Mecânica dos Fluidos II (PME 3330)
Gabarito Primeira Prova - 2017

1. (2 pontos) Considere um campo de velocidade estacionário e bidimensional cuja componente u da velocidade na direção x é dada por:

$$u = A\,x + B\,y + C\,x^2 - D\,x\,y$$

onde A, B, C e D são constantes com dimensões apropriadas. Gere uma expressão para o componente v da velocidade na direção y e restrições nas constantes, de forma que o escoamento seja incompressível, irrotacional e tenha velocidade nula na origem de coordenadas.

Divergente: $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$; rotacional: $\nabla \times \boldsymbol{V} = \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\breve{\boldsymbol{i}} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\breve{\boldsymbol{j}} + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\breve{\boldsymbol{k}}$

Solução:

Da condição de incompressibilidade e bidimensionalide, $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = -A - 2C\,x + D\,y$; integrando parcialmente, resulta $v = -A\,y - 2C\,x\,y + \dfrac{1}{2}D\,y^2 + f(x)$

Da condição de irrotacionalidade: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$; $-2C\,y + f'(x) = B - D\,x \Rightarrow C = 0$ e $f'(x) = B - D\,x$

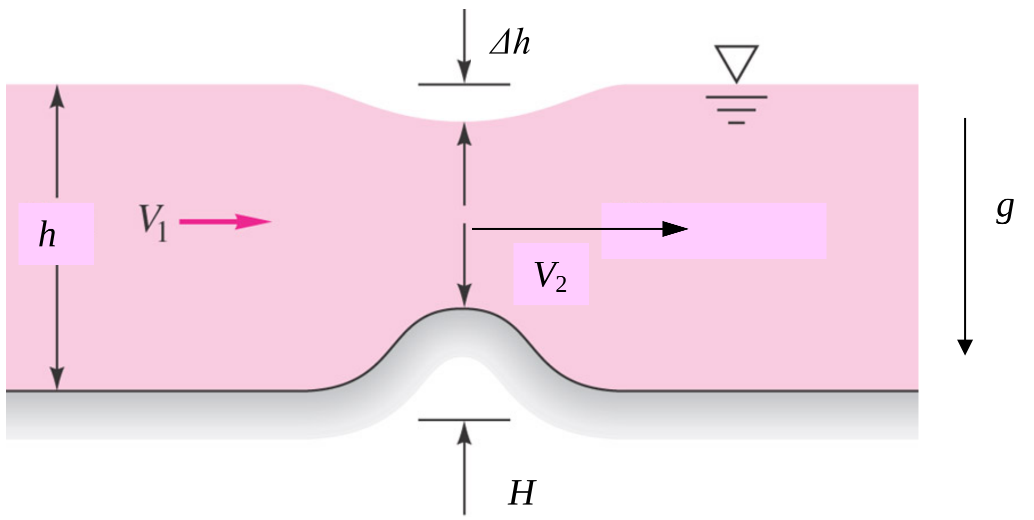
Integrando, resulta: $f(x) = B\,x - \dfrac{1}{2}D\,x^2 + E$, onde E é uma constante. Da condição de velocidade nula na origem de coordenadas, resulta $E = 0$. Substituindo, temos finalmente:

$$u = A\,x + B\,y - D\,x\,y$$

$$v = B\,x - A\,y - \frac{1}{2}D\,x^2 + \frac{1}{2}D\,y^2$$

2. (3 pontos) Se a velocidade de aproximação não for alta demais, uma saliência de altura H no fundo de um canal de água bi-dimensional de espessura h causará um afundamento Δh do nìvel da água, que pode servir para a medição da vazão Q por unidade de comprimento na direção normal ao papel. Desprezando as perdas e supondo uma velocidade uniforme na seção de passagem, determinar as velocidades V_1, V_2 e a vazão Q em função das variáveis anteriores e da aceleração gravitacional g.

Dica: a superfície livre de água está a pressão atmosférica.



Eq. de Bernoulli em uma linha de corrente, incompressível e permanente: $p + \dfrac{1}{2}\rho V^2 + \rho\,g\,z = \text{cte}$

Conservação de massa, permanente: $0 = \int_A \rho(\boldsymbol{V}.\boldsymbol{\breve{n}})dA$

(Adaptado de *Mecânica dos Fluidos*, F. M. White, McGraw-Hill, 2011)

Solução:
Da equação de continuidade entre as seções 1 e 2, resulta:

$$V_1\, h = V_2\,(h - \Delta h - H) \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{h}{h - \Delta h - H} V_1 = \beta V_1 \text{, onde } \beta = \frac{1}{1 - \frac{\Delta h}{h} - \frac{H}{h}} \geq 1$$

