UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto - FEA-RP

Matemática Financeira

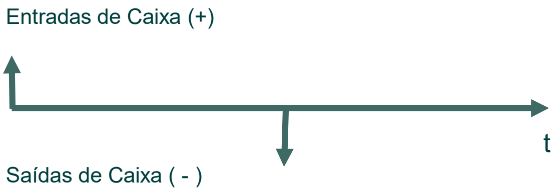
Profa. Dra.Luciana C.Siqueira Ambrozini

Conceitos gerais

Matemática Financeira

Estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo.

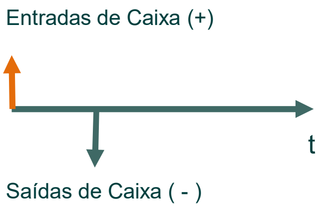
Tem o objetivo de efetuar análises e comparações dos vários fluxos de caixa de entrada e saída de dinheiro verificados em diferentes momentos.

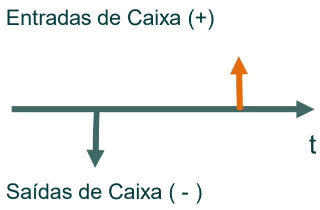


Matemática Financeira

O dinheiro é preferível hoje ou amanhã?

Postergar uma entrada de caixa gera um sacrifício.





Juros = recompensa pelo sacrifício

Matemática Financeira

Juros

- Induzem adiamento do consumo

- Permite formações de poupanças e novos investimentos na economia.

O que as taxas de juros devem refletir?

✓ Risco da operação

✓ Perda do valor de compra do capital motivada pela inflação

✓ Remuneração do capital perante às diversas oportunidades de investimento (custo de oportunidade).

Matemática Financeira

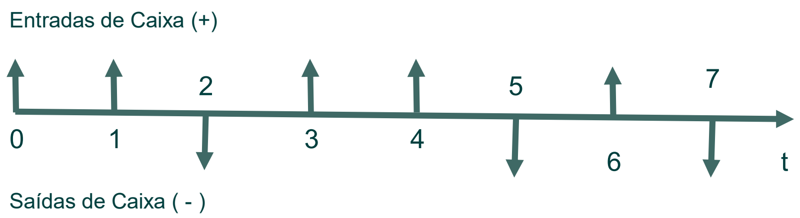
Representações das taxas de juros

Taxa percentual: 20%

Taxa unitária: 0,20

⇨ Na matemática financeira todos os cálculos são efetuados utilizando-se a taxa unitária.

Diagrama do fluxo de caixa



Matemática Financeira

Regras básicas

Tanto o prazo da operação como a taxa de juros devem necessariamente estar expressos na mesma unidade de tempo.

Exemplo:

Uma caderneta de poupança oferece 2% de juros ao mês e os rendimentos creditados mensalmente.

Prazo da taxa e período de capitalização são coincidentes

Uma caderneta de poupança oferece 12% de juros ao **ano** e os rendimentos são creditados **mensalmente**.

Prazo da taxa e período de capitalização **NÃO** são coincidentes

Matemática Financeira

Regras básicas

Exemplo: Uma caderneta de poupança oferece 12% de juros ao **ano** e os rendimentos são creditados **mensalmente**.

Prazo da taxa e período de capitalização **NÃO** são coincidentes

Conversão <u>juros</u> <u>simples</u> = média aritmética

12% a.a. / 12 meses = 1% a.m.

Matemática Financeira

Critérios (regimes) de capitalização de juros

Demonstram como os juros são formados e sucessivamente incorporados ao capital no decorrer do tempo.

Regime de capitalização simples

- Comporta-se como a progressão aritmética.
- Os juros crescem de forma linear ao longo do tempo.
- Os juros incidem sobre o capital inicial da operação (aplicação ou empréstimo)

Matemática Financeira

Exemplo: Admita um empréstimo de R$ 1.000,00 pelo prazo de 5 anos, pagando-se juros simples de 10% a.a.

Ano	Saldo no início de cada ano	Juros apurados para cada ano	Saldo devedor ao final de cada ano	Crescimento anual do saldo devedor
Início ano 1	-	-	1.000	-
Fim ano 1	1.000	0,10 x 1.000 = 100	1.100	100
Fim ano 2	1.100	0,10 x 1.000 = 100	1.200	100
Fim ano 3	1.200	0,10 x 1.000 = 100	1.300	100
Fim ano 4	1.300	0,10 x 1.000 = 100	1.400	100
Fim ano 5	1.400	0,10 x 1.000 = 100	1.500	100

Juros variam linearmente; custo da dívida = 5 anos x 10%a.a. = 50%

Conversão da taxa em termos mensais = 10% a.a. / 12 meses = 0,8333%

Matemática Financeira

Exercício

Admita uma aplicação de R$ 3.000,00 pelo prazo de 5 anos, recebendo-se juros simples de 11% a.a.

a) Calcule o saldo no início de cada ano; os juros apurados para cada ano; o saldo credor ao final de cada ano; e o crescimento do saldo credor.

b) Qual o custo total da dívida?

c) Considerando-se juros simples, qual seria a taxa mensal desta aplicação?

Matemática Financeira

Resolução

Ano	Saldo no início de cada ano	Juros apurados para cada ano	Saldo credor ao final de cada ano	Crescimento anual do saldo credor
Início ano 1	-	-	3.000	-
Fim ano 1	3.000	0,11 x 3.000 = 330	3.330	330
Fim ano 2	3.330	0,11 x 3.000 = 330	3.660	330
Fim ano 3	3.660	0,11 x 3.000 = 330	3.990	330
Fim ano 4	3.990	0,11 x 3.000 = 330	4.320	330
Fim ano 5	4.320	0,11 x 3.000 = 330	4.650	330

Juros variam linearmente; custo da dívida = 5 anos x 11%a.a. = 55%

Conversão da taxa em termos mensais = 11% a.a. / 12 meses = 0,9166%

Matemática Financeira

Regime de capitalização composta

- Incorpora ao capital os juros referentes a cada período

+

- Juros sobre os juros acumulados até o momento anterior

- Tem o comportamento equivalente à uma progressão geométrica

- Os juros incidem sobre o saldo apurado no início do período correspondente (não unicamente sobre o capital inicial).

http://exame.abril.com.br/seu-dinheiro/onde-investir-o-dinheiro-das-contas-inativas-do-fgts/

Matemática Financeira

Exemplo: Admita um empréstimo de R$ 1.000,00 pelo prazo de 5 anos, pagando-se juros compostos de 10% a.a.