1º semestre de 2017

Gabarito Lista de exercícios 5 – Variáveis Aleatórias Discretas

Exercício 1

Um par de dados não viciados é lançado. Seja X a variável aleatória denotando o menor dos dois números observados.

a) Encontre a tabela da distribuição dessa variável.

b) Construa o gráfico de função de distribuição cumulativa para essa variável.

c) Achar a média, a variância e o desvio padrão de X.

d) Repetir itens anteriores para variável Y=6-X.

Solução

a) Considerando o lançamento de dois dados, o espaço amostral é

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{array} \right\}$$

onde cada evento é igualmente provável.

Seja X a variável aleatória denotando o menor dos dois números observados. A Tabela de distribuição de X é dada por,

Tabela 1: Tabela de distribuição de X.

X	1	2	3	4	5	6
P	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

b) A tabela de distribuição acumulada de X é,

Tabela 2: Tabela de distribuição acumulada de X.

X	1	2	3	4	5	6
P	11/36	20/36	27/36	32/36	35/36	1

A Figura1 representa o gráfico da distribuição cumulativa para a variável X.

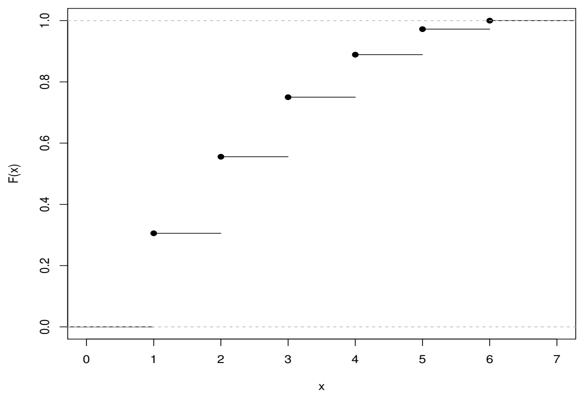

Figura 1: Gráfico da Função de distribuição cumulativa para a variável X

c) A esperança de X é dada por,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \frac{11}{36} + 2\times\frac{9}{36} + 3\times\frac{7}{36} + 4\times\frac{5}{36} + 5\times\frac{3}{36} + 6\times\frac{1}{36} \\ &= \frac{11}{36} + \frac{18}{36} + \frac{21}{36} + \frac{20}{36} + \frac{15}{36} + \frac{6}{36} = \frac{91}{36} = 2,527778. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= \frac{11}{36} + 4\times\frac{9}{36} + 9\times\frac{7}{36} + 16\times\frac{5}{36} + 25\times\frac{3}{36} + 36\times\frac{1}{36} \\ &= \frac{11}{36} + \frac{36}{36} + \frac{63}{36} + \frac{80}{36} + \frac{75}{36} + \frac{36}{36} = \frac{301}{36} \end{aligned}$$

A variância é dada por,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \frac{301}{36} - \frac{8281}{1296} = \frac{10836}{1296} - \frac{8281}{1296} = \frac{2555}{1296} = 1,971451$$

O desvio padrão é dado por,

$$\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{1,971451} = 1,404084.$$

d) Seja Y=6-X. A Tabela de distribuição de Y é dada por,

Tabela 3: Tabela de distribuição de Y.

X	5	4	3	2	1	0
P	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

A tabela de distribuição acumulada de Y é,

A Figura2 representa o gráfico da distribuição cumulativa para a variável Y.

Tabela 4: Tabela de distribuição acumulada de Y.

X	0	1	2	3	4	5
P	1/36	4/36	9/36	16/36	25/36	1

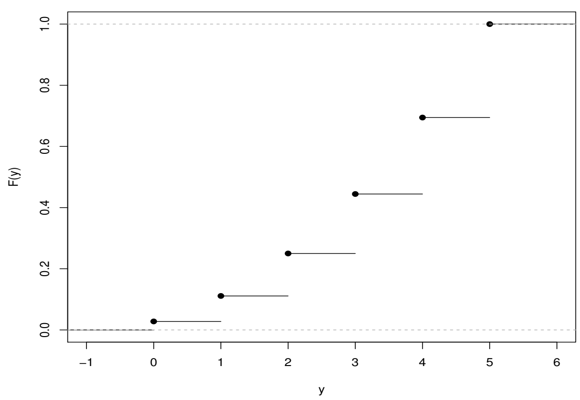

Figura 2: Gráfico da Função de distribuição cumulativa para a variável Y

A esperança de Y é dada por,

$$E(Y) = E(6-X) = 6 - E(X) = 6 - \frac{91}{36} = \frac{216}{36} - \frac{91}{36} = \frac{125}{36} = 3,472222$$

