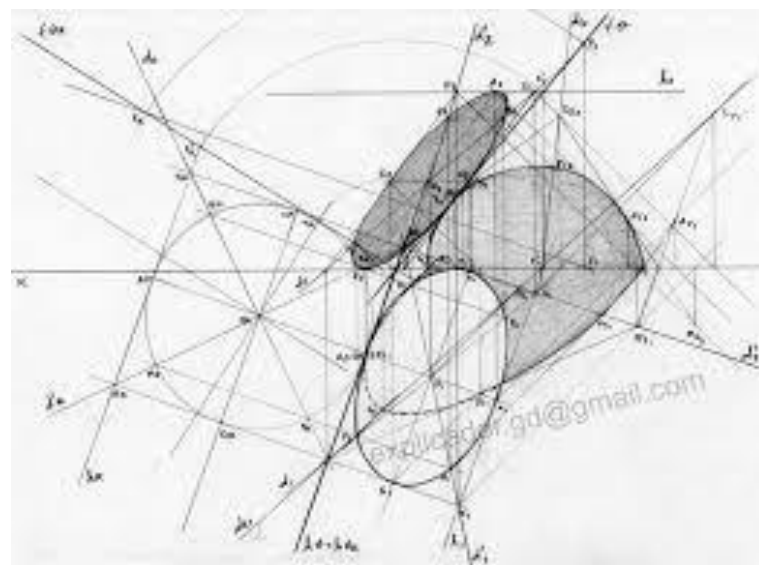
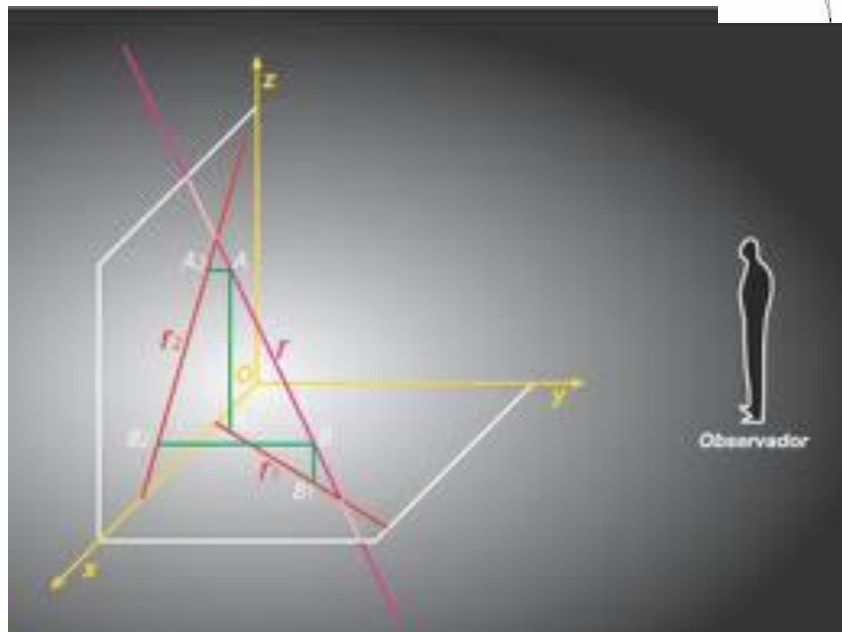
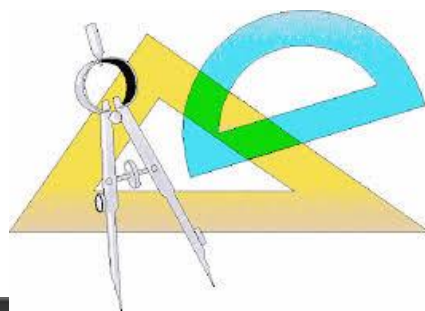
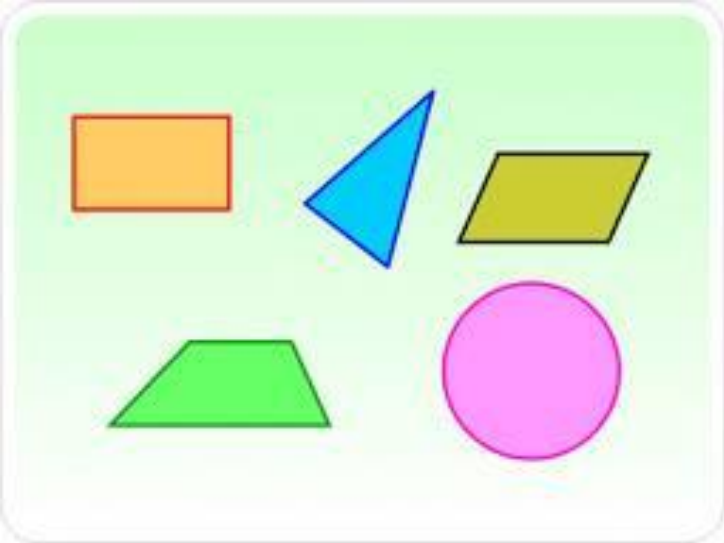


FRACTAIS



Pirâmides de Gizé - Egito



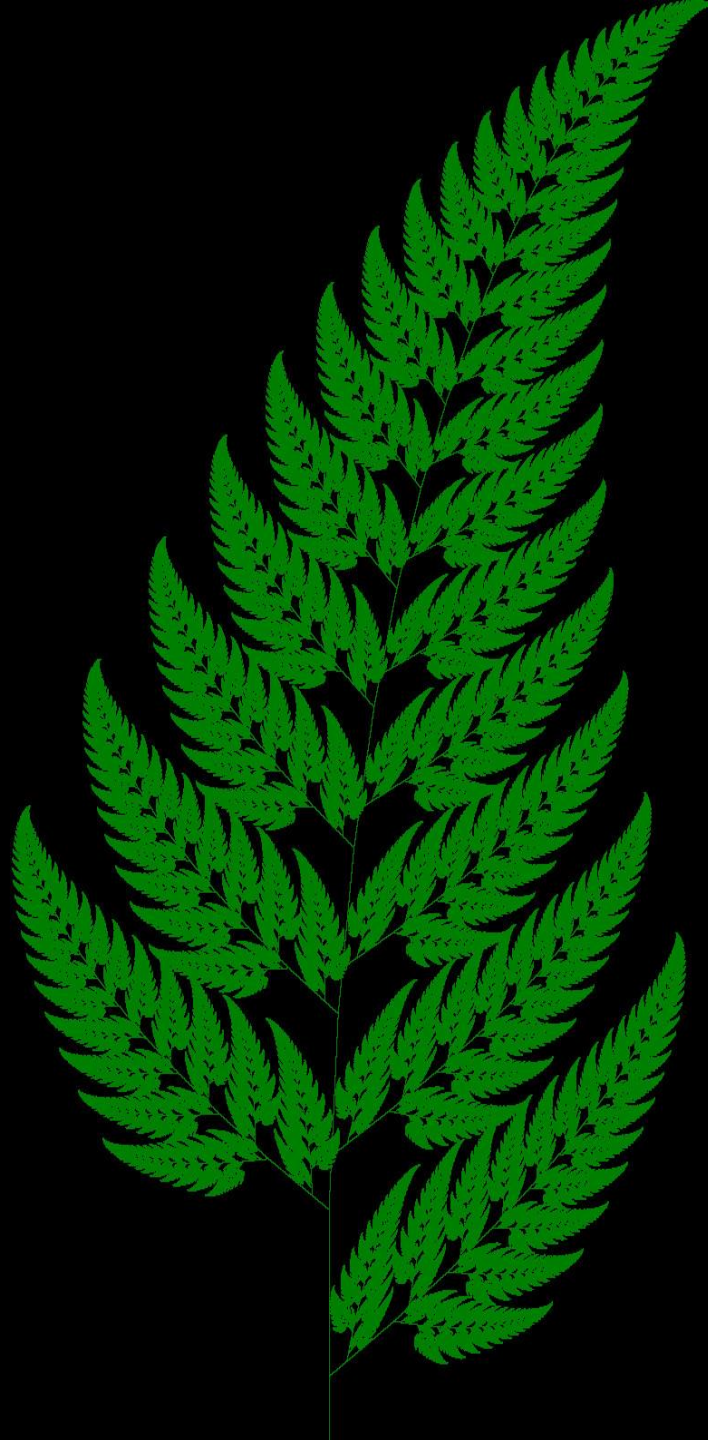
Fonte: <http://commons.wikimedia.org/>



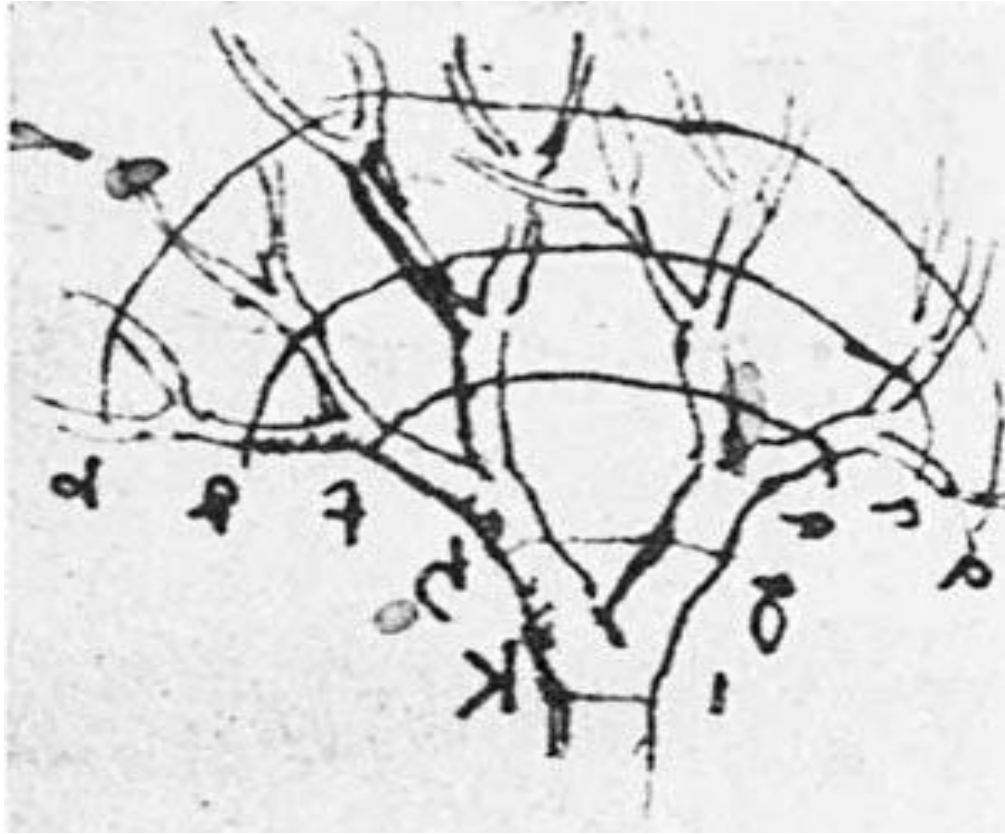


Os fractais naturais e matemáticos podem ser extremamente bonitos, e uma das coisas extraordinárias sobre a aprendizagem dos fractais é descobrir que a ciência, matemática e arte estão intimamente relacionados.

Estudá-los pode levar a uma compreensão mais profunda dos padrões da natureza e as formas em que uma ampla gama de sistemas aparentemente diferentes estão realmente interligados.

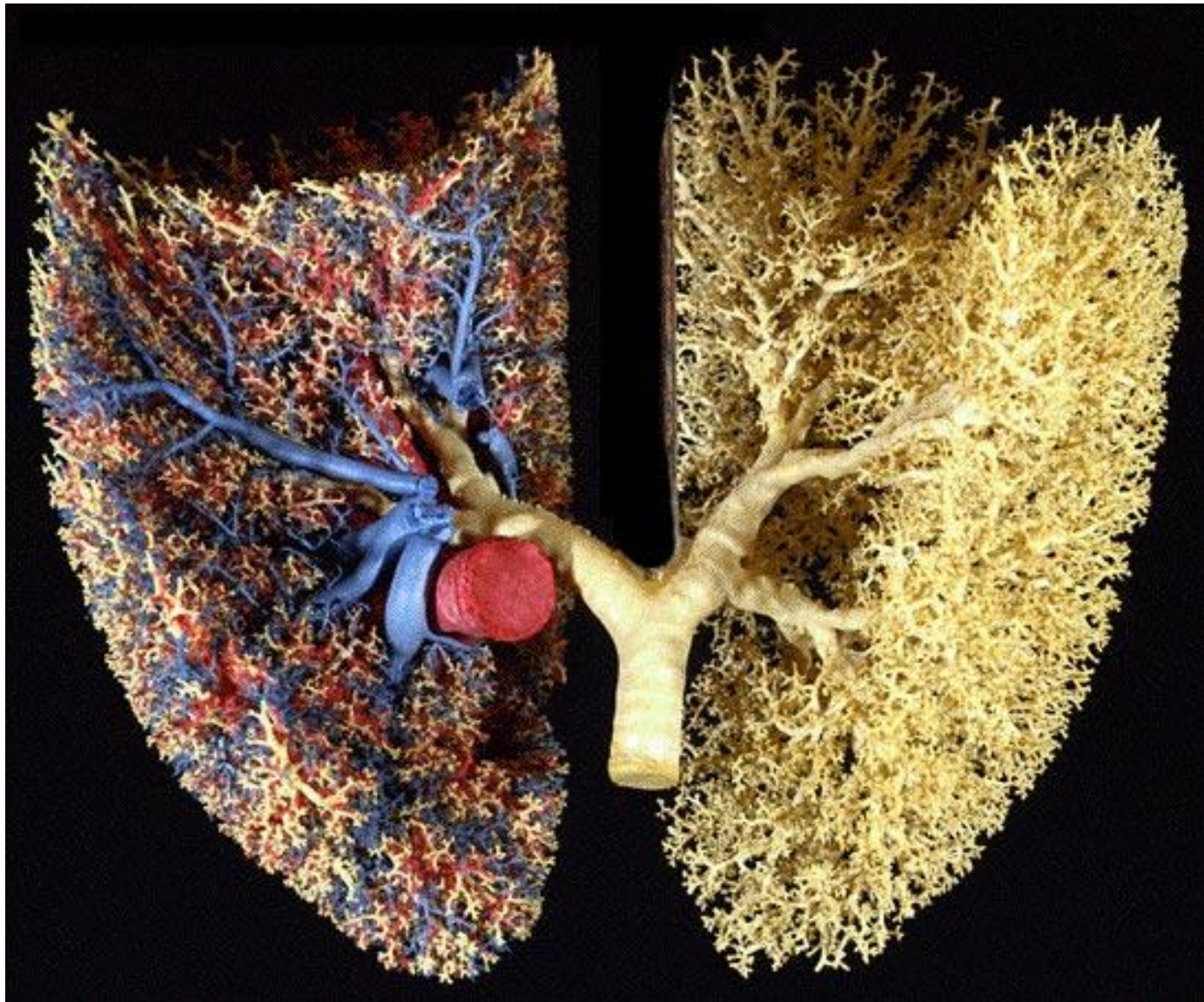






Consulte o esboço de Leonardo de uma árvore acima. Vamos chamar o tronco da árvore do ramo ordem zero. Quando se divide em dois, vamos chamar estes a primeira ramificação e há dois deles. Quando estes dois ramo de novo, ele é chamado a segunda ordem de ramificação e há quatro destes ramos terceira ordem.