Da equação de Bernuolli para a linha de corrente da superfície, resulta:

$$p_a + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho\, g\, h = p_a + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho\, g\,(h - \Delta h) \quad \Rightarrow \quad V_2^2 - V_1^2 = 2\, g\, \Delta h$$

Eliminando V_2, resultam $V_1 = \left(\frac{2\, g\, \Delta h}{\beta^2 - 1}\right)^{1/2}$, $V_2 = \beta\left(\frac{2\, g\, \Delta h}{\beta^2 - 1}\right)^{1/2}$, $Q = V_1\, h = h\left(\frac{2\, g\, \Delta h}{\beta^2 - 1}\right)^{1/2}$

3. (5 pontos) Um líquido escoa em regime laminar sob cisalhamento com velocidade U entre uma placa fixa e outra móvel separadas uma distância $2h$, como mostrado na figura. A gravidade é desprezada e o escoamento é completamente desenvolvido (não há variação da velocidade com x). Supondo viscosidade μ conhecida, queremos encontrar o gradiente de pressão constante $\frac{dp}{dx}$ necessário para que a vazão de líquido que escoe para a esquerda (em valor absoluto) seja igual à que escoe para a direita. Resolver o exercício seguindo os seguintes passos:

a) Determinar o perfil de velocidade na região $-h \leq y \leq h$ em função de U, $\frac{dp}{dx}$ e do resto dos parâmetros aplicando condições de contorno adequadas de velocidade nas paredes e na interface; (1.5 pontos)

b) Encontrar $\frac{dp}{dx}$ em função de U e do resto dos parâmetros aplicando ao perfil de velocidade a condição adequada; (1.5 pontos)

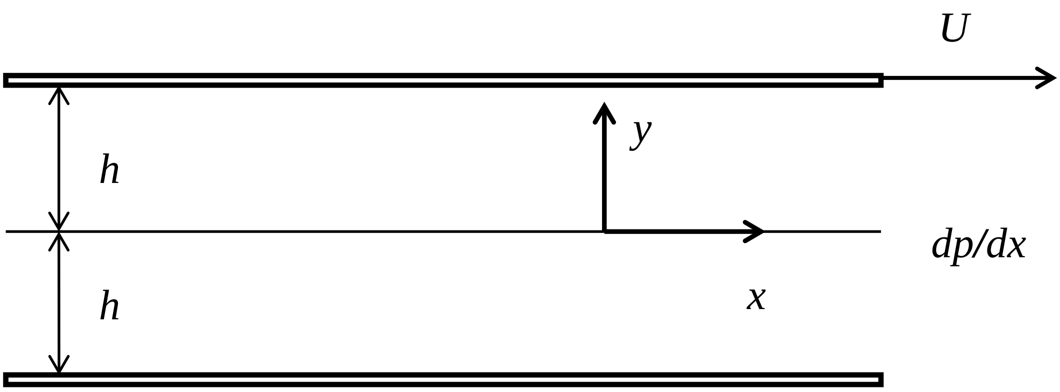
c) Eliminar $\frac{dp}{dx}$ e reescrever o perfil de velocidade adimensional na forma $u^* = u^*(y^*)$, onde $u^* = \frac{u}{U}$, $y^* = \frac{y}{h}$; (1 ponto)

d) Encontrar a posição onde a velocidade troca de sinal e calcular a vazão adimensional por unidade de comprimento na direção normal que escoa para a esquerda ou direita $Q^* = \frac{|Q_{e,d}|}{U\, h}$. (1 ponto)

Equação de Navier-Stokes direção x: $\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho G_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$

Ajudas para o cálculo: $\int_{-1}^{1}(1 - y^{*2})dy^* = \frac{4}{3}$; $\int_{-1}^{1}(1 + y^*)dy^* = 2$; $\int_{-1}^{1/3}(1 - y^{*2})dy^* = \frac{80}{81}$; $\int_{-1}^{1/3}(1 + y^*)dy^* = \frac{8}{9}$

Raízes da equação $3\,y^{*2} + 2\,y^* - 1 = 0$: $y^* = -1$ e $y^* = \frac{1}{3}$.