E a variância de Y é,

$$Var(Y) = Var(6-X) = Var(X) = \frac{2555}{1296} = 1,971451$$

E o Desvio padrão de Y é,

$$DP(Y) = \sqrt{1,971451} = 1,404084.$$

Exercício 2

Um jogador lança três moedas não viciadas. Ganha R$8,00 se 3 caras ocorrerem, R$3,00 se 2 caras ocorrerem e R$1,00 se somente 1 cara ocorrer. Perde R$ 10,00 se não ocorrerem caras. Calcule o ganho esperado do jogador.

Solução

Considerando o lançamento de três moedas não viciadas o espaço amostral é dado por,

Ω={(KKK),(KKC),(KCK),(KCC),(CKK),(CKC),(CCK),(CCC)}

em que, K representa cara, C coroa e cada evento é igualmente provável.

Tabela 5: Tabela de distribuição da variável X

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Seja X a variável aleatória denotando o número de caras no lançamento das três moedas, X~Binomial(3;0,5). A Tabela de distribuição da variável X é dada por,

Seja Y a variável aleatória denotando o quanto ganha (ou perde) o jogador considerando o número de caras no lançamento de três moedas. A Tabela de distribuição de Y é dada por,

Tabela 6: Tabela de distribuição da variável Y

Y	-10	1	3	8
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Temos que,

$$E(Y) = -10 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{3}{8} + 8 \times \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Portanto, o ganho esperado do jogador é 1.

Exercício 3

As cinco primeiras repetições de um experimento custam R$10,00 cada uma e todas as repetições subsequentes custam R$5,00 cada. O experimento é repetido até que o primeiro sucesso ocorra, sendo as repetições independentes. Supondo que a probabilidade de sucesso em qualquer repetição seja $0,6$, calcule o custo esperado da operação.

Solução

Seja X a variável aleatória que denota o número de repetições até que ocorra o primeiro sucesso, X~G(0,6). De modo que

$$P(\mathrm{X}=k) = 0,6 \times (0,4)^{k-1}, k = 1, 2, \cdots$$

Definimos como Y a variável que denota o custo do experimento. Isto é,

$$Y = \begin{cases} 10X, \text{ se } X = 1,2,3,4,5 \\ 50 + 5(X-5), \text{ se } X = 6,7,8,\cdots \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E(Y)} &= 10 \times 0,6 \times (0,4)^0 + 20 \times 0,6 \times (0,4) + 30 \times 0,6 \times (0,4)^2 \\
&\quad +40 \times 0,6 \times (0,4)^3 + 50 \times 0,6 \times (0,4)^4 + \sum_{j=1}^{\infty}(50+5j)0,6 \times (0,4)^{5+j-1} \\
&= 15,984 + \sum_{j=1}^{\infty}(50+5j)0,6 \times (0,4)^{j+4} = 15,984 + \sum_{j=1}^{\infty}(50+5j)0,6(0,4)^j(0,4)^4 \\
&= 15,984 + 0,6(0,4)^4 \sum_{j=1}^{\infty}(50+5j)(0,4)^j \\
&= 15,984 + 0,6(0,4)^4 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} 50(0,4)^j + \sum_{j=1}^{\infty} 5j(0,4)^j \right\} \\
&= 15,984 + 0,6(0,4)^4 \left\{ 50 \sum_{j=0}^{\infty}(0,4)^j - 50 + 5 \sum_{j=1}^{\infty} j(0,4)^j \right\} \\
&= 15,984 + 0,6(0,4)^4 \left\{ 50 \times \frac{1}{1-0,4} - 50 + 5 \times \frac{0,4}{(0,4-1)^2} \right\} \\
&= 15,984 + 0,5973333 = 16,58133.
\end{aligned}$$

Observação: Para $r < 1$ temos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(r-1)^2}.$$

Exercício 4

O número de petroleiros que chegam a uma refinaria em cada dia ocorre segundo uma distribuição de Poisson, com $\lambda = 2$ (2 petroleiros por um dia). As atuais instalações podem atender, no máximo, a 3 petroleiros por dia. Se mais de 3 aportarem num dia, o excesso é enviado a outro porto.

a) Em um dia, qual a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto?

b) De quanto deverão ser aumentadas as instalações para permitir atender a todos os navios que chegarem pelo menos em 95% dos dias?

c) Qual o número médio de petroleiros que chegam por dia?