Fractais no Corpo

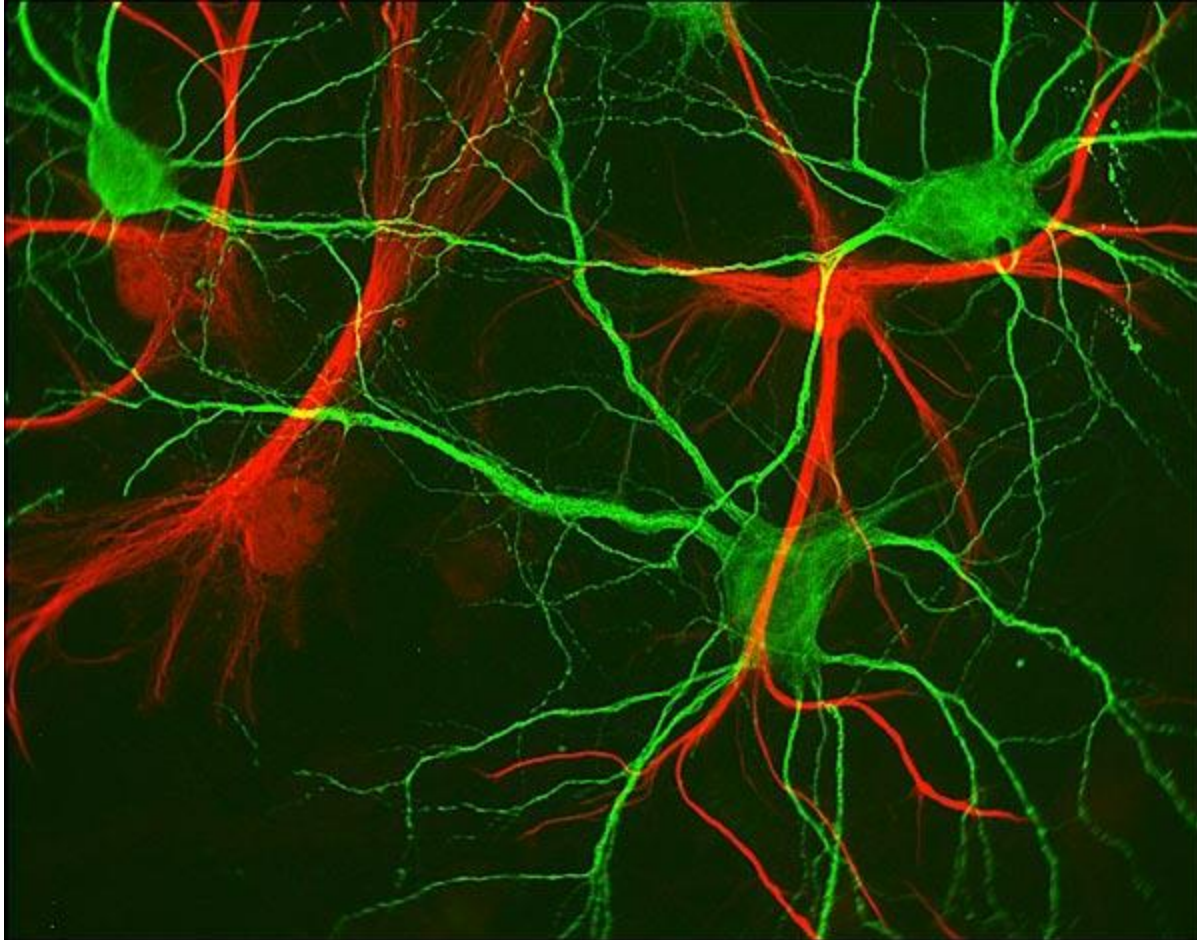


Vasos Sanguíneos



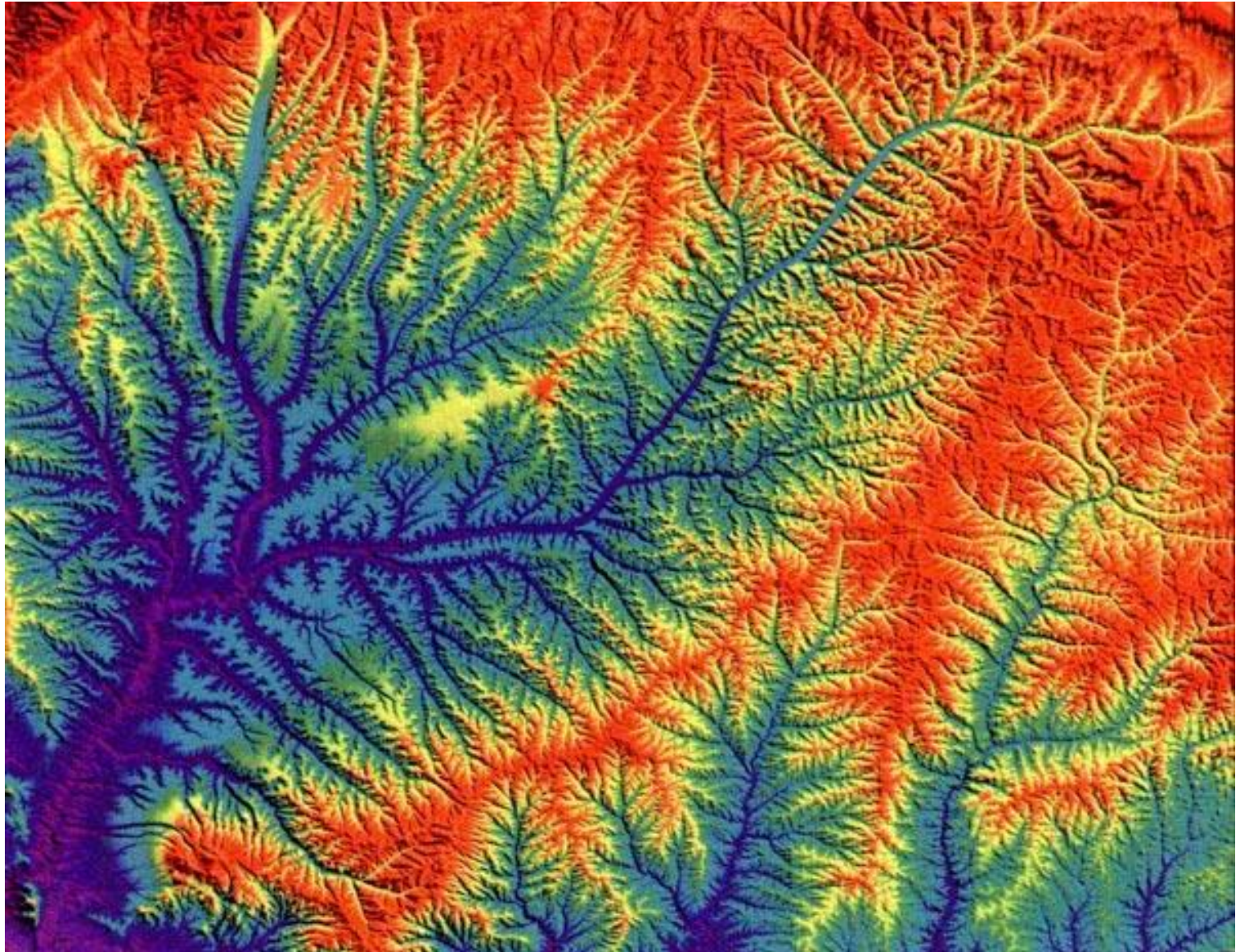
Cada célula do corpo humano deve estar a uma distância aprox. 100 microns.
Existem 150000km de vasos. Capilar com 8 microns de diâmetro. Insetos possuem um sistema respiratório diferente, o que limita seu tamanho

Neurônios

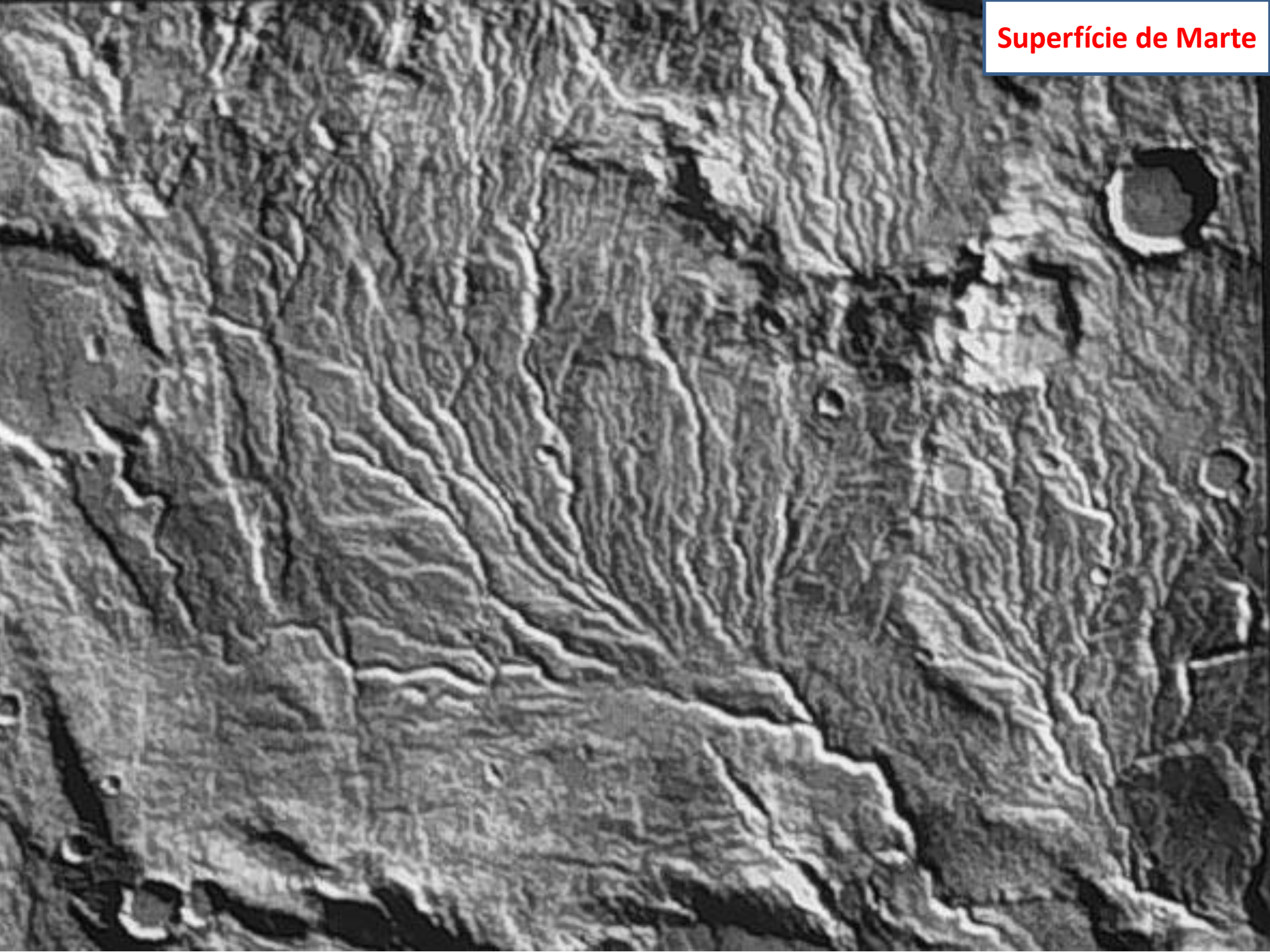


Todo o cérebro humano tem um volume de cerca de 1500 cm^3 . O córtex é uma fina camada enrolada sobre a superfície externa do cérebro. Um estudo anatômico constatou que a área cortical média em seres humanos foi de 320 cm^2 com uma espessura média de $2,2 \text{ mm}$, o que dá um volume cortical de cerca de 70 cm^3 . Outro estudo afirma que pode haver 3000 metros de axônios por mm^3 de tecido cortical

Rios



Superfície de Marte

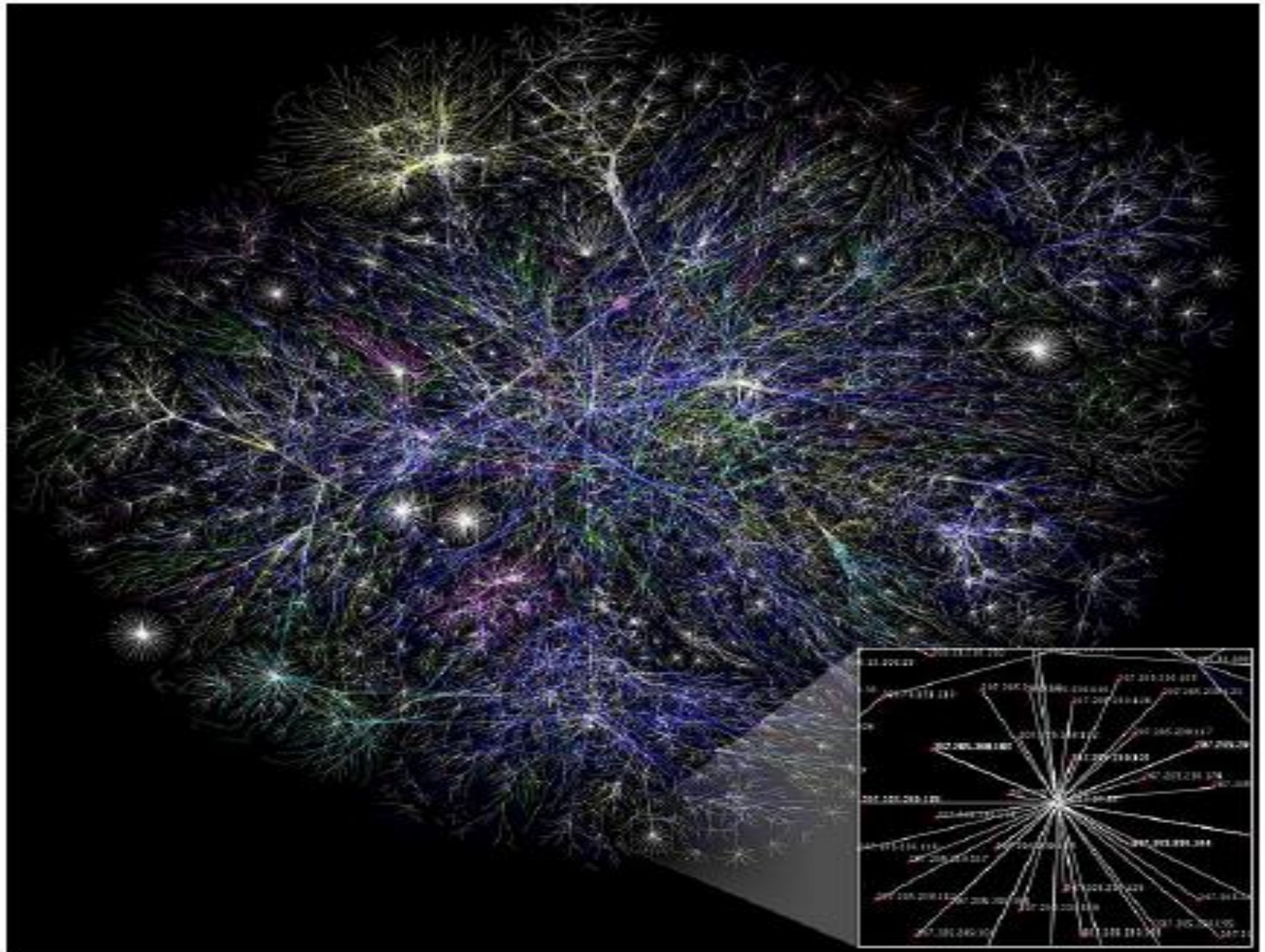


Raios e trovões



Jef Duncan

The World-Wide-Web is Fractal

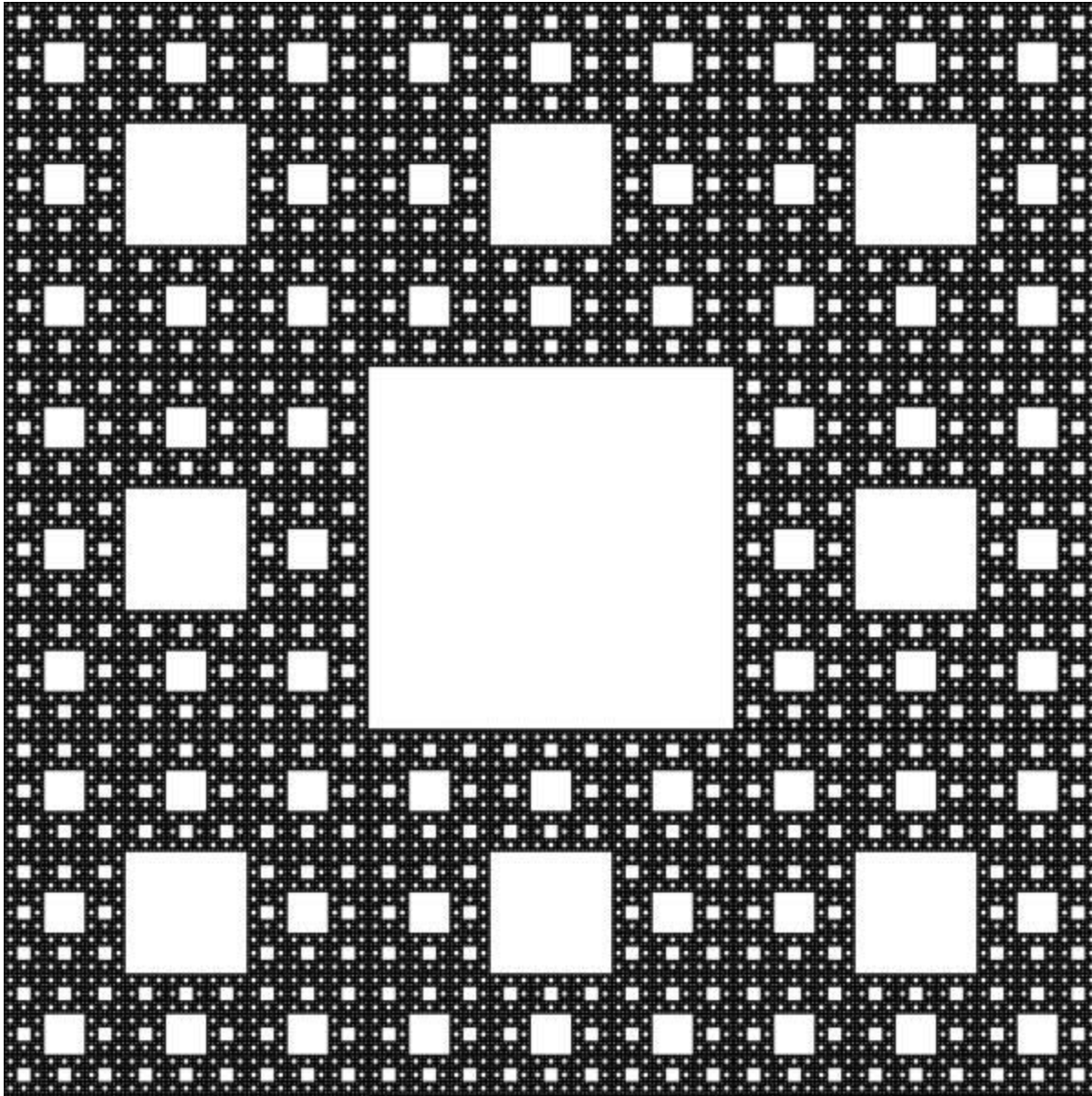


Como os matemáticos geram os fractais?

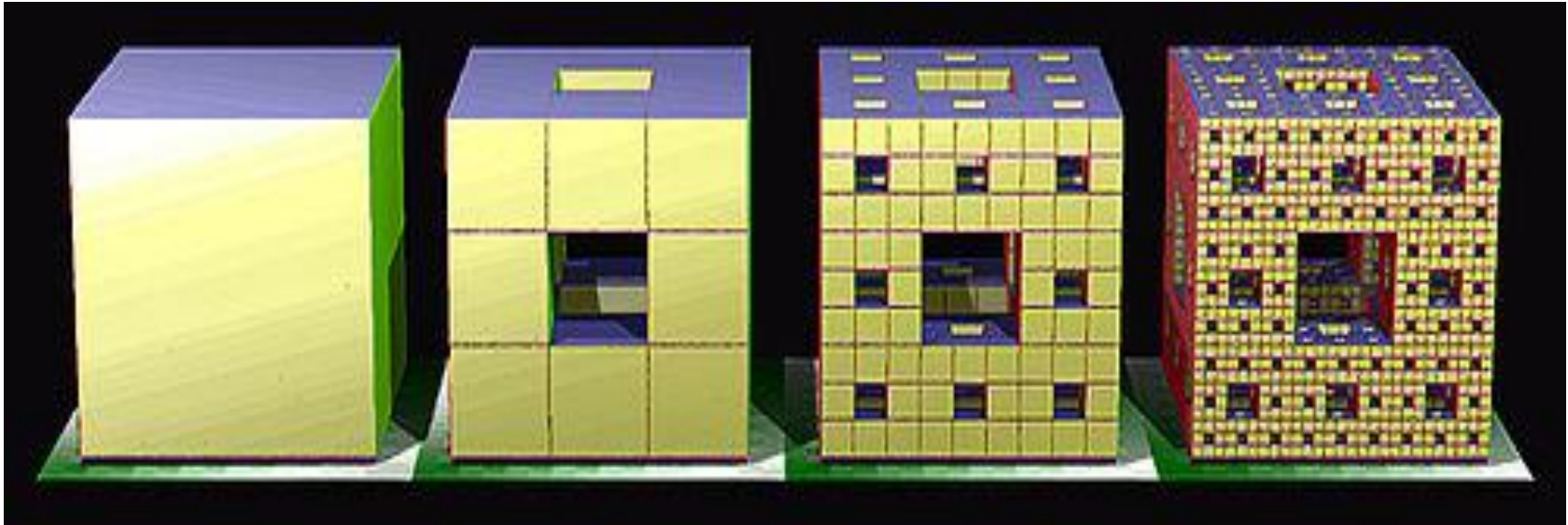
Triângulo de Sierpinski



Tapete de Sierpinski.

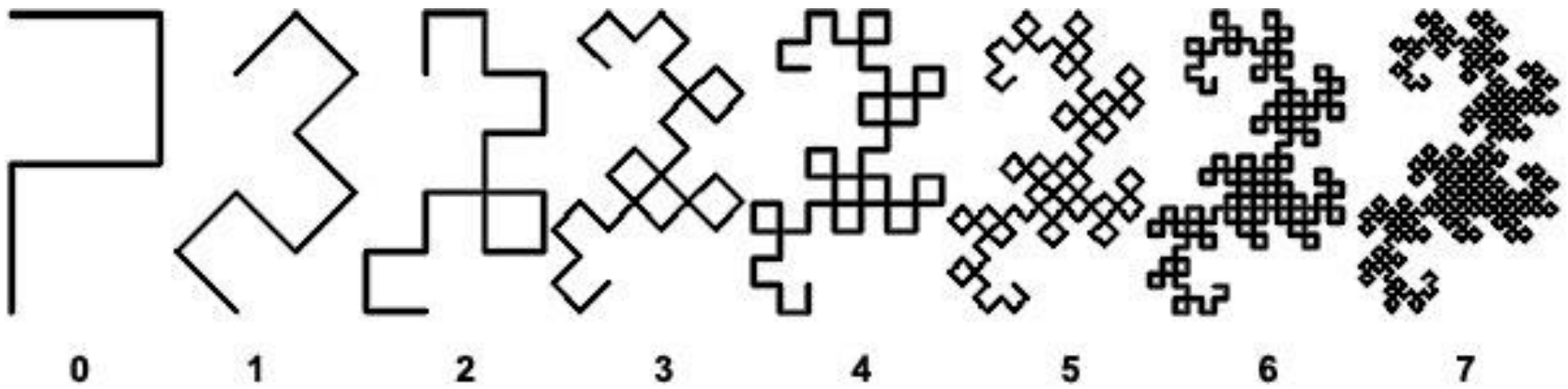


Menger Sponge



A teoria de sistemas de funções iterados

A primeira iteração é formado por substituição de cada metade da curva dragão com uma cópia menor da mesma forma, rodado para se adequar. Este processo continua a repetir, onde cada iteração tem duas vezes mais cópias do gerador inicial.



