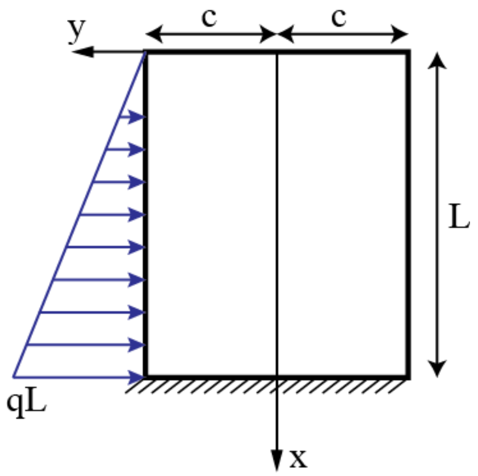
$$\Omega(x,y) = ax^2 + by^3 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Onde *a*, *b* e *L* são constantes e $A_n(y)$ são funções de *y*. Pedem-se:

a) Determinar qual deve ser a equação diferencial que $A_n(y)$ deve satisfazer para que $\Omega(x,y)$ seja uma função de tensão de Airy.

b) Supondo uma região retangular dada por $-L \le x \le L, -c \le y \le c$, obter a forma funcional da tensão $\sigma_{xx}(L,y)$.

Questão 9 – Seja o modelo plano mostrado na figura a seguir.



Este modelo pode ser usado para a modelagem de uma barragem prismática de seção retangular. Supondo-se que se deseja utilizar a formulação do problema em termos de função de tensão de Airy para se obter uma solução próxima da solução do modelo mostrado na figura.

Considere-se a função:

$$\Omega(x,y) = A_1 xy + A_2 x^3 + A_3 x^3 y + A_4 xy^3 + A_5\left(5x^3y^3 - 3xy^5\right)$$

Pedem-se:

a) Justificar se a função acima é ou não uma função de tensão de Airy.

b) Escrever as condições de contorno que devem ser respeitadas nas bordas, considerando o modelo da figura.

c) Considerando o campo de tensões dado por:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{qx^3y}{4c^3} + \dfrac{q}{4c^3}\left(-2xy^3 + \dfrac{6}{5}c^2xy\right) \\ \sigma_{yy} = -\dfrac{qx}{2} + qx\left(\dfrac{y^3}{4c^3} - \dfrac{3y}{4c}\right) \\ \sigma_{xy} = \dfrac{3qx^2}{8c^3}\left(c^2 - y^2\right) - \dfrac{q}{8c^3}\left(c^4 - y^4\right) + \dfrac{3q}{20c}\left(c^2 - y^2\right) \end{cases}$$

Determinar quais devem ser os valores das constantes $A_i, i = 1,\dots,5$ para que o campo de tensões acima possa ser obtido a partir da função $\Omega(x,y)$, tomada como função de tensão de Airy.

d) Discutir quais das condições de contorno enunciadas no item (b) podem ser satisfeitas pelo campo de tensões acima, ponto a ponto e considerando também as resultantes das tensões.

e) Caracterizar o modelo para o qual a solução proposta é exata.