Solução

Seja X a variável aleatória que denota o número de petroleiros que chegam a uma refinaria em cada dia, $X \sim P(2)$.

a) A probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto é dada por,

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) \\ &= 1 - \frac{e^{-2}2^0}{0!} - \frac{e^{-2}2^1}{1!} - \frac{e^{-2}2^2}{2!} - \frac{e^{-2}2^3}{3!} \\ &= 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + 2 + \frac{8}{6}\right) \\ &= 1 - e^{-2}\frac{38}{6} = 1 - 0,8571235 = 0,1428765 \end{aligned}$$

b) Queremos determinar k de tal forma que,

$$P(X \leq k) \geq 0,95$$

Ou seja,

$$\sum_{i=0}^{k} P(X = i) \geq 0,95$$

Tabela 7: Função de distribuição acumulada da Variável X

$P(X \leq 0)$	$P(X \leq 1)$	$P(X \leq 2)$	$P(X \leq 3)$	$P(X \leq 4)$	$P(X \leq 5)$
e^{-2}	$e^{-2}(1+2)$	$e^{-2}(1+2+2)$	0,8571235	0,947347	0,9834364

Portanto, é necessário que ocorra o aumento de duas instalações para permitir atender a todos os navios que chegarem pelo menos em 95% dos dias.

c) $E(X)=\lambda=2$

Exercício 5

Acredita-se que 20% dos moradores das proximidades de uma grande indústria siderúrgica têm alergia aos poluentes lançados ao ar. Admitindo que este percentual de alérgicos é real (correto), calcule as seguintes probabilidades:

(a) a probabilidade de que pelo menos 4 moradores tenham alergia dentre 13 selecionados ao acaso.

(b) a probabilidade de que pelo menos 8 moradores tenham alergia dentre 26 selecionados ao acaso.

(c) a probabilidade de que o número de moradores que tenham alergia esteja entre 4 e 8 (inclusive) dentre os 13 selecionados ao acaso.

Solução

A variável aleatória X corresponde ao número de moradores das proximidades de uma grande indústria siderúrgica que têm alergia aos poluentes lançados no ar, X ~Binomial(n,p), p=0,2.

a) Para o caso em que n=13 queremos determinar a probabilidade de pelo menos 4 moradores tenham alergia.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) \\
&= 1 - C_0^{13} 0,2^0 (1-0,2)^{13-0} - C_1^{13} 0,2^1 (1-0,2)^{13-1} - C_2^{13} 0,2^2 (1-0,2)^{13-2} \\
&\quad - C_3^{13} 0,2^3 (1-0,2)^{13-3} \\
&= 1 - (1-0,2)^{13} - 13 \times 0,2^1 (1-0,2)^{13-1} - 78 \times 0.2^2 (1-0,2)^{13-2} \\
&\quad - 286 \times 0,2^3 (1-0,2)^{13-3} \\
&= 1 - 0,7473243 = 0,2526757
\end{aligned}$$

b) Utilizando o pacote Rcmdr, do *software* estatístico R, considerando n=26, obtemos as seguintes probabilidades para valores de X:

```
k   P(X=k)
0  3.022315e-03
1  1.964504e-02
2  6.139076e-02
3  1.227815e-01
4  1.764984e-01
5  1.941483e-01
6  1.698798e-01
7  1.213427e-01
8  7.204722e-02
9  3.602361e-02
10 1.531003e-02
11 5.567285e-03
12 1.739777e-03
13 4.684014e-04
```

```
14 1.087360e-04
15 2.174721e-05
16 3.737801e-06
17 5.496766e-07
18 6.870958e-08
19 7.232587e-09
20 6.328514e-10
21 4.520367e-11
22 2.568390e-12
23 1.116691e-13
24 3.489661e-15
25 6.979322e-17
26 6.710886e-19
```