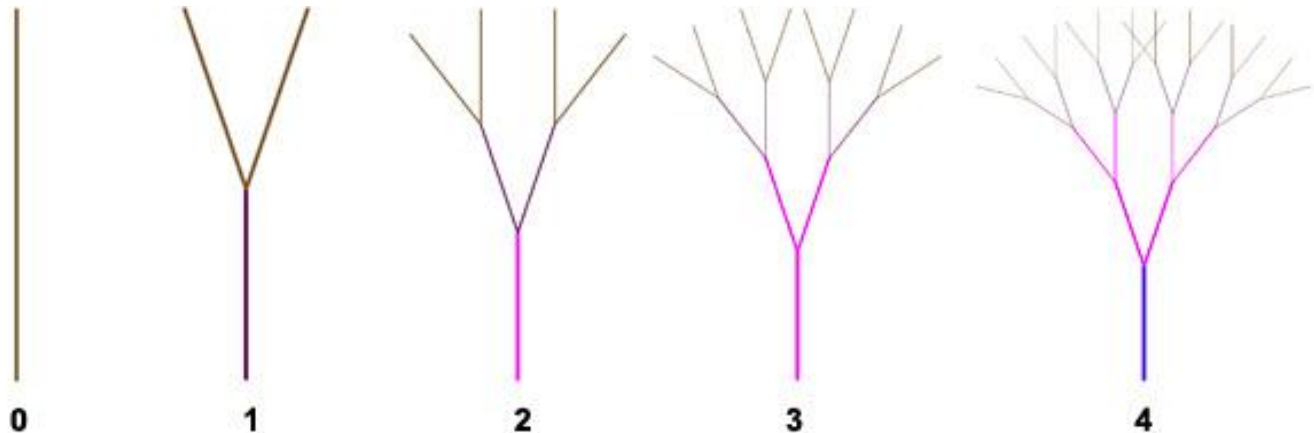
Sistemas Lindenmayer

Na iteração 0th, temos uma linha reta vertical. Chamamos essa condição de iniciar o 'axioma,' e vamos denotar essa linha com o símbolo 'f'.

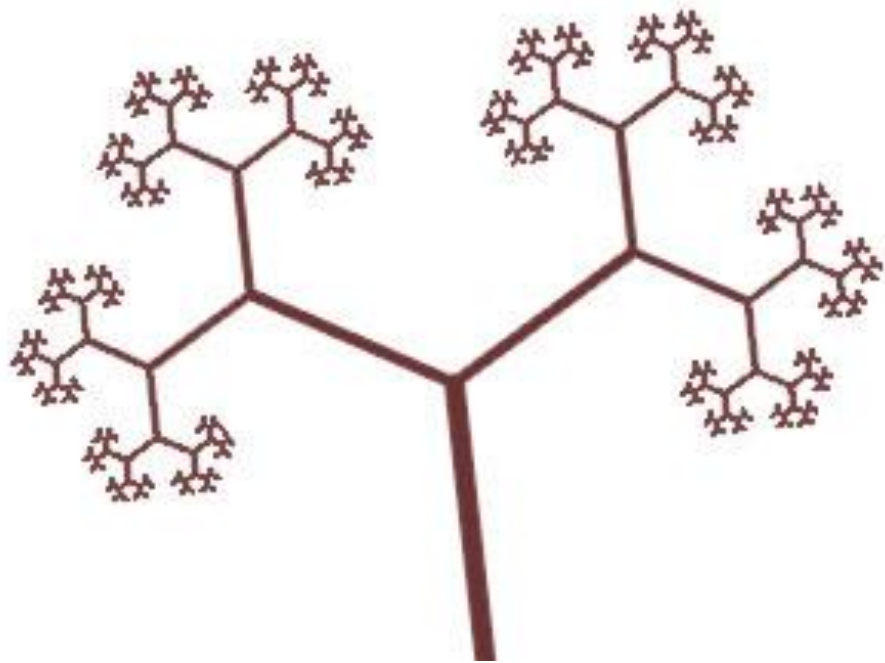
Em seguida, vamos aplicar uma regra para a linha de f, e, neste caso, a regra é se dividir e formar duas novas filiais. Vamos descrever esta regra como:

$$f = f [+ f] [-f]$$

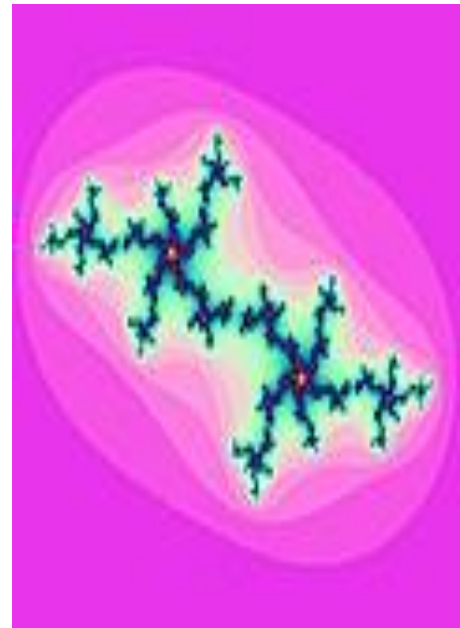
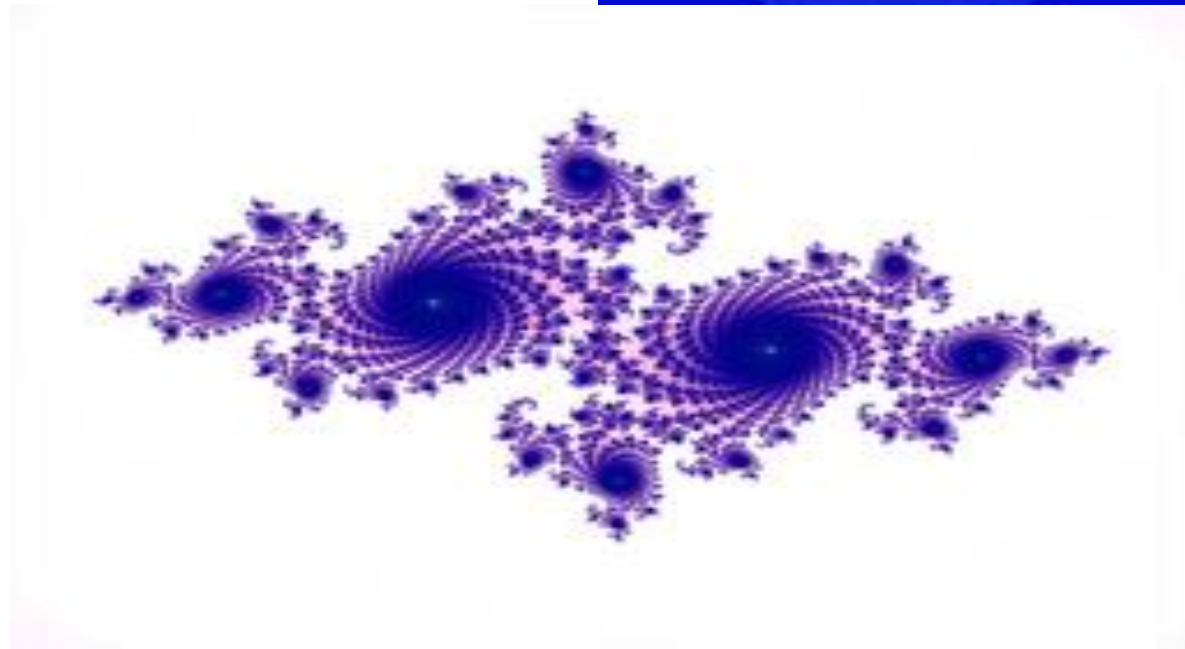
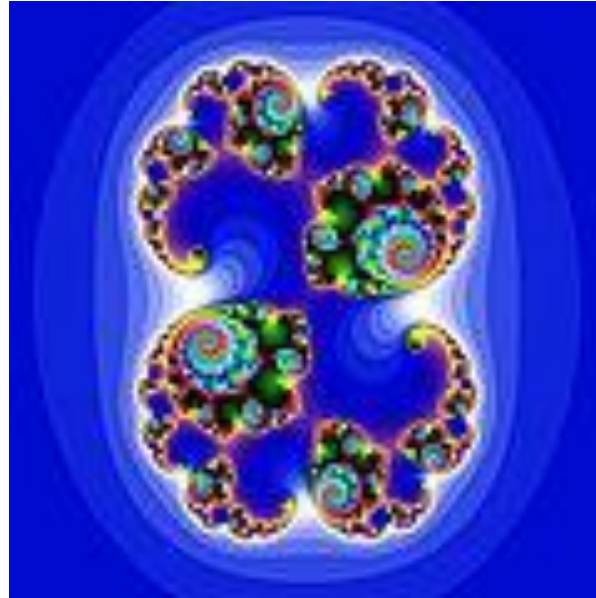
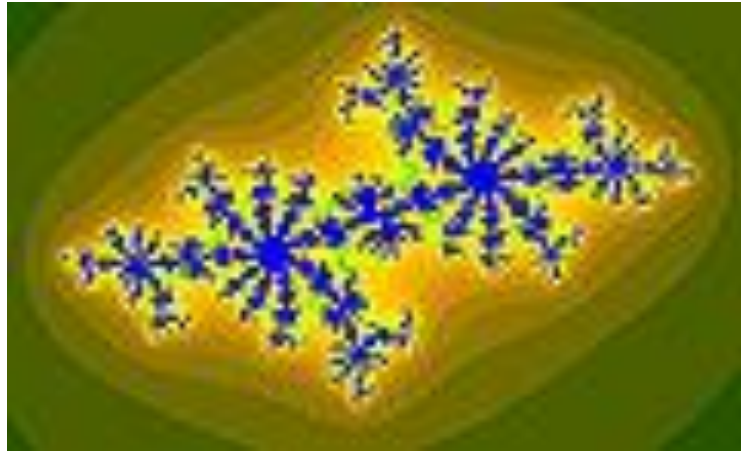
Esta regra significa que a próxima iteração será composto por uma linha de 'f' com um ramo 'f' dobrar para a direita (+) e um ramo 'f' dobrar à esquerda (-).



Sistemas Lindenmayer



O Conjunto de Julia

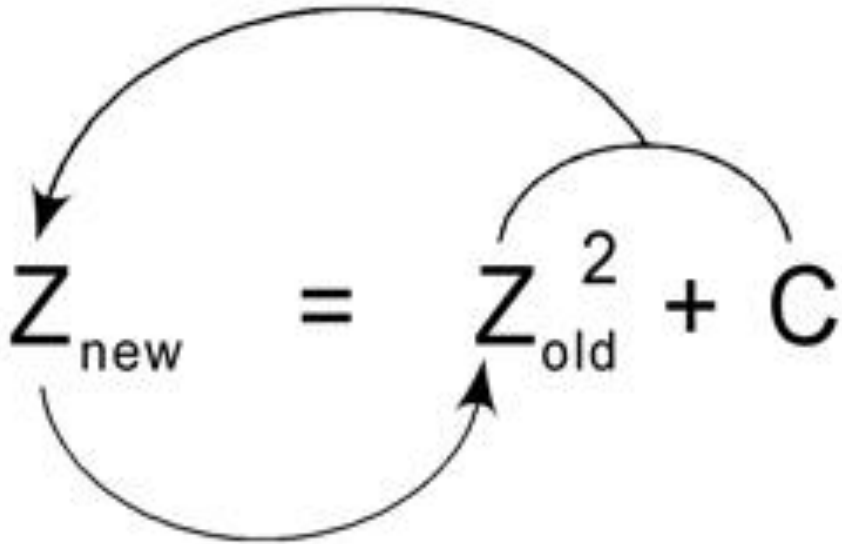


O Conjunto de Mandelbrot



Ultra-deep details from within the Mandelbrot Set. Images range from a depth of 10^{74} magnification to deeper than 10^{245} power. Images courtesy of Jonathan Leavitt, Affiniteaser Emergent.

Como gerar o conjunto de Mandelbroat



$$Z_1 = Z_0^2 + C = 0 + 1 = 1$$

$$Z_2 = Z_1^2 + C = 1 + 1 = 2$$

$$Z_3 = Z_2^2 + C = 4 + 1 = 5$$

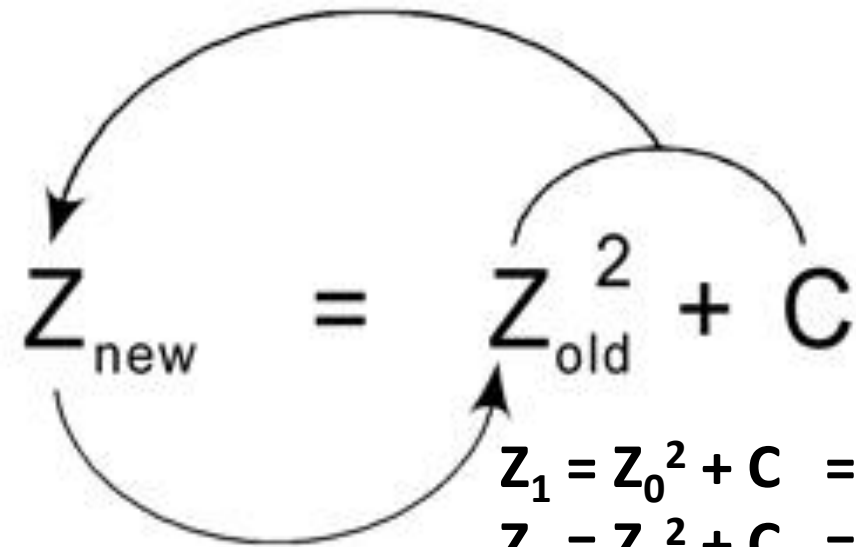
$$Z_4 = Z_3^2 + C = 25 + 1 = 26$$

$$Z_5 = Z_4^2 + C = 676 + 1 = 677$$

etc...

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

Como gerar o conjunto de Mandelbroat



$$Z_1 = Z_0^2 + C = 0 + -0.5 = -0.5$$

$$Z_2 = Z_1^2 + C = 0.25 + -0.5 = -0.25$$

$$Z_3 = Z_2^2 + C = 0.0625 + -0.5 = -0.4375$$

$$Z_4 = Z_3^2 + C = 0.1914 + -0.5 = -0.3086$$

$$Z_5 = Z_4^2 + C = 0.0952 + -0.5 = -0.4048$$

$$Z_5 = Z_4^2 + C = 0.1638 + -0.5 = -0.3362$$

$$Z_5 = Z_4^2 + C = 0.1130 + -0.5 = -0.3870$$

$$Z_5 = Z_4^2 + C = 0.1498 + -0.5 = -0.3502$$

etc...

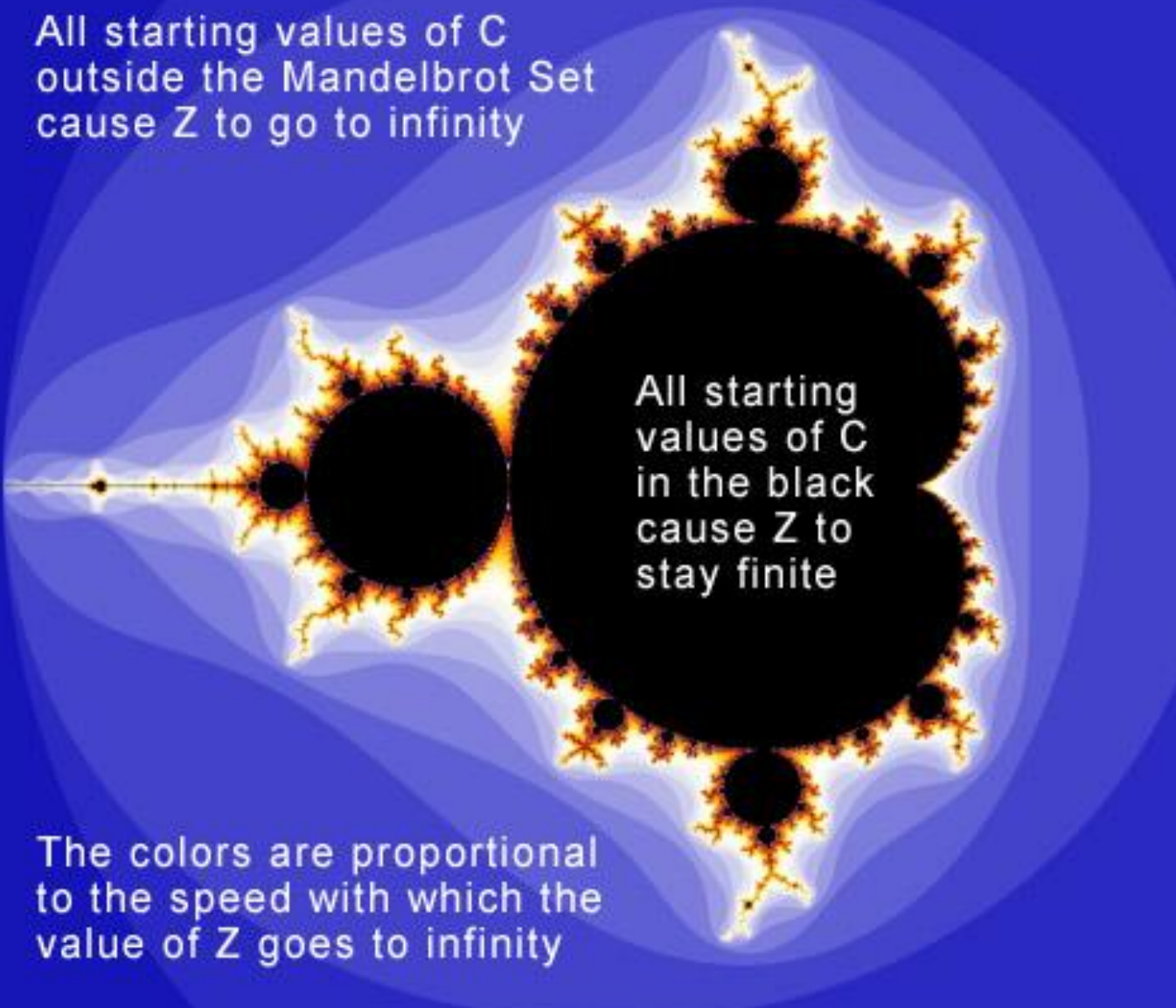
$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

Como gerar o conjunto de Mandelbrot

DEFINIÇÃO: O Conjunto Mandelbrot é o conjunto de todos os valores iniciais C que fica finito quando reiteramos através da equação:

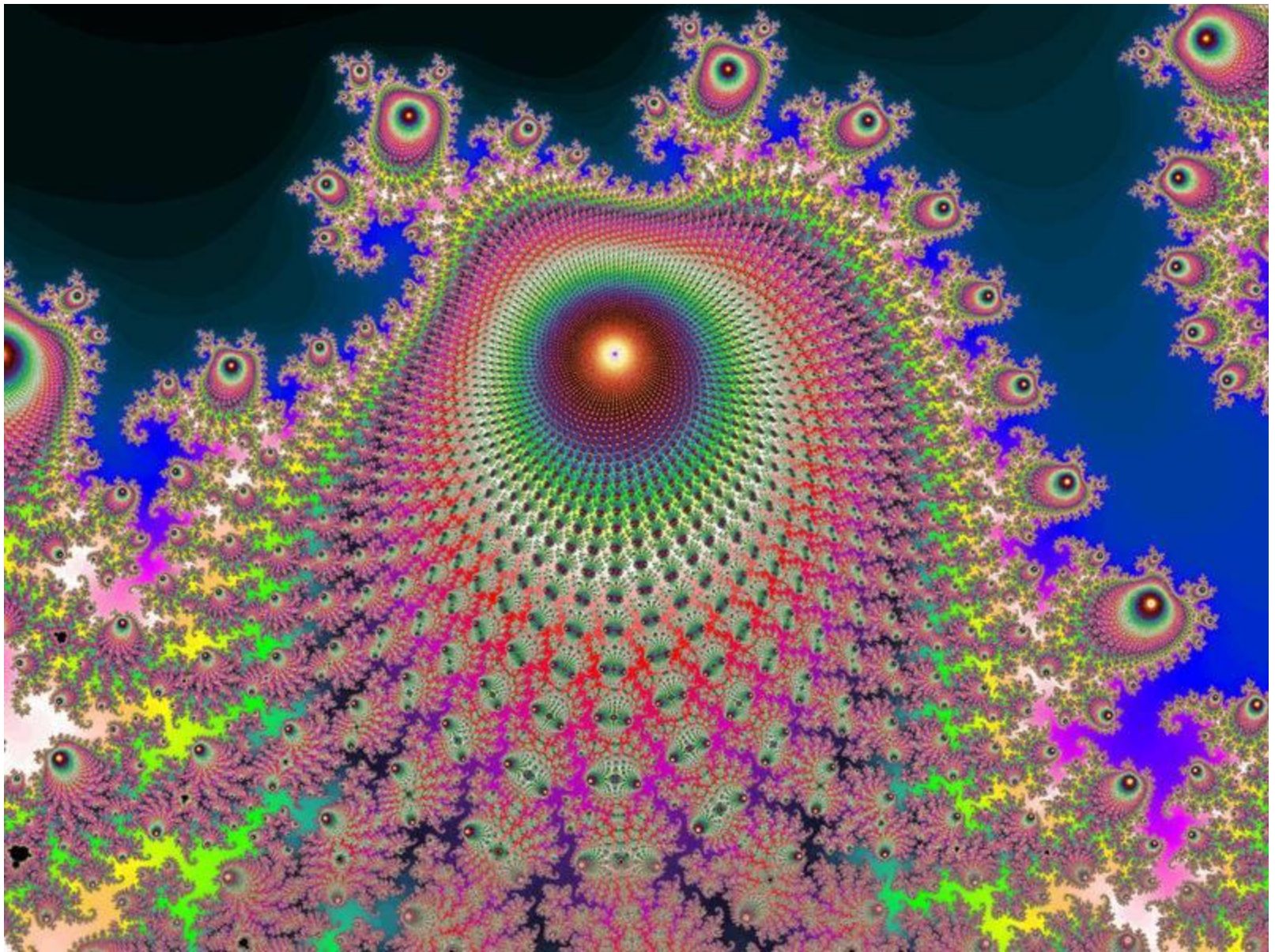
$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

All starting values of C
outside the Mandelbrot Set
cause Z to go to infinity

A fractal image of the Mandelbrot set. The central part is a large black circle. The boundary is highly complex and fractal, with many smaller black circles and intricate patterns. The background is a gradient of blue, with lighter shades near the fractal and darker shades further away. The fractal is centered in the image.

All starting
values of C
in the black
cause Z to
stay finite

The colors are proportional
to the speed with which the
value of Z goes to infinity



Qual fenômeno está escondido nesta geometria?

1- Percebemos que as figuras são formadas pela repetição de certas estruturas.

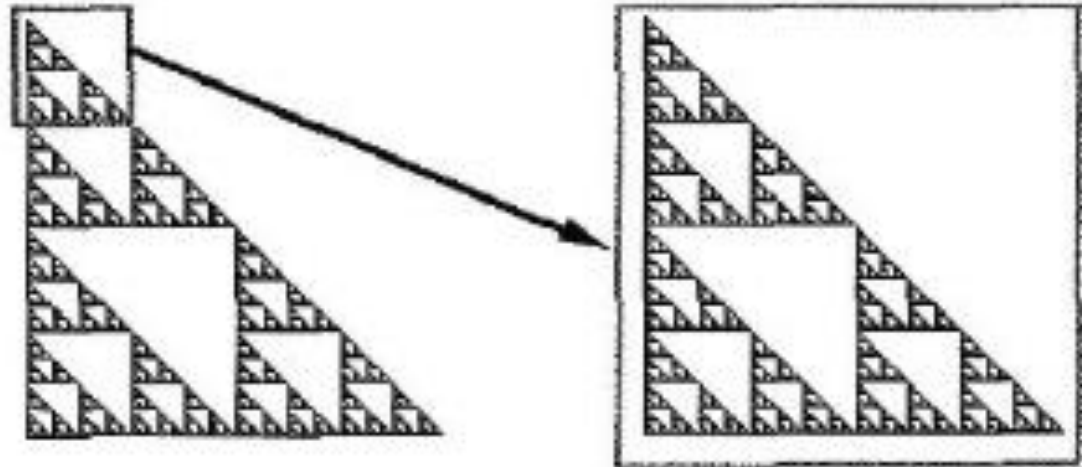
2- Observando mais de perto, existem outras estruturas menores.

3- Aproximando ainda mais, vemos que estas pequenas estruturas possuem outras estruturas ricas e complexas, as vezes com certa semelhança da estrutura macroscópica.

Auto-similaridade

Geometrical

The magnified piece of an object is an exact copy of the whole object.



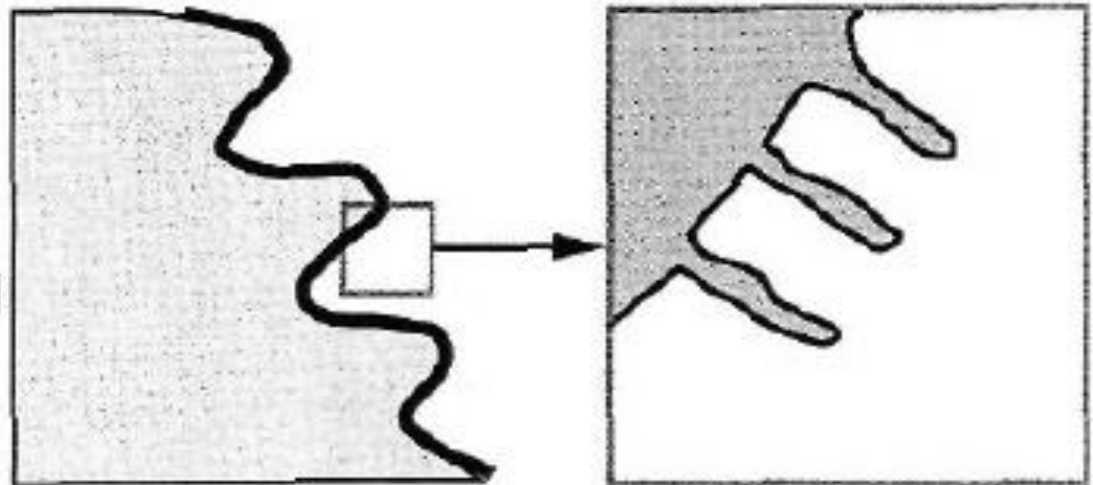
Auto-similaridade

Statistical

The value of statistical property $Q(r)$ measured at resolution r , is proportional to the value $Q(ar)$ measured at resolution ar .

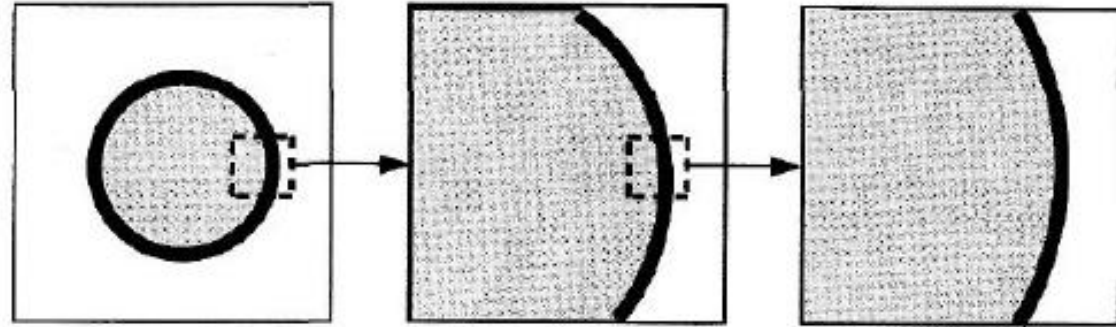
$$Q(ar) = k Q(r)$$

$$\text{pdf}[Q(ar)] \stackrel{d}{=} \text{pdf}[kQ(r)]$$



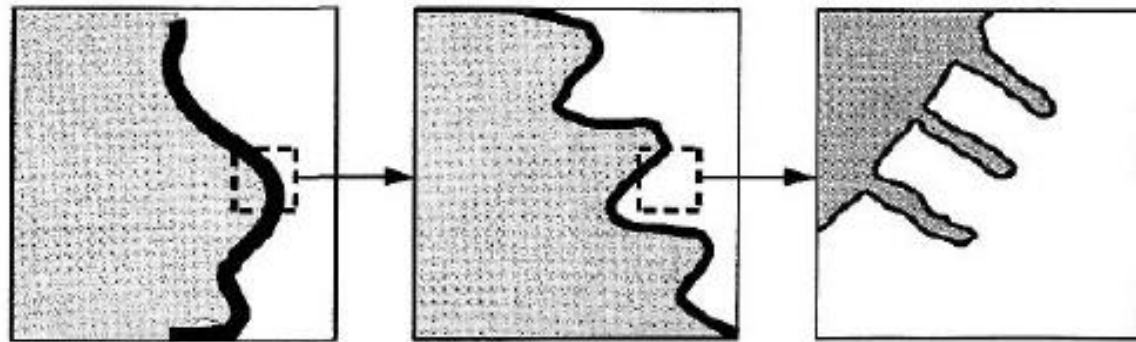
Não – FRACTAIS
o zoom não traz
Novidades ou novas
Característica

Non-Fractal



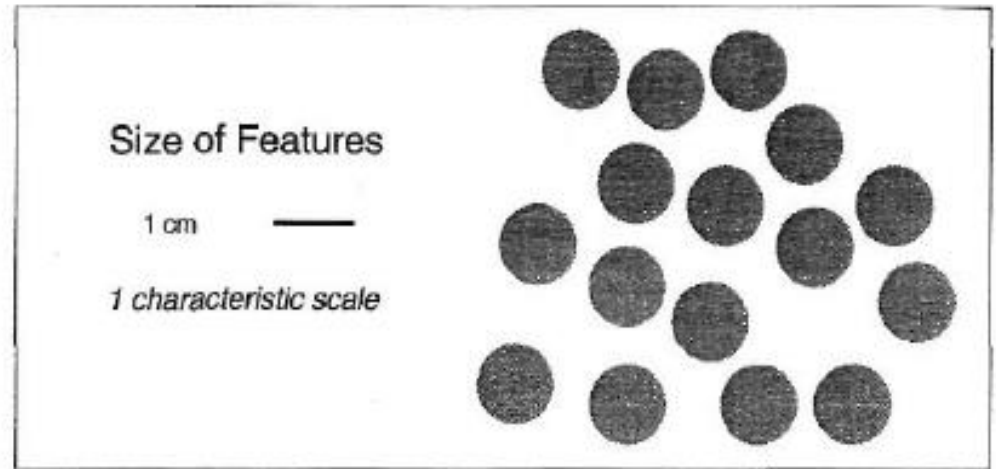
FRACTAIS:
o zoom traz
Novidades ou novas
Característica

Fractal

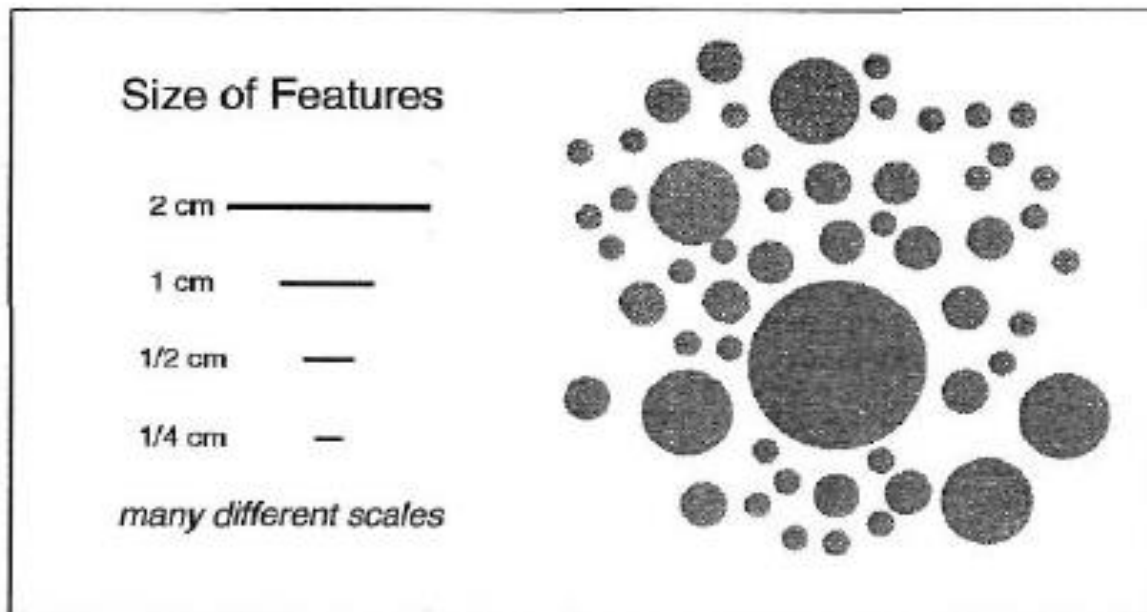


FRACTAIS

Non-Fractal



Fractal



Voltando para a questão da auto-similaridade

Fractais parecem ser estruturas que se manifestam em várias escalas. Seria interessante buscar uma medida que pudesse capturar este Fenômeno.

Se algo, digamos Q , pode ser medido em várias escalas, então, podemos chamar de Scaling (escalamento) a dependência de Q como função da resolução da medida.

Auto-similaridade especifica como pequenos pedaços se relacionam com grandes pedaços. Podemos dizer que a auto-similaridade determina o **scaling**.

A forma matemática da auto-similaridade determina a forma matemática da relação de escalamento (scaling relationship). A forma matemática da auto-similaridade vem do fato de que o valor $Q(ar)$ de uma propriedade medida na resolução ar , é proporcional ao valor $Q(r)$ medido na resolução r . Isto é:

$$Q(ar) = kQ(r)$$

Onde k é uma constante. Da expressão acima, podemos mostrar que a relação de escalamento pode ser escrita como uma das duas possíveis formas:

Self-Similarity \leftrightarrow **Scaling**

$$Q(ar) = k Q(r)$$

$$Q(r) = B r^b$$

$$Q(r) = B r^b f(\text{Log}[r]/\text{Log}[a])$$

Self-Similarity can be satisfied by the power law scaling:

$$Q(r) = B r^b$$

Proof:

Using the scaling relationship to evaluate $Q(r)$ and $Q(ar)$,

$$Q(r) = B r^b$$

$$Q(ar) = B a^b r^b$$

If $k = a^b$ then $Q(ar) = k Q(r)$

Self-Similarity can be satisfied by the more complex scaling:

$$Q(r) = B r^b f\left(\frac{\log r}{\log a}\right) \quad \text{where } f(1+x) = f(x)$$

Proof:

Using the scaling relationship to evaluate $Q(a)$ and $Q(ar)$,

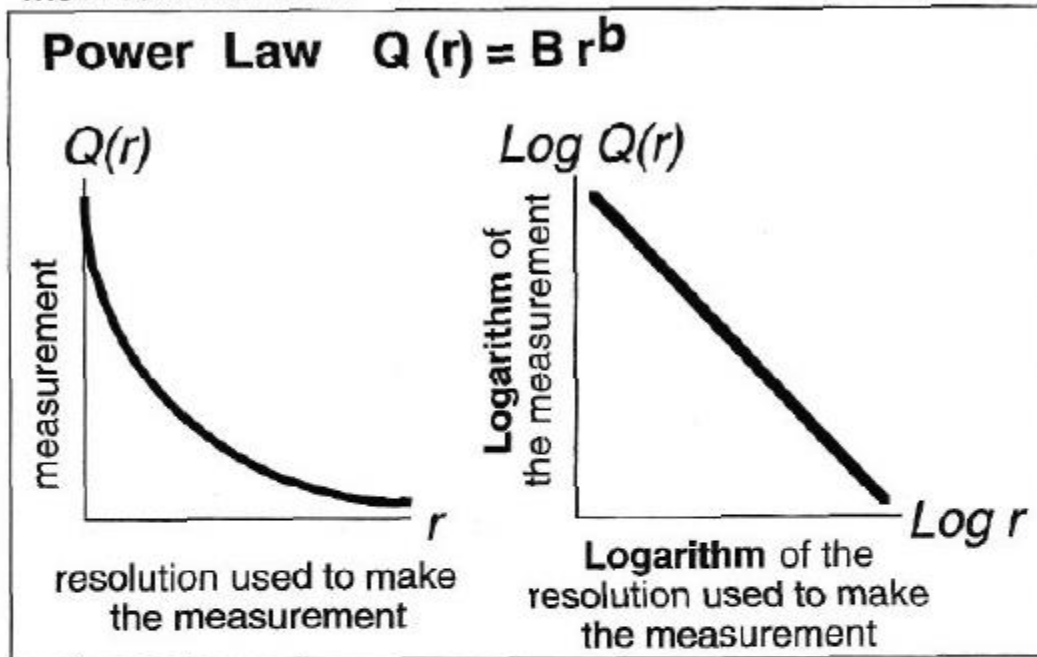
$$Q(r) = B r^b f\left(\frac{\log r}{\log a}\right)$$

$$\begin{aligned} Q(ar) &= B a^b r^b f\left(\frac{\log ar}{\log a}\right) = B a^b r^b f\left(\frac{\log a + \log r}{\log a}\right) \\ &= B a^b r^b f\left(1 + \frac{\log r}{\log a}\right) = B a^b r^b f\left(\frac{\log r}{\log a}\right) \end{aligned}$$

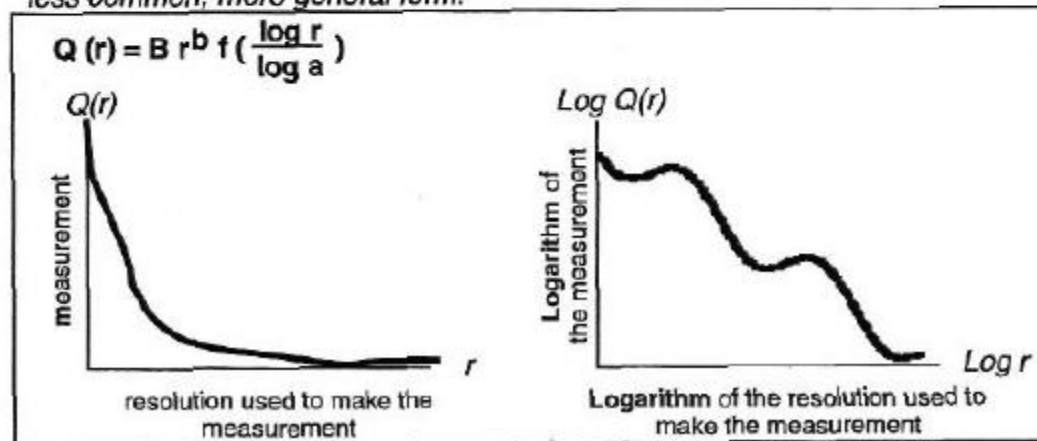
$$\text{If } k = a^b \quad \text{then} \quad Q(ar) = k Q(r)$$

Scaling Relationships

most common form:



less common, more general form:



Medidas da propriedade fractal

• Dimensão fractal

Descreve como o objeto preenche o espaço. Ele fornece a informação do comprimento, área ou volume. Seu valor pode ser inteiro ou fracionário

• Dimensão topológica

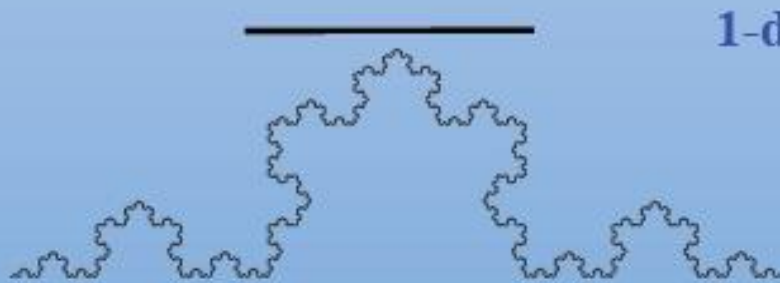
Descreve como os pontos dentro do objeto se conectam entre si. Ele fornece a informação se o objeto é uma linha, superfície ou sólido. Seu valor deve ser inteiro.