Solução:

a) O perfil de velocidade para a região $-h \le y \le h$ surge de resolver:

$$-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{d^2u}{dy^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y+A \quad ; \quad u=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2+A\,y+B$$

com condições de contorno:

$$u(-h)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h^2-A\,h+B=0$$

$$u(h)=U \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h^2+A\,h+B=U$$

Resolvendo para A e B, obtemos:

$$A=\frac{U}{2h} \quad ; \quad B=\frac{U}{2}-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h^2$$

O perfil de velocidade resulta:

$$u(y)=-\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]+\frac{U}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)$$

b) Se a vazão para a direita e para a esquerda são iguais (em valor absoluto), então a vazão total Q (soma algébrica) deve ser zero:

$$Q=\int_{-h}^{h}u(y)dy=0 \quad ; \quad -\frac{h^3}{2\mu}\frac{dp}{dx}\int_{-1}^{1}\left(1-y^{*2}\right)dy^*+\frac{U\,h}{2}\int_{-1}^{1}\left(1+y^*\right)dy^*=0$$

$$-\frac{h^3}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{U\,h}{2}(2)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx}=\frac{3}{2}\frac{\mu U}{h^2}$$

c) Substituindo no perfil de velocidade calculado no item a), obtemos o perfil adimensional:

$$u^*\left(y^*\right)=-\frac{3}{4}\left(1-y^{*2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+y^*\right)=\frac{3}{4}y^{*2}+\frac{1}{2}y^*-\frac{1}{4}$$

d) A posição onde a velocidade adimensional é zero resulta de resolver a equação de segundo grau: $\frac{3}{4}y^{*2}+\frac{1}{2}y^*-\frac{1}{4}=0 \quad \Rightarrow \quad 3\,y^{*2}+2\,y^*-1=0$

As raízes da equação anterior são $y^*=0$ (parede inferior) e $y^*=\frac{1}{3}$. Integrando o perfil de velocidade, determinamos as vazões para a esquerda e direita:

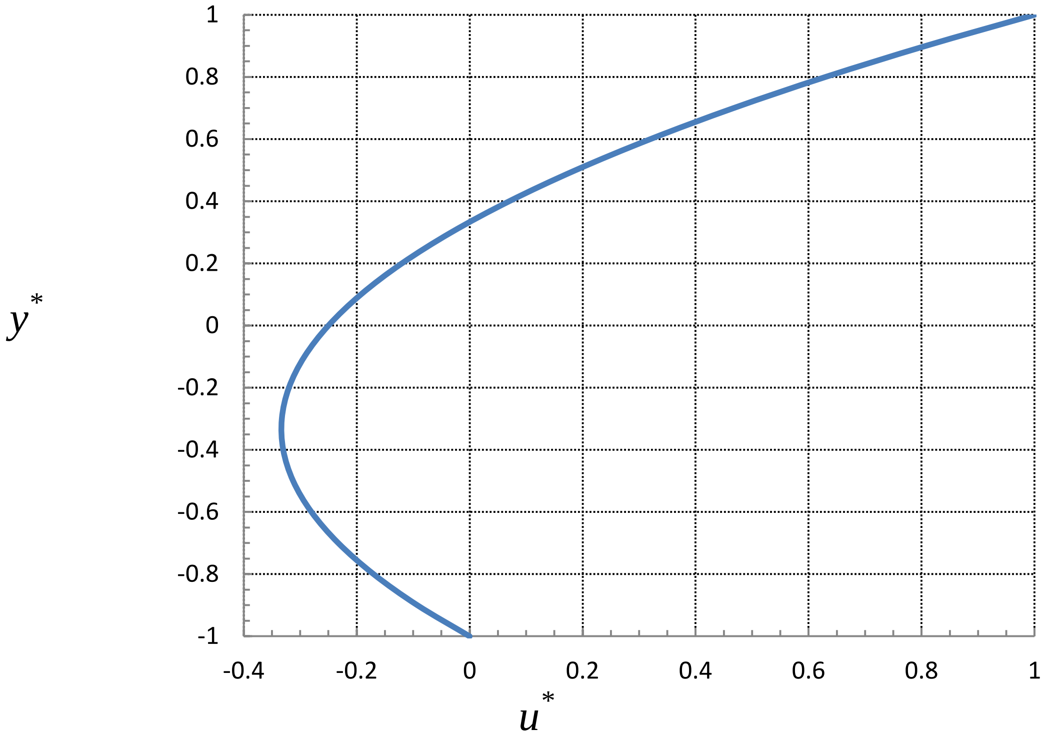
$$Q_e=\int_{-h}^{h/3}u(y)dy=U\,h\int_{-1}^{1/3}u^*\left(y^*\right)dy^*$$

$$\frac{Q_e}{U\,h}=-\frac{3}{4}\int_{-1}^{1/3}\left(1-y^{*2}\right)dy^*+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1/3}\left(1+y^*\right)dy^*=-\frac{3}{4}\left(\frac{80}{81}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)=-\frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q^*}{U\,h}=\frac{\left|Q_{e,d}\right|}{U\,h}=\frac{8}{27}=0{,}2963$$

Miscelâneas:

O gráfico do perfil de velocidade resulta:



A máxima velocidade para a esquerda e calculada da condição de extremo local $\frac{du^*}{dy^*} = 0$, resultando $y^* = -\frac{1}{3}$ e $u^*\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$.