A probabilidade de que pelo menos 8 moradores tenham alergia dentre 26 selecionados ao acaso é dada por,

$$P(X \geq 8) = 0,1312912$$

c) Utilizando o pacote Rcmdr, do *software* estatístico R, considerando n=13, obtemos as seguintes probabilidades para valores de X:

```
k   P(X=k)
0   5.497558e-02
1   1.786706e-01
2   2.680060e-01
3   2.456721e-01
4   1.535451e-01
5   6.909529e-02
6   2.303176e-02
7   5.757941e-03
8   1.079614e-03
9   1.499464e-04
10 1.499464e-05
11 1.022362e-06
12 4.259840e-08
13 8.192000e-10
```

A probabilidade de que o número de moradores que tenham alergia esteja entre 4 e 8 (inclusive) dentre os 13 selecionados ao acaso é dada por,

$$P(4 \leq X \leq 8) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = 0,2525097$$

Exercício 6

Determinado tipo de parafuso é vendido em caixas com 1.000 peças. É uma característica da fabricação produzir 10% de defeituosos. Normalmente, cada caixa é vendida pelo fabricante por R$ 13,50. Um comprador faz a seguinte proposta: de cada caixa, ele escolhe uma amostra de 20 peças; se a caixa conter 0 defeituoso, ele paga R$20,00; 1 ou 2 defeituosos, ele paga R$10,00; 3 ou mais defeituosos, ele paga R$8,00.

Qual das alternativas é mais vantajosa para o fabricante? Justificar.

Solução

O fabricante tem duas alternativas,

- A ganancia normal sem considerar a proposta do comprador, isto é, que o lucro esperado por o fabricantes é sempre de R$ 13,50.

- Para calcular o lucro esperado da proposta do comprador. Definamos a variável aleatória X como o número de parafusos defeituosos de uma amostra de tamanho 20. Então podemos considerar que X ~Binomial(n,p), em que $n = 20$ e $p = 0.1$. Seja Y a variável que representa o lucro e temos que

$$Y = \begin{cases} R\$\ 20{,}00, & \text{se } X = 0 \\ R\$\ 10{,}00, & \text{se } X = 1 \text{ ou } X = 2 \\ R\$\ 8{,}00, & \text{se } X \geq 3 \end{cases}$$

O valor do lucro esperado é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= R\$20,00P(\mathrm{X}=0) + R\$10,00(P(\mathrm{X}=1) + P(\mathrm{X}=2)) + R\$8,00P(\mathrm{X} \geq 3) \\ &= R\$20,00P(\mathrm{X}=0) + R\$10,00(P(\mathrm{X}=1) + P(\mathrm{X}=2)) + R\$8,00(1 - P(\mathrm{X} < 3)) \\ &= R\$20,00(0,1216) + R\$10,00(0,2702 + 0,2852) + R\$8,00(1 - 0,6769) \\ &= R\$20,00(0,1216) + R\$10,00(0,2702 + 0,2852) + R\$8,00(0,3231) \\ &= R\$10,57 \end{aligned} \tag{1}$$

Portanto, é mais vantajosa para o fabricante não aceita a proposta do comprador.

Calculo das probabilidades desde uma ~ Binomial(20;0,1)

```
 x=c(0,seq(1:20))
pbb=dbinom(x,20,0.1)
C=cbind(x,pbb)
> C
       x          pbb
 [1,]  0 1.215767e-01
 [2,]  1 2.701703e-01
 [3,]  2 2.851798e-01
 [4,]  3 1.901199e-01
 [5,]  4 8.977883e-02
 [6,]  5 3.192136e-02
 [7,]  6 8.867045e-03
 [8,]  7 1.970454e-03
 [9,]  8 3.557765e-04
```

```
[10,]  9 5.270763e-05
[11,] 10 6.442043e-06
[12,] 11 6.507115e-07
[13,] 12 5.422595e-08
[14,] 13 3.707758e-09
[15,] 14 2.059865e-10
[16,] 15 9.154957e-12
[17,] 16 3.178805e-13
[18,] 17 8.310600e-15
[19,] 18 1.539000e-16
[20,] 19 1.800000e-18
[21,] 20 1.000000e-20
```

Exercício 7

Suponha que a média de telefonemas recebidos numa central telefônica seja 30 chamadas por hora. Se o número de chamadas durante um intervalo de tempo qualquer tem distribuição de Poisson:

a) Qual a probabilidade de que não haja chamadas num intervalo de 3 min?

b) Qual a probabilidade de que haja mais de duas chamadas num intervalo de 5 minutos?

