MAP2310 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais I

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2017 - Prof. Nelson Kuhl

$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Exercício 1 Faça os exercícios das seções 2.4 e 4.3 do livro *Equações Diferencais Aplicadas*, de Djairo Guedes de Figueiredo e Aloisio Ferreira Neves.

Exercício 2 Suponha que $\{x_n\}$, $n \geq 0$, é uma seqüência de números não negativos satisfazendo a desigualdade

$$x_{n+1} \leq (1+A)x_n + B, \quad n \geq 0$$

onde A e B são constantes positivas. Prove que

$$x_n \leq (1+A)^n x_0 + \frac{(1+A)^n - 1}{A} B, \quad n \geq 1.$$

Exercício 3 O problema de valor inicial

$$x' = -2x + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4, \quad x(0) = \frac{1}{8}$$

tem a solução exata (verifique!)

$$\varphi(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{12}t^4.$$

Use o método de Euler com passos $h = 2^{-p}$, $p = 1, 2, \ldots, 8$ para aproximar $\varphi(1)$. Verifique que não apenas $\lim_{h\to 0} \frac{e(1,h)}{h}$ existe, mas também $\lim_{h\to 0} \frac{e(1,h)}{h^2}$ parece existir. Isto contradiz a teoria?

Exercício 4 O método de Heun para equação $x' = f(t,x)$ é dado por

$$\eta_{j+1} = \eta_j + h\Phi(t_j, \eta_j, h)$$

onde

$$\Phi(t,x,h) = \frac{1}{2}\left[f(t,x) + f(t+h, x+hf(t,x))\right].$$

a) Prove que o método tem ordem de consistência 2.

b) Mostre que se f é Lipschitziana, então Φ também é. Obtenha a constante de Lipscitz para Φ em termos da constante de f.

c) Verifique numericamente a ordem de convergência do método calculando aproximações para a solução do problema $x' = -2tx^2$, $x(0) = 1$ no intervalo $[0,1]$ usando $h = 0.1$, 0.05 e 0.025, comparando os erros entre a solução exata e as aproximações nas respectivas malhas.

Exercício 5 Que condições devem satisfazer os parâmetros a, c_1 e c_2 do método Runge-Kutta de dois estágios

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, \eta_j) \\ k_2 &= f(t_j + ah, \eta_j + ahk_1) \\ \eta_{j+1} &= \eta_j + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \end{aligned}$$

para garantir que ele tenha ordem 2? Verifique que os parâmetros dos métodos do ponto médio e de Heun satisfazem estas condições.

Exercício 6 O deslocamento x em relação à posição de equilíbrio de um sistema massa-mola amortecido satisfaz a EDO de segunda ordem

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

onde $m > 0$ é a massa do objeto, $k > 0$ a constante da mola e $b \geq 0$ a constante de amortecimento.

a) Para quais valores de k/m e b/m o polinômio característico tem autovalores complexos? Autovalores repetidos? Autovalores reais distintos?

b) Ache a solução geral do sistema em cada caso.

c) Descreva o movimento da massa quando ela é liberada da posição $x = 1$ com velocidade nula em cada caso do item a).

Exercício 7 O método de Heun para equação $x' = f(t, x)$ é dado por

$$\eta_{j+1} = \eta_j + \frac{h}{2}\left[f(t_j, \eta_j) + f(t_j + h, \eta_j + hf(t_j, \eta_j))\right].$$

Partindo de $\eta_0 = 0.5$ no instante $t_0 = 0$, use o método de Heun com $h = 0.2$ para obter a aproximação em t_1 da solução do problema

$$x' = x - t^2 + 1, \quad x(0) = 0.5.$$

Exercício 8 Consisdere o sistema

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x + 0.1x^3$$

Partindo de $x(0) = 2$ e $y(0) = 0.5$, use o método do ponto médio para avançar um passo no tempo com $h = 0.02$.