• Dimensão de imersão

Descreve o espaço que contém o objeto. Ele fornece a informação do comprimento, área ou volume. Seu valor é inteiro ou fracionário

Dimension:

“Extension in a given direction”

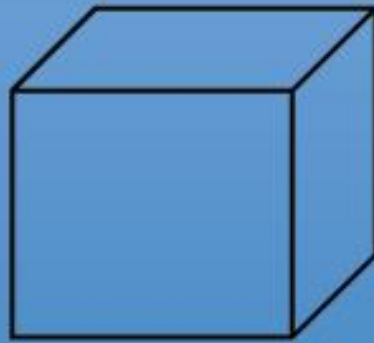


1-dimensional

In between 1 and 2 dimensional!



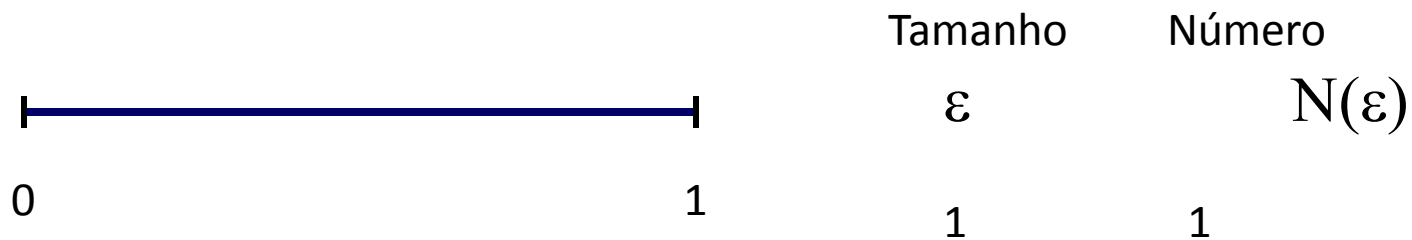
2-dimensional

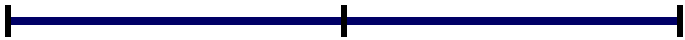


3-dimensional

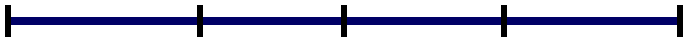
Cálculo da Dimensão Fractal

Cobrimo uma reta de comprimento 1 com segmentos menores:

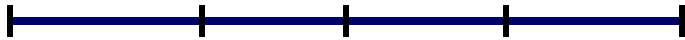




Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	2



Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	2



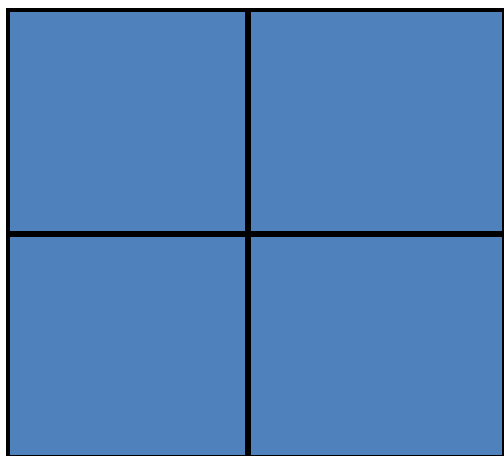
Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{4}$	4

Dividindo o lado do segmento por 2, o número de segmentos multiplica por 2.
Veja que $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon$.

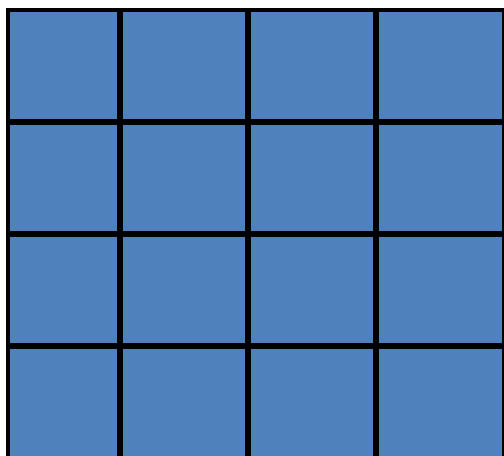
Cobrimo um quadrado de lado 1 com quadrados menores:



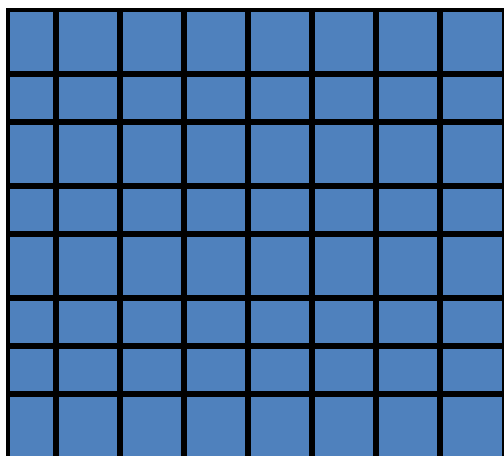
Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1



Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	$4=2^2$



Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	$4=2^2$
$\frac{1}{4}$	$16=4*4=4^2$

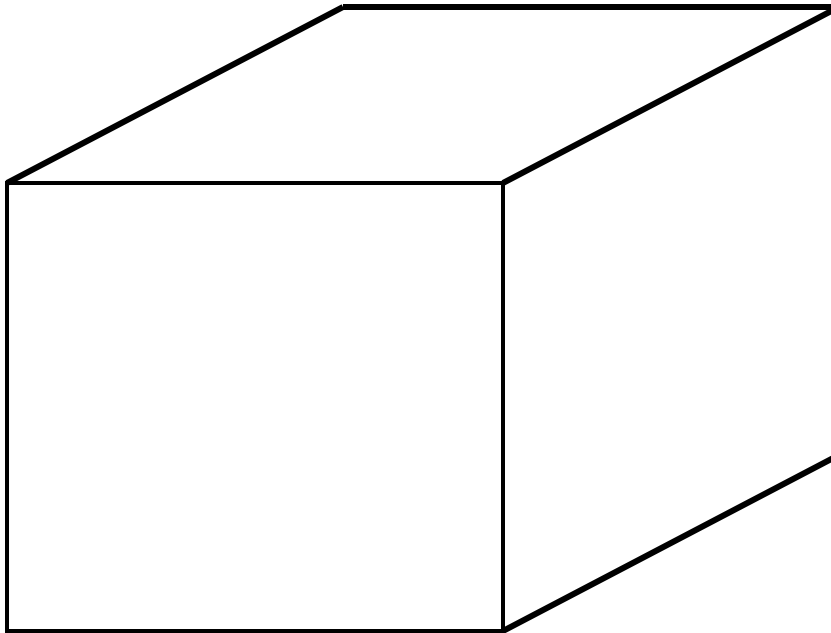


Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	$4=2^2$
$\frac{1}{4}$	$16=4^2$
$\frac{1}{2^k}$	$(2^k)^2 = (1/\varepsilon)^2$

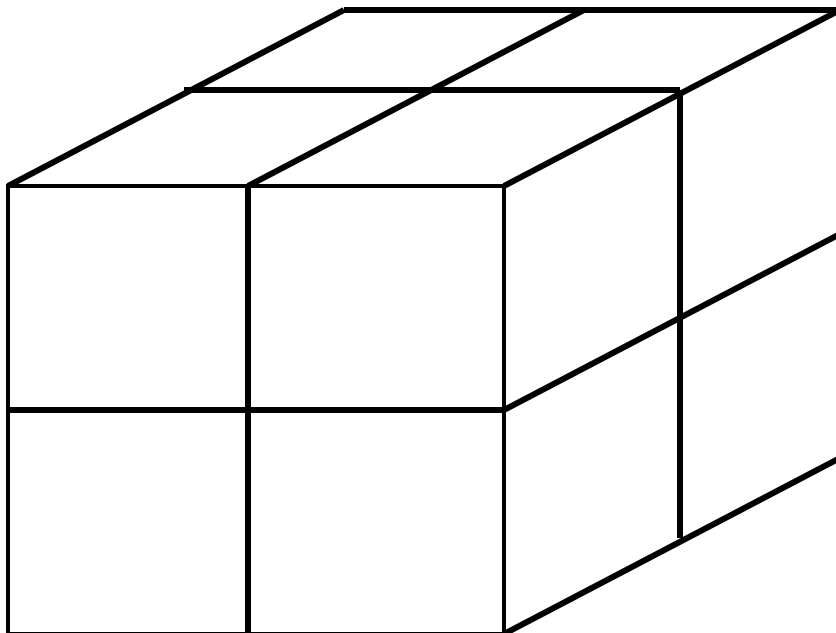
Dividindo o lado por 2, o número de quadrados multiplica por $4 = 2^2$.

Veja que $N(\varepsilon) = (1/\varepsilon)^2$.

Cobrimo cubo de lado 1 com cubos menores:



Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1



Tamanho

Número

ε

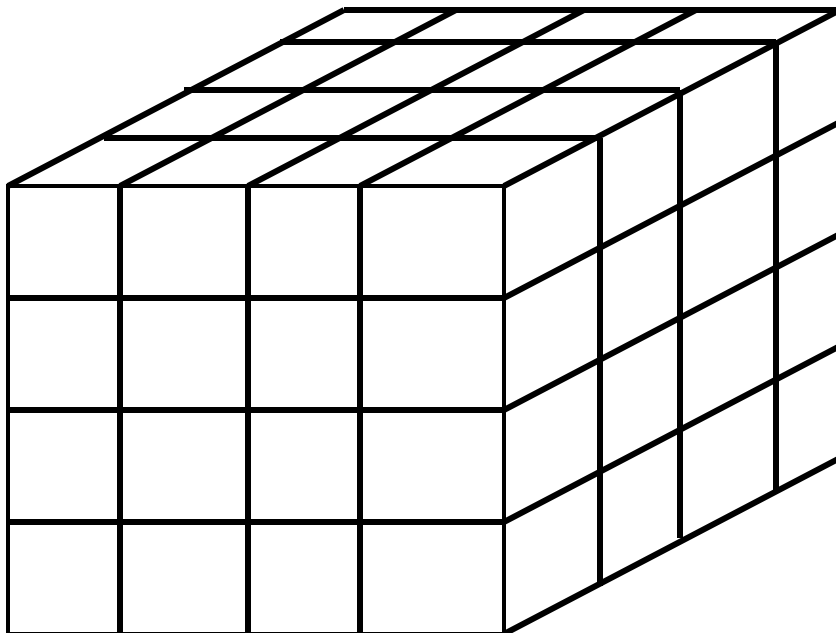
$N(\varepsilon)$

1

1

$\frac{1}{2}$

$8=2^3$



Tamanho	Número
ε	$N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	$8=2^3$
$\frac{1}{4}$	$64=4^3$
$\frac{1}{2^k}$	$(2^k)^3 = (1/\varepsilon)^3$

Dividindo o lado por 2, o número de cubos multiplica por $8 = 2^3$.

Agora temos que $N(\varepsilon) = (1/\varepsilon)^3$.

Definition of dimension

Create a geometric structure from a given D -dimensional object (e.g., line, square, cube, etc) by repeatedly dividing the length of its sides by a number N .

Then each level is made up of N^D copies of the previous level.

Call the number of copies M .

Then $M = N^D$.

We have:

$$\log M = D \log N$$

$$D = \log M / \log N$$

Podemos então definir a dimensão de uma figura com base nesse processo:

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$$

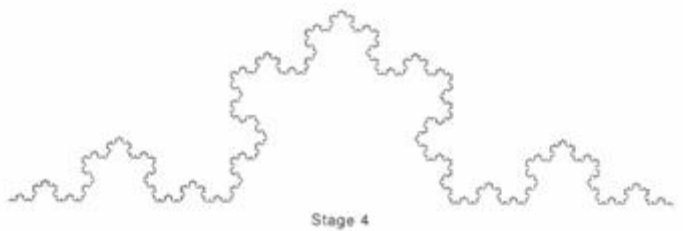
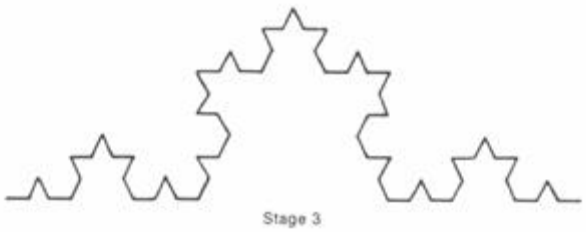
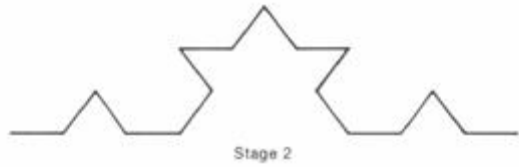
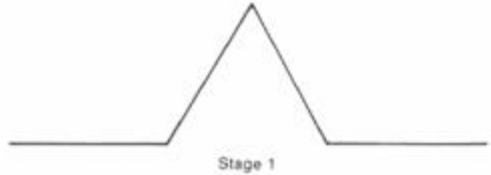
Tomando o logaritmo dos dois lados podemos isolar d :

$$\log[N(\varepsilon)] = \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d = d \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

e

$$d = \frac{\log[N(\varepsilon)]}{\log[1/\varepsilon]}$$

Dimensão da Curva de Koch:



Adapted from Benoit Mandelbrot, *Fractals*.

Tamanho
 ε

Número
 $N(\varepsilon)$

1

1

1/3

4

1/9

16=4²

1/27

64=4³

1/3^k

4^k

$$d = \frac{\log[N(\varepsilon)]}{\log[1/\varepsilon]} = \frac{\log 4^k}{\log 3^k} = \frac{k \log 4}{k \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26185\dots$$

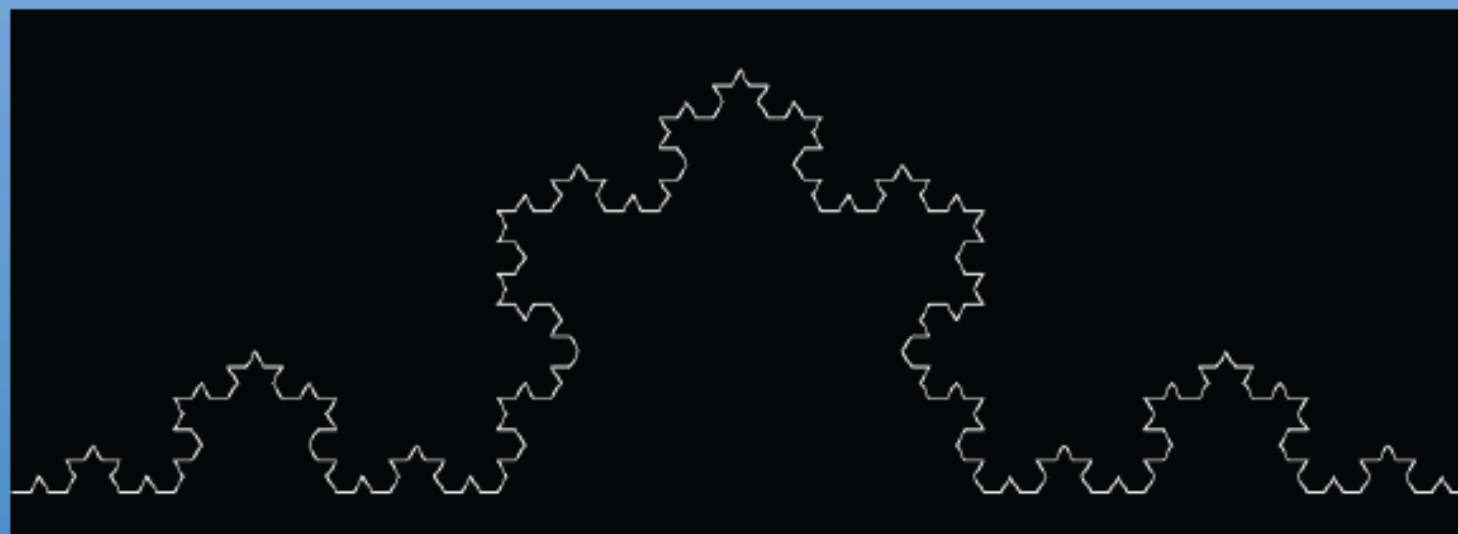
Fractal Dimension

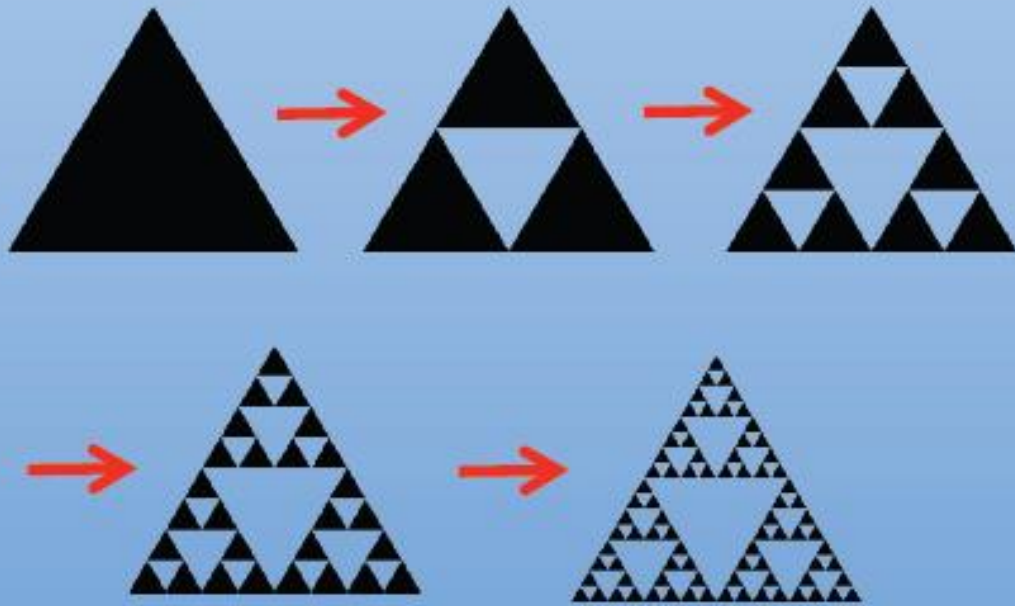
N = reduction factor from previous level = 3

M = number of copies of previous level = 4

Dimension $D = \log M / \log N = \log 4 / \log 3 \approx 1.26$

This version of fractal dimension is called *Hausdorff Dimension*, after the German mathematician Felix Hausdorff

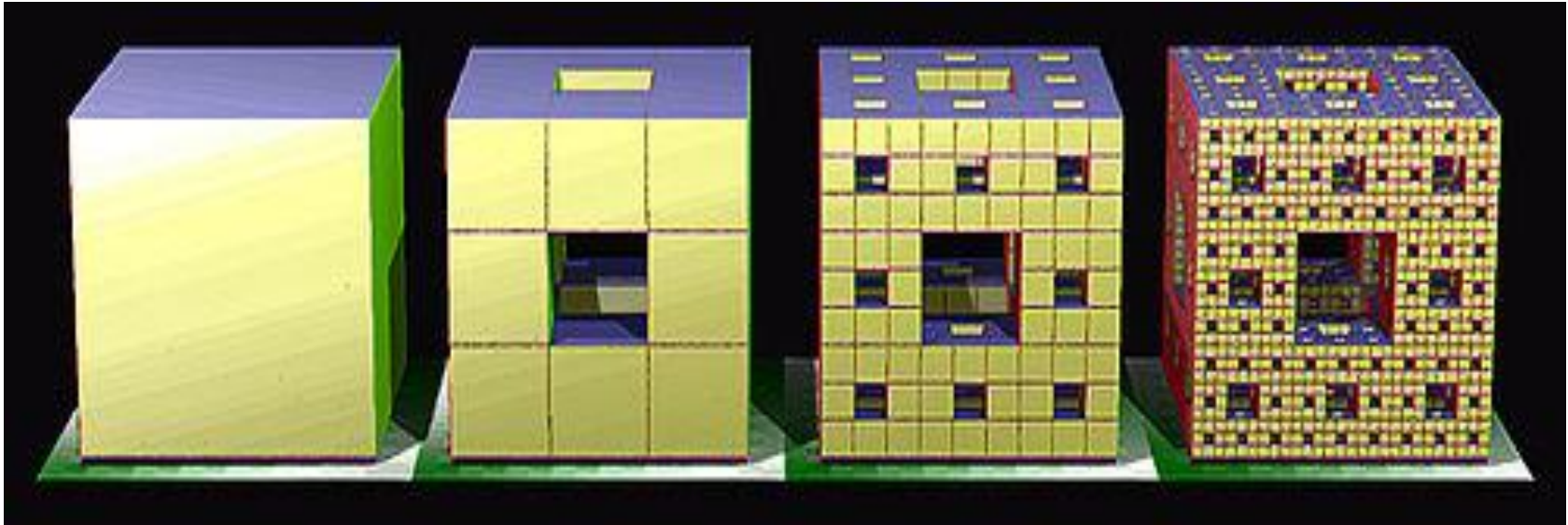




Fractal Dimension:

$$D = \frac{\log (\text{number of copies of previous level})}{\log (\text{reduction factor of side from previous level})}$$

Menger Sponge



Tarefa::

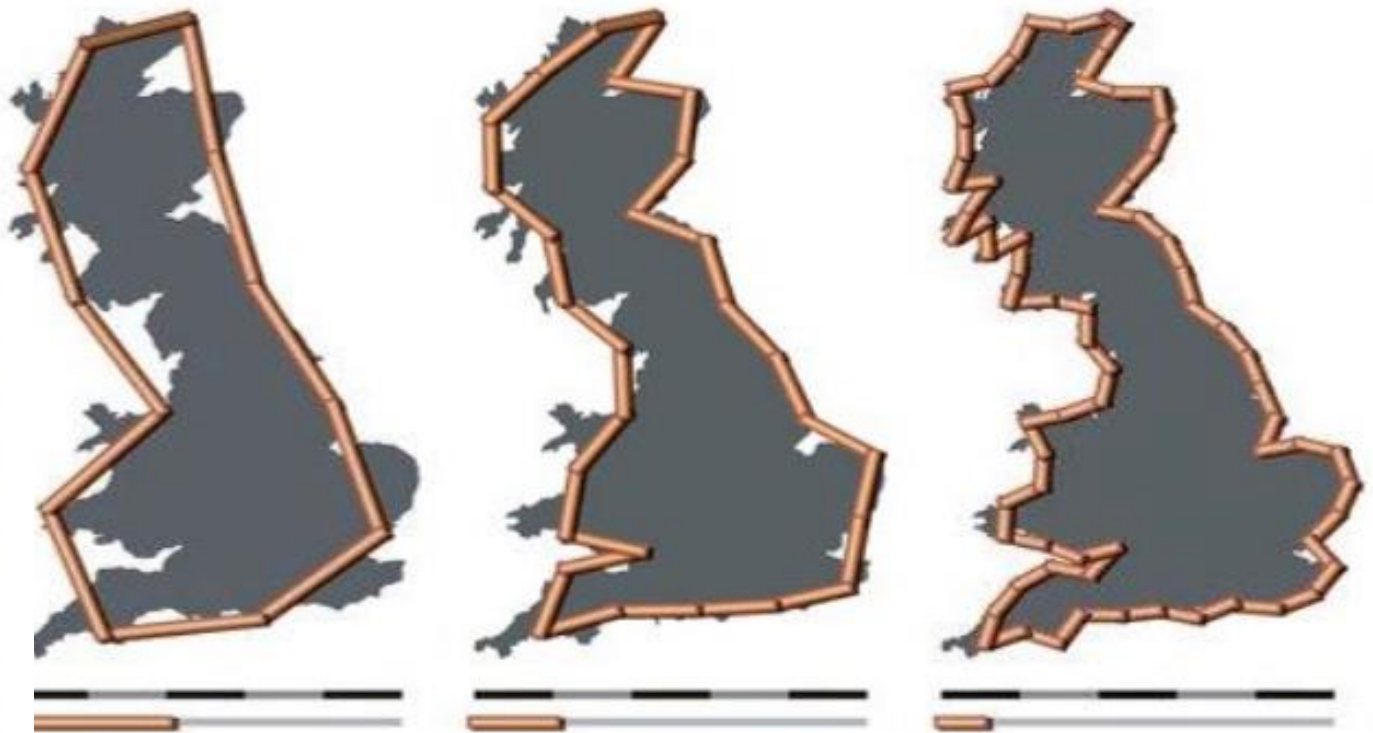
- a) Calcule o volume, a área e quando se aplica a regra k vezes
- b) Em seguida, obtenha a dimensão fractal deste objeto.

Approximate dimension of Cauliflower



Mandelbrot's example:
Measuring the length of the coastline of Great Britain

What size ruler should you use?



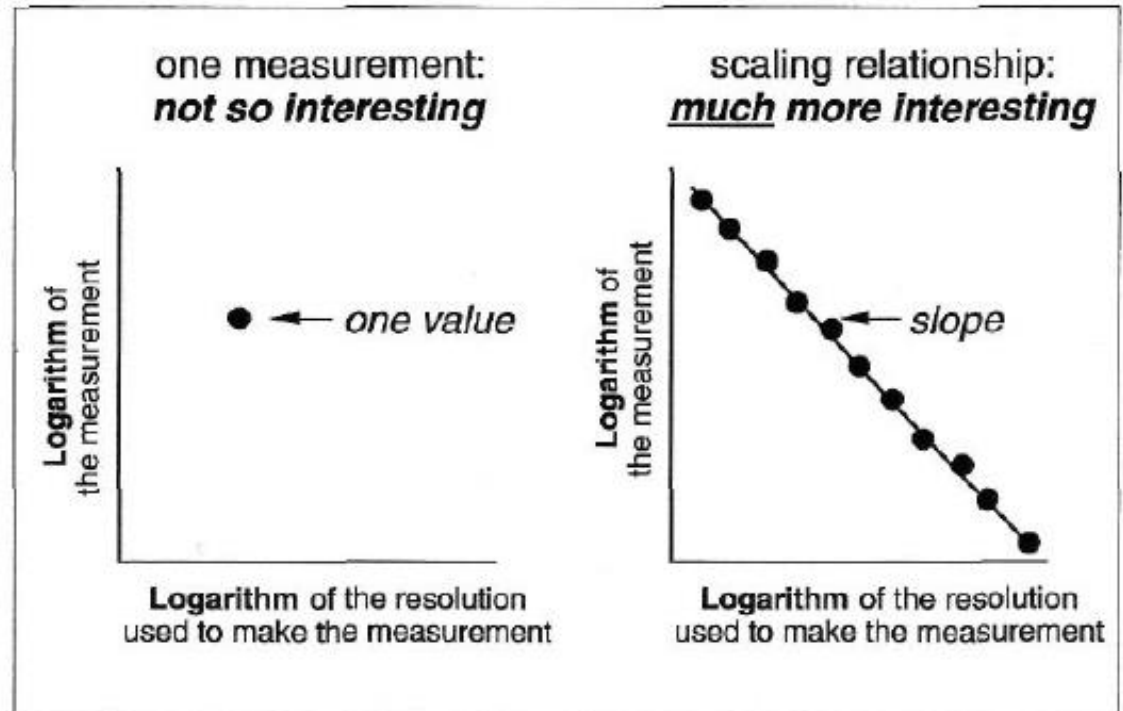
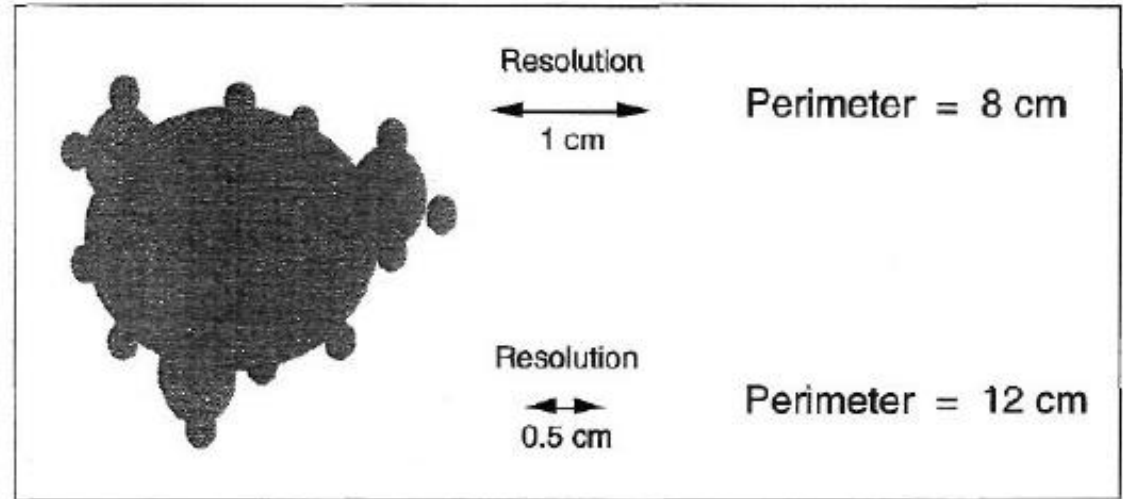
Benoit Mandelbrot, 1924–2010

Scaling

Objetos fractais não tem um valor único para a medida Q .

Para objetos fractais: medidas em diferentes resoluções terão valores diferentes

Uma medida pontual Não diz muito no caso de objetos fractais. É preciso obter a dependência funcional Com a escala (SCALING)



BOX COUNTING

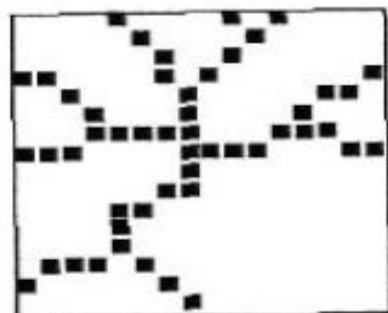
For example, we cover an object with a grid and count how many boxes of the grid contain at least some part of the object. We then repeat this measurement a number of times, each time using boxes with sides that are $1/2$ the size of the previous boxes.

The capacity dimension is then the slope of the plot of $\text{Log } N(r)$ versus $\text{Log } (1/r)$, or equivalently, the negative of the slope of the plot of $\text{Log } N(r)$ versus $\text{Log } (r)$.

If an object is self-similar, then the slope of $\text{Log } N(r)$ versus $\text{Log } (1/r)$ is the same as the limit of $\text{Log } N(r) / \text{Log } (1/r)$ as r approaches 0. It is much easier to determine the slope than the limit.

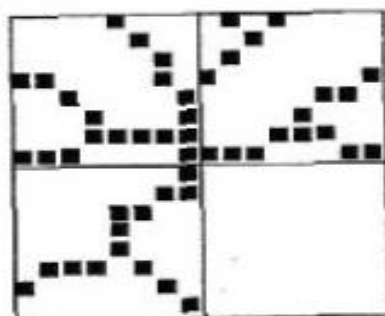
$r = \text{Box Size}$

$N(r) = \text{Number of Boxes Needed to Cover the Set}$



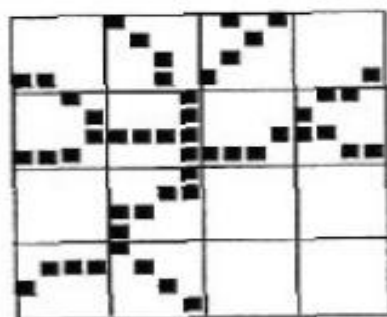
$r = 1$

$N = 1$



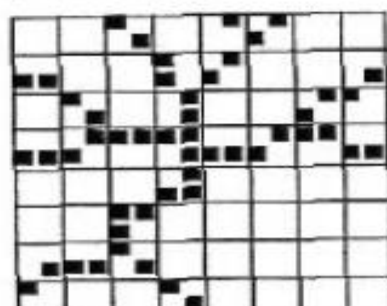
$r = 1/2$

$N = 3$



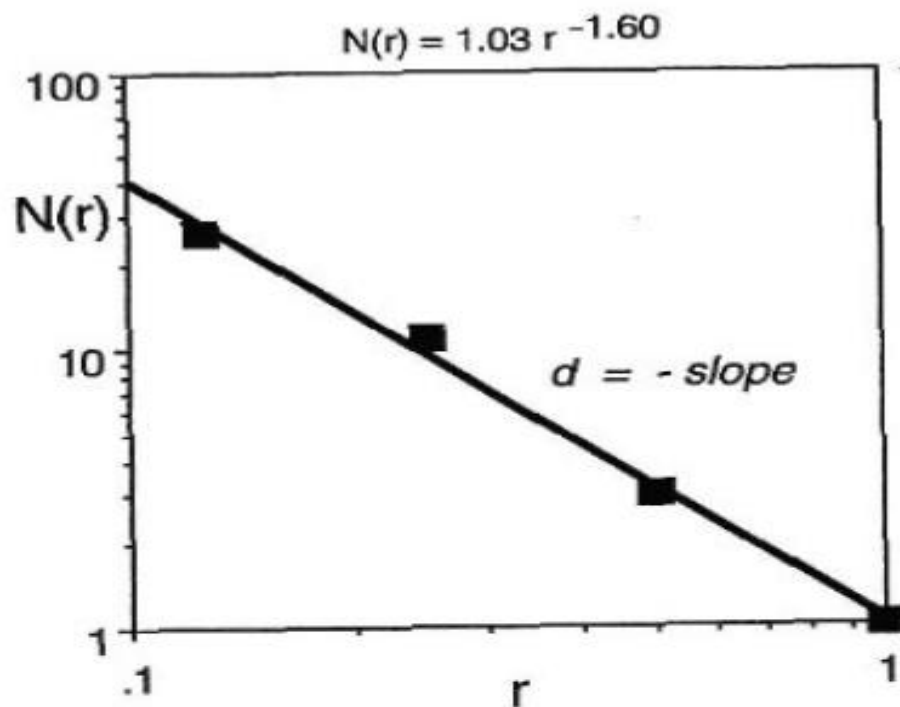
$r = 1/4$

$N = 11$



$r = 1/8$

$N = 26$



$$d = \frac{\Delta \text{Log } N(r)}{\Delta \text{Log } (1/r)}$$

$$= - \frac{\Delta \text{Log } N(r)}{\Delta \text{Log } (r)} = 1.60$$

Fast Box Counting Algorithms:

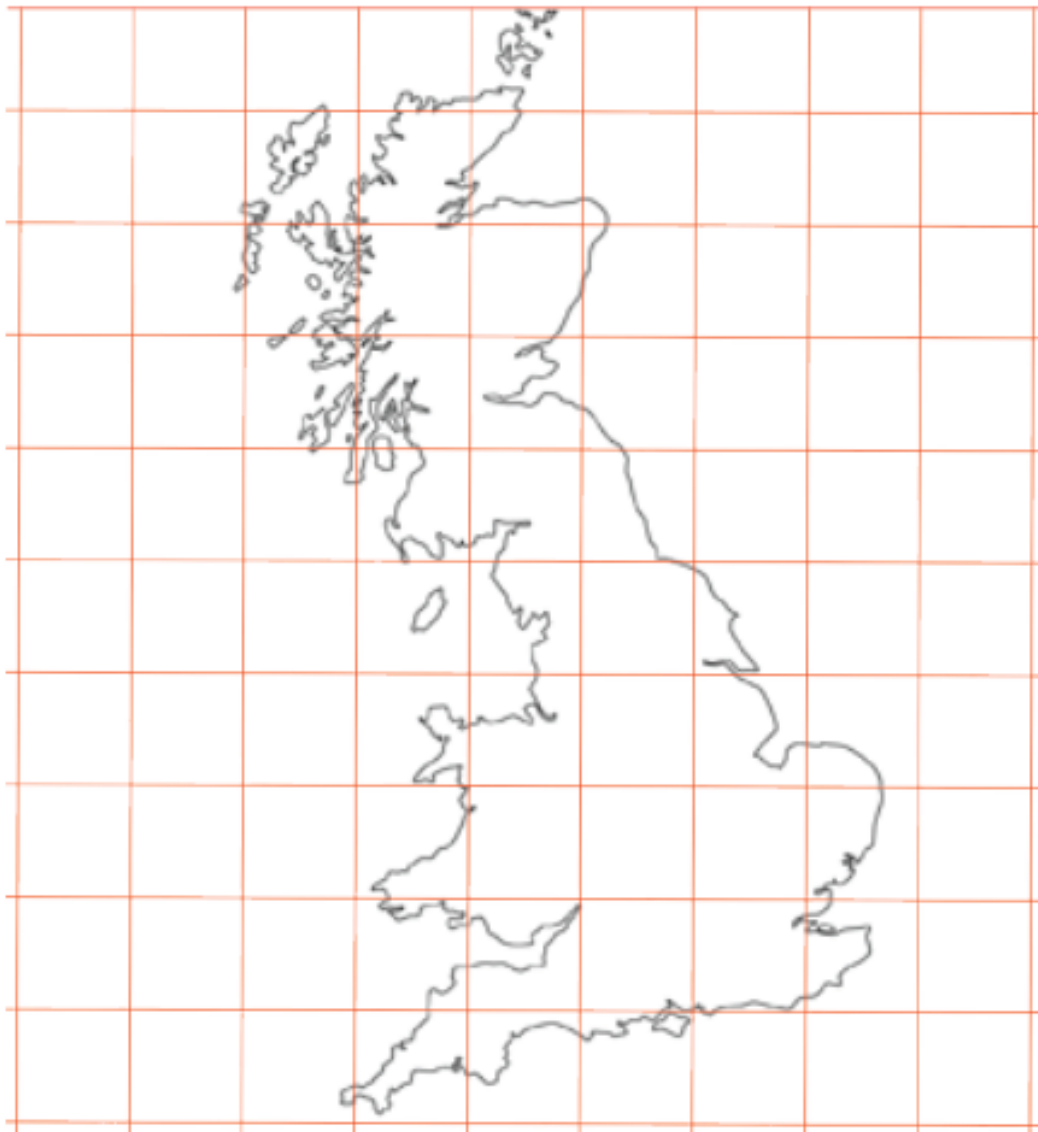
Liebovitch & Tóth 1989 Phys. Lett. A141:386-390.

Hou et al. 1990 Phys. Lett. A151:43-46.

Box Counting Method



Box Counting Method

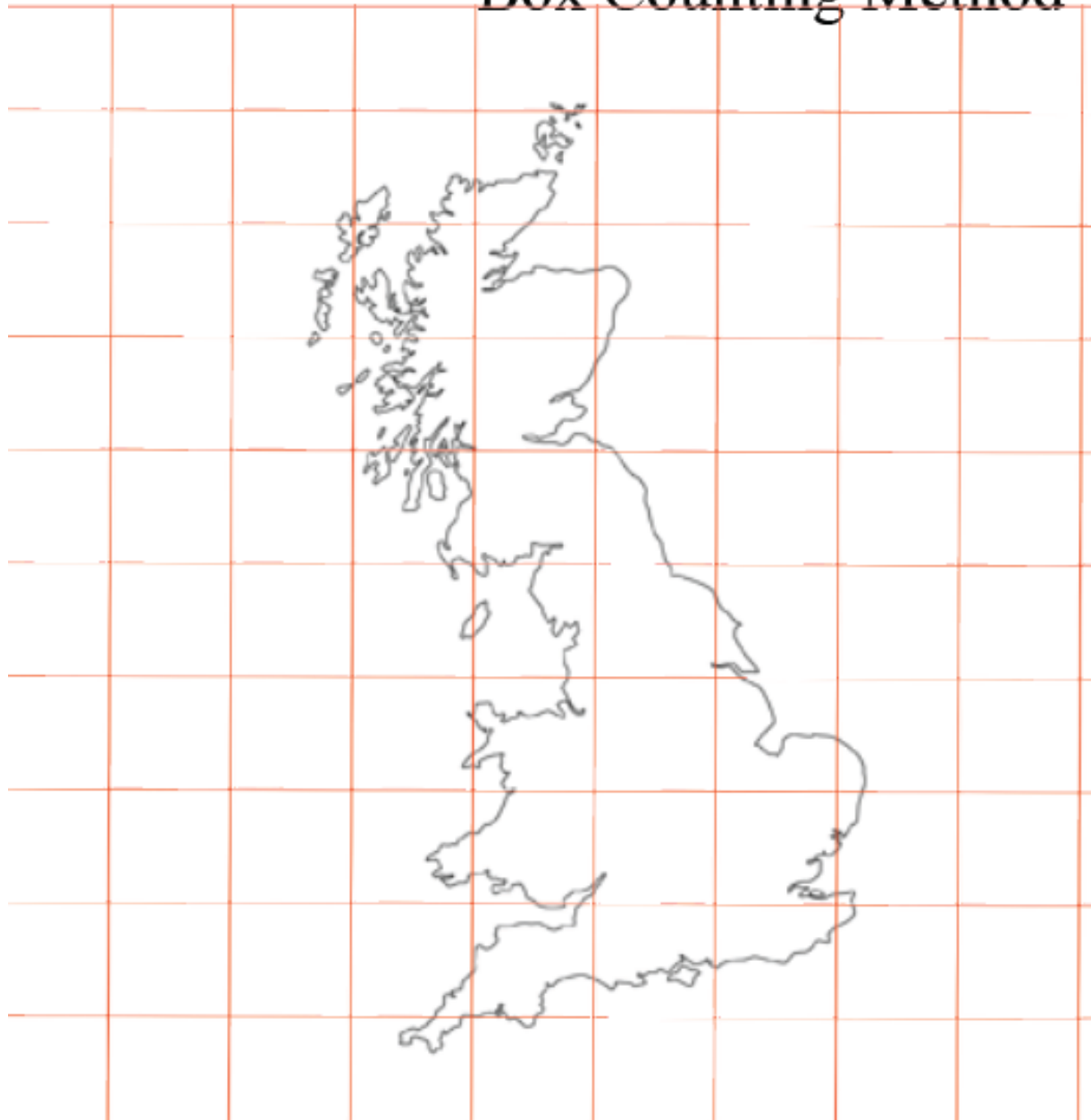


Number of boxes Length of side

36

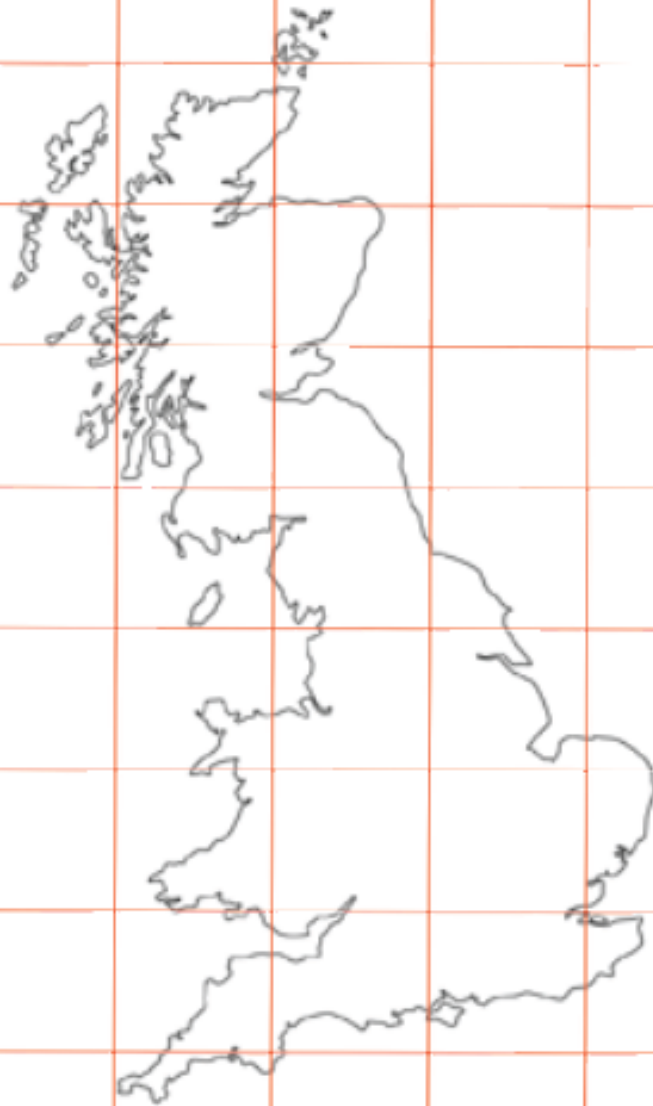
10

Box Counting Method



<u>Number of boxes</u>	<u>Length of side</u>
36	10
34	11

Box Counting Method



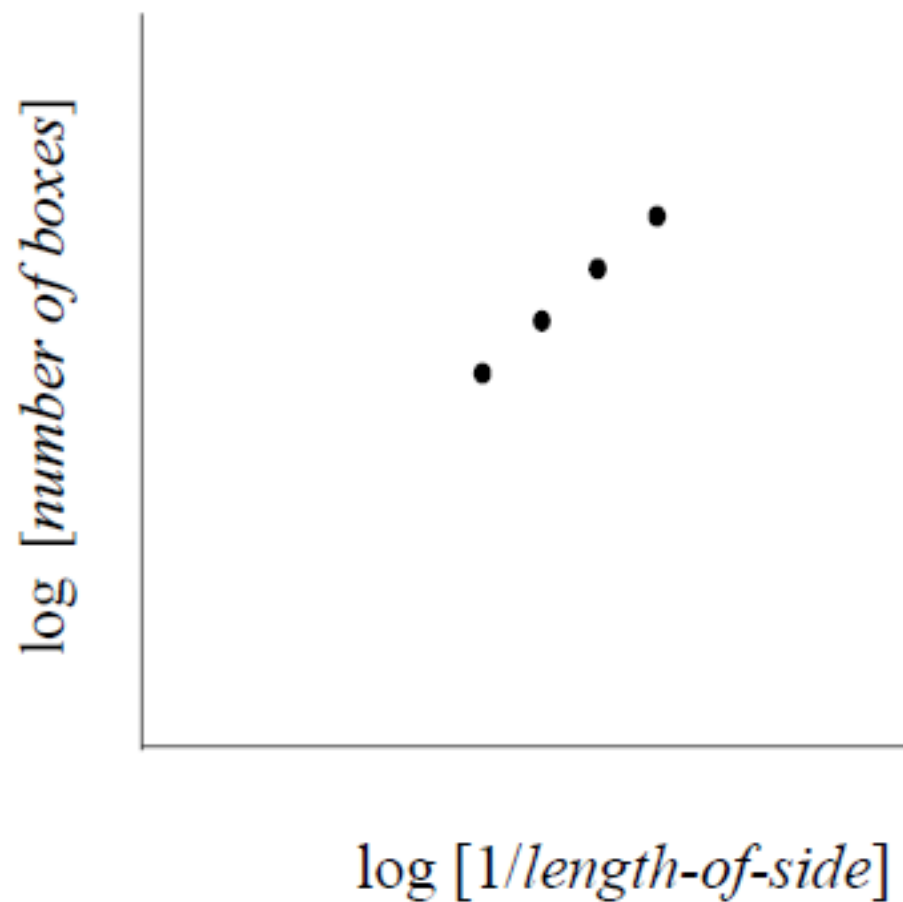
Number of boxes Length of side

36 10

34 11

27 12

$$\log [\textit{number of boxes}] = D \log [1/\textit{box-size}]$$



Approximate fractal dimension of coastlines (Shelberg, Moellering, and Lam, 1982)



West Coast of Great Britain:
 $D \approx 1.25$



Coast of Australia:
 $D \approx 1.13$



Coast of South Africa:
 $D \approx 1.02$

Approximate dimension of Cauliflower



Fractal Structure of a White Cauliflower

Sang-Hoon Kim*

*Division of Liberal Arts, Mokpo National Maritime University, Mokpo 530-729 and
Institute for Condensed Matter Theory, Chonnam National University, Gwangju 500-757*

(Received 17 September 2004)

The fractal structure of a white cauliflower is analyzed by the box-counting method on its cross section in the horizontal direction. From the box-counting method, the vertical cross section of a cauliflower is discussed. We discuss the connection between the fractal dimension and the angle of 67° in our model.

$$D \approx 2.8$$

the box-counting method on its cross section in the horizontal direction. From the box-counting method, the vertical cross section of a cauliflower is discussed. We discuss the connection between the fractal dimension and the angle of 67° in our model.

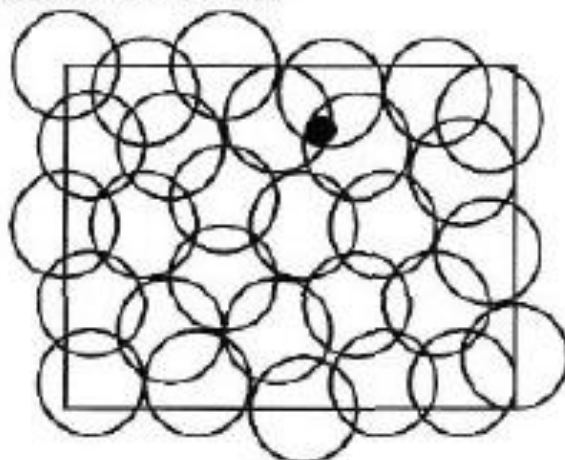
Topological Dimensions

always an *integer*

Covering Dimension

In a minimal covering, each point of the object is covered by no more than G sets.

$$d = G - 1$$



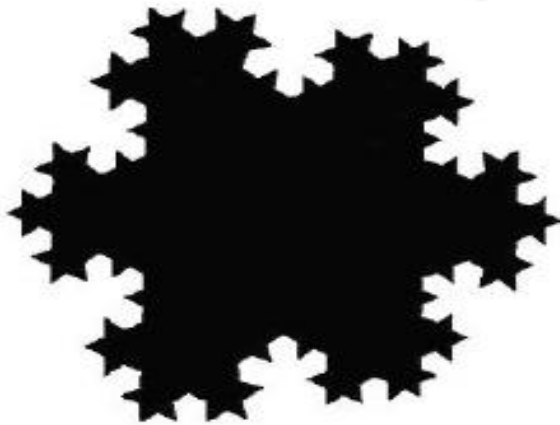
for a plane: $G = 3$ $d = 3 - 1 = 2$

Fractal é um objeto no espaço ou um processo no tempo que tem a dimensão fractal maior que a dimensão topológica

Definition of a Fractal

$$d(\text{fractal}) > d(\text{topological})$$

example:



perimeter:

$$d(\text{fractal}) = 1.2619\dots$$

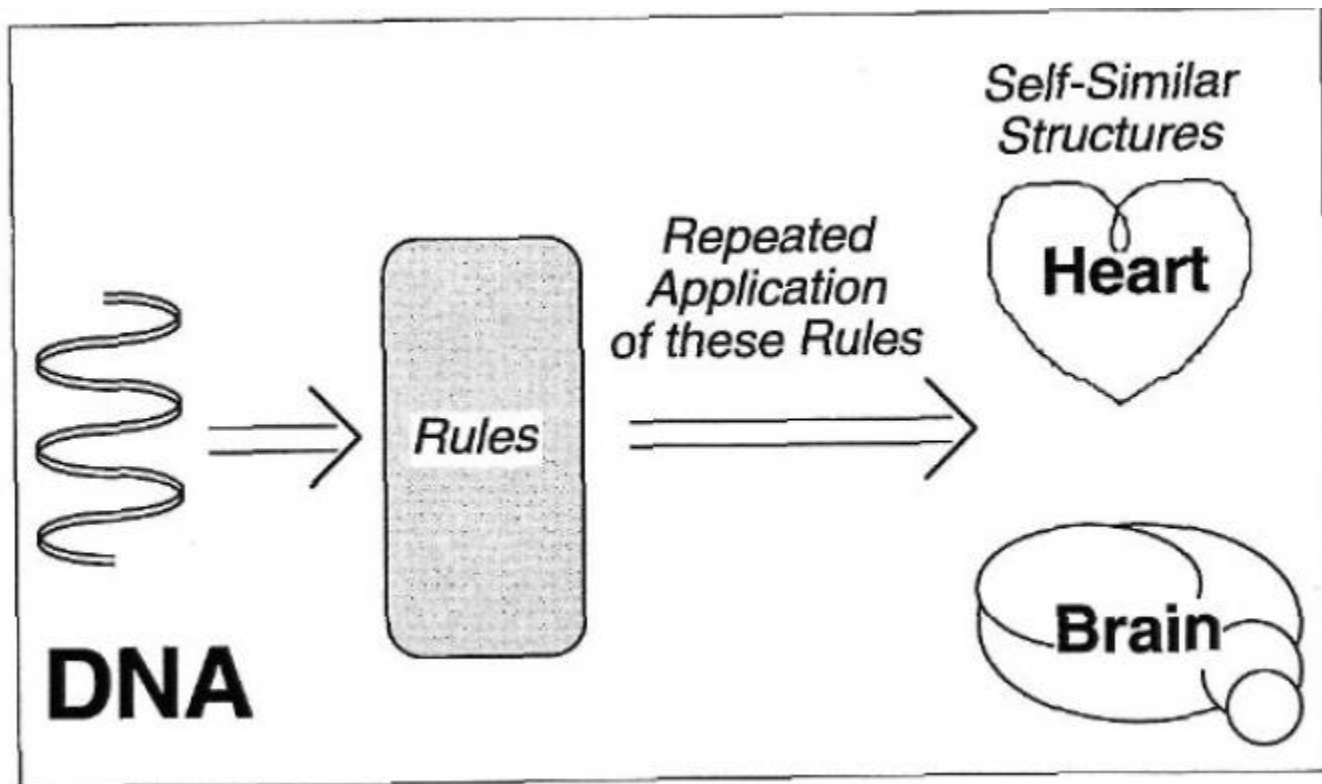
$$d(\text{topological}) = 1.$$

$$1.2619\dots > 1.$$

$$d(\text{fractal}) > d(\text{topological})$$

perimeter:

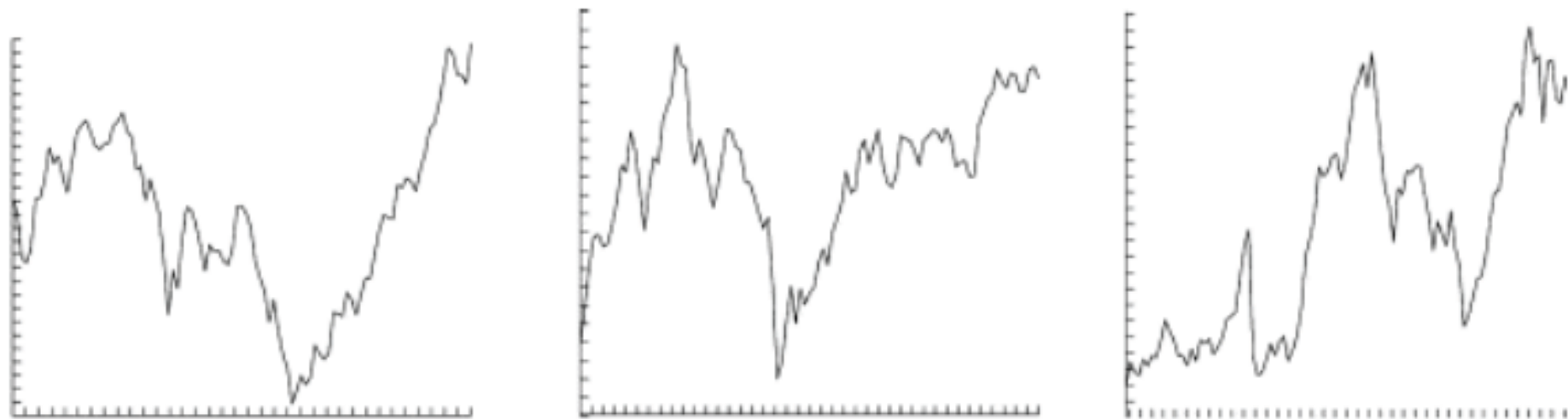
covers more space than a 1-D line
covers less space than a 2-D area



Fractal dimension of stock prices

(J. A. Skjeltorp, Scaling in the Norwegian stock market, Physica A, 2000)

Oslo stock exchange general index



Question: Are stock prices following a “random walk”?

Project: Compare fractal dimension of stock prices with fractal dimension of “random walk”

Análise R/S

No exemplo do S & P 500 , tomei uma série com 15.821 retornos diários . Então, eu escolhi as seguintes faixas, todas as potências de dois :

Tamanho de cada intervalo	Número de pontos (n)
1	15.821
1/2	7.910
1/4	3.955
1/8	1.977
1/16	988
1/32	494

1. Calcule a média para cada faixa (intervalo)

$$mean_s = m_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

2. Criar uma série de desvios para cada faixa

$$Y_t = X_t - m; \text{ for } t = 1, 2, \dots, n$$

3. Criar uma série que é o valor acumulado dos desvios da média .

$$y_j = \sum_{i=1}^j Y_i$$

4. Calcula-se a maior diferença na série dos desvios

$$R_t = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_t) - \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_t); \text{ for } t = 1, 2, \dots, n$$

5. Calcular o desvio padrão para cada faixa

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (X_i - m)^2}; \text{ for } t = 1, 2, \dots, n$$

6. Calcule o intervalo redimensionados para cada faixa da série histórica

$$\text{rescaled range} = \left(\frac{R}{S}\right)_t = \frac{R_t}{\sigma_t}; \text{ for } t = 1, 2, \dots, n$$

6. Calcular a média dos valores da faixa escalonados para cada região para resumir cada intervalo.

Como exemplo, considere o intervalo $\frac{1}{4}$ com $n= 3.955$ neste caso partimos a série original em 4 partes, assim

Parte 1	83.04
Parte 2	63.51
Parte 3	84.16
Parte 4	88.09
Valor médio R/S	79.70

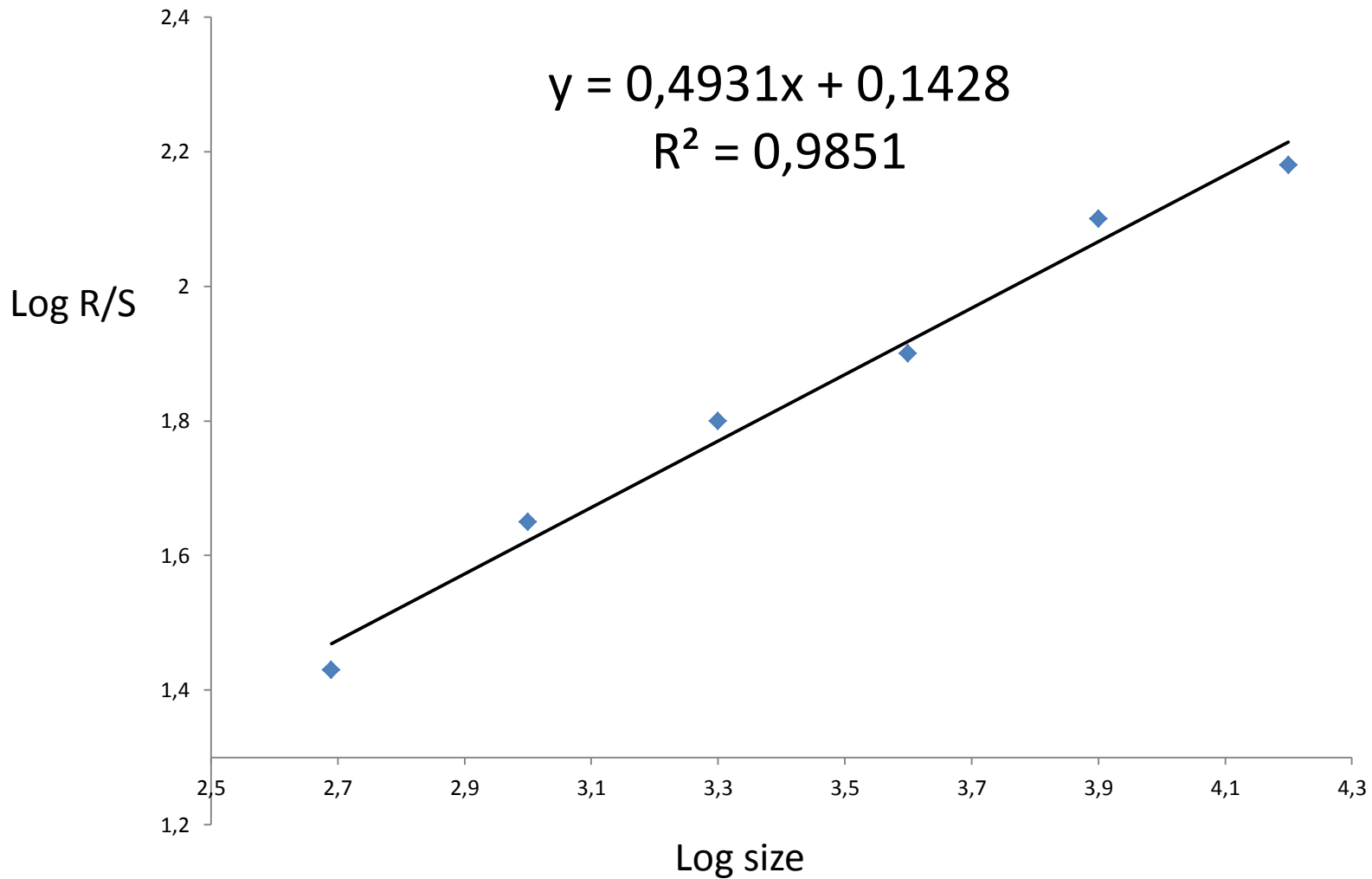
Temos os seguintes valores para os intervalos escalonados :

Number of Ranges in Region	Average Data Points in Each Range of Region	<i>R/S</i>
1	15,821	151.77
2	7,911	126.52
4	3,955	79.70
8	1,978	63.36
16	989	44.96
32	495	27.15

Calcular os logarítmicos para o tamanho de cada região e para o intervalo escalonado de cada região

Log Size (x)	Log R/S (y)
4.20	2.18
3.90	2.10
3.60	1.90
3.30	1.80
3.00	1.65
2.69	1.43

Plot the logarithm of the size (x axis) of each series versus the logarithm of the rescaled range (y axis)



forma, o interesse estará em determinar o expoente H na relação:

$$(R/S)_s \sim s^H. \quad (4.9)$$

O parâmetro H , chamado de Expoente de Hurst, representa as propriedades de correlação da série temporal, da seguinte maneira:

- Se $H = 0.5$, não existem correlações de longo alcance presentes na série.
- Se $0 < H < 0.5$, a série é antipersistente e possui autocorrelações negativas.
- Se $0.5 < H < 1$, a série é persistente e possui autocorrelações positivas.

O Expoente de Hurst está diretamente relacionado à Dimensão Fractal D_f , que é a medida da rugosidade do sistema considerado. A relação é dada pela Equação 4.10:

$$D_f = 2 - H. \quad (4.10)$$

Quanto menor o expoente H , maior o valor de D_f , indicando maior rugosidade.

Detrended Fluctuation Analysis - DFA

$$r(t) = \{r(1), \dots, r(L)\}$$

No segundo passo, deve-se calcular a série integrada $Y(i)$:

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i \{r(k) - \bar{r}\},$$

onde \bar{r} é a média da série de retornos e $i = \{1, \dots, L\}$. Não é

O quarto passo consiste em calcular, para cada segmento v , a *Função de Flutuação* ou Variância:

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s + i] - y_v^m(i)\}^2, \quad (4.14)$$

com $y_v^m(i)$ representando o ajuste polinomial de ordem m (tendência local) em cada segmento v . Pode-se utilizar polinômios de ordem $m = 1, 2, 3, \dots$, obtendo respectivamente

$$F_q(s) = \left(\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N [\{F^2(s, v)\}^{q/2}] \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (4.17)$$

onde a variável q pode assumir qualquer valor real exceto zero. O valor de $F_q(s)$ não pode ser determinado diretamente quando $q = 0$, por causa do expoente divergente da Equação

$F_q(s)$ deve seguir uma lei de potência:

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}.$$

Para séries temporais estacionárias, $h(2)$ é idêntico ao Expoente de Hurst H . Então, $h(q)$ é chamada de Expoente de Hurst Generalizado [11].

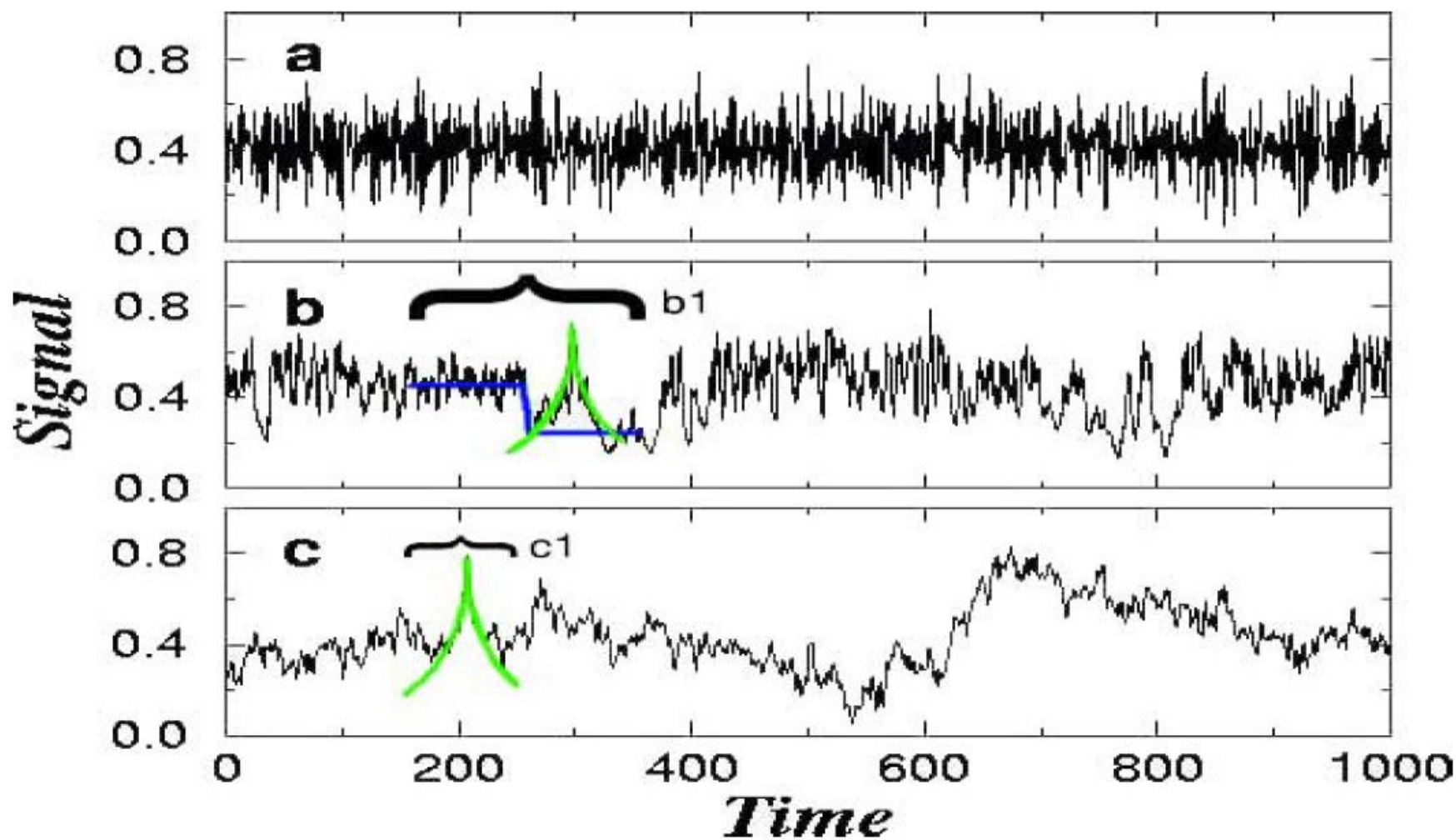
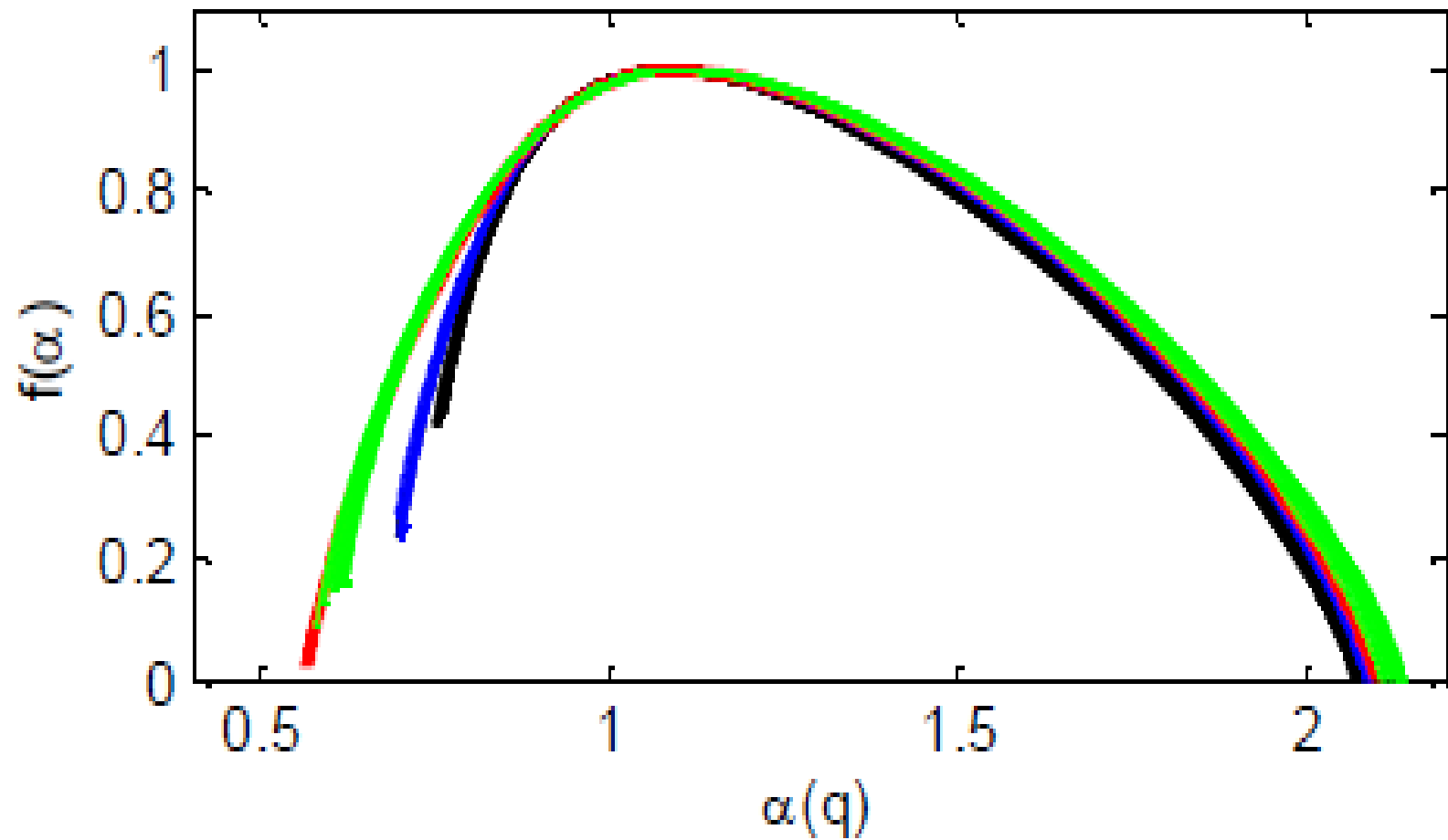


Figura 4.2: Característica fractal presente em séries reais e simuladas

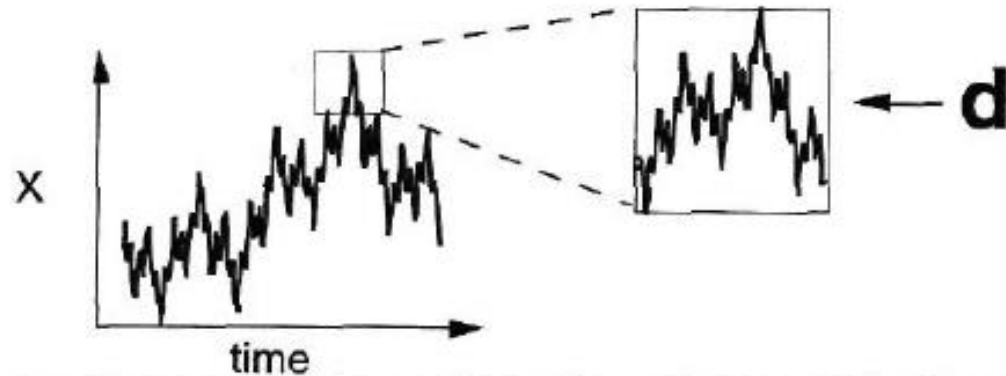
Espectro Multifractal

(d)



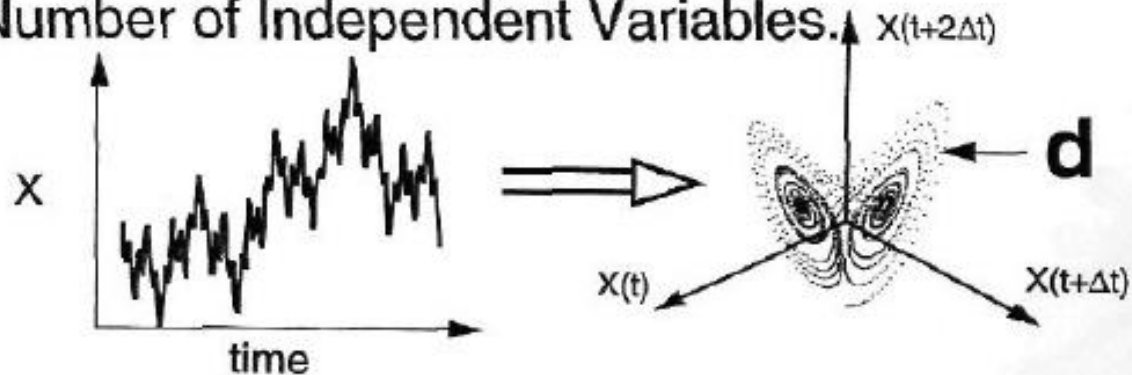
Fractal Dimension:

How many new pieces of the Time Series are found when viewed at finer time resolution.



Fractal Dimension:

The Dimension of the Attractor in Phase Space is related to the Number of Independent Variables.



Summary of Fractal Properties

Self-Similarity

Pieces resemble the whole.

Scaling

The value measured depends on the resolution.

Dimension

How many new pieces are found as the resolution is increased.

Statistical Properties

Moments may be zero or infinite.

O QUE SÃO FRACTAIS?

1 – Fractais são conjuntos auto-similares: ampliações sucessivas do conjunto reproduzem exatamente o mesmo conjunto.

2 – Para o conjunto de Mandelbrot, os fractais são conjuntos quase auto-similares: ampliações sucessivas são parecidas com o conjunto inicial, mas não idênticas. O importante é que cada ampliação revele novas estruturas.

Característica importante: conjuntos fractais tem dimensão fracionária!

Books About Fractals

classic

B. B. Mandelbrot

The Fractal Geometry of Nature 1983 W. H. Freeman

mathematics

G. A. Edgar

Measure, Topology, and Fractal Geometry

1990 Springer-Verlag

M. Barnsley

Fractals Everywhere 1988 Academic Press

physics & chemistry

J. Feder

Fractals 1988 Plenum

D. Avnir

The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry

1989 John Wiley & Sons

biomedical

J. Bassingthwaite, L. Liebovitch, & B. West

Fractal Physiology 1994 Oxford Univ. Press

P. M. Iannaccone & M. Khokha

Fractal Geometry in Biological Systems 1996 CRC Press