Solução

Seja X o número de chamadas durante um intervalo de tempo. Então, $X \sim Poisson(\lambda)$ e o parâmetro λ é a média de chamadas por um periodo de tempo, ou seja, $\lambda = 30$chamadas/hora= $0,5$ chamadas/min.

a) Devemos calcular a $P(\mathrm{X} = 0)$ com λ igual a $1,5$chamadas/3min,

$$P(\mathrm{X} = 0) = \frac{e^{-1,5}1,5^0}{0!} = 0,2232$$

b) $P(\mathrm{X} > 2)$ com λ igual a 2.5chamadas/5min,

$$\begin{aligned} P(\mathrm{X} > 2) = 1 - P(\mathrm{X} \leq 2) &= 1 - (P(\mathrm{X} = 0) + P(\mathrm{X} = 1) + P(\mathrm{X} = 2)) \\ &= 1 - \left(\frac{e^{-2,5}2,5^0}{0!} + \frac{e^{-2,5}2,5^1}{1!} + \frac{e^{-2,5}2,5^2}{2!}\right) \\ &= 1 - 0,5438 = 0,4562 \end{aligned}$$

Exercicio 8

O número de acidentes de trabalho na seção A de uma empresa tem distribuição de Poisson com parâmetro 2 por dia, e na seção B com parâmetro 3 por dia. Qual a probabilidade de num dado dia ocorrerem um total de 3 acidentes nas duas seções? Supor que os acidentes ocorrem de forma independente nas duas seções.

Solução

Vamos apresentar duas possíveis soluções para o problema:

1. **Solução 1**

   Observação: Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes tais que $X_1 \sim Poisson(\lambda_1)$ e $X_2 \sim Poisson(\lambda_2)$ então $X_1 + X_2 \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$.

   A observação acima é válida para n variáveis aleatórias independentes Poisson, ou seja se $X_i \sim Poisson(\lambda_i), \quad i = 1, \ldots, n$ então

   $$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poisson\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

   Agora, para começar com a solução do problmea vamos definir as seguintes Variáveis aleatórias:

   - X: Número de acidentes de trabalho na seção A.
   - Y: Número de acidentes de trabalho na seção B.
   - $Z = X + Y$: Número total de acidentes de trabalho na Seção A e na Seção B.

   Do problema sabemos que $X \sim Poisson(2)$, $Y \sim Poisson(3)$ e que X e Y são independentes. Assim, usando a observação acima tem-se que $Z = X + Y \sim Poisson(2 + 3)$, ou seja $Z \sim Poisson(5)$. Logo,

   $$P(Z = z) = \frac{e^{-5}\, 5^z}{z!}. \tag{2}$$

   Nosso interesse é achar $P(Z = 3)$ e usando (2) temos que:

   $$P(Z = 3) = \frac{e^{-5}\, 5^3}{3!} = 0,1403739 \tag{3}$$

   Portanto a probabilidade de num dado dia ocorrerem um total de 3 acidentes nas duas seções é 0,1403739.

2. **Solução 2**
   Inicialmente, vamos considerar X, Y e Z como no item 1.

   Nosso interesse é Achar $P(Z = 3) = P(X + Y = 3)$. Assim, usando o fato que X e Y são independentes podemos escrever o seguinte:

   $$\begin{aligned} P(X + Y = 3) &= P(X = 0, Y = 3) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 0) \\ &= P(X = 0)\, P(Y = 3) + P(X = 1)\, P(Y = 2) + P(X = 2)\, P(Y = 1) + P(X = 3)\, P(Y = 0) \end{aligned}$$

   e como $X \sim Poisson(2)$ e $Y \sim Poisson(3)$ obtem-se:

   $$\begin{aligned} P(X + Y = 3) &= \frac{e^{-2}\, 2^0}{0!}\frac{e^{-3}\, 3^3}{3!} + \frac{e^{-2}\, 2^1}{1!}\frac{e^{-3}\, 3^2}{2!} + \frac{e^{-2}\, 2^2}{2!}\frac{e^{-3}\, 3^1}{1!} + \frac{e^{-2}\, 2^3}{3!}\frac{e^{-3}\, 3^0}{0!} \\ &= 0,1403739. \end{aligned}$$

Portanto a probabilidade de num dado dia ocorrerem um total de 3 acidentes nas duas seções é 0,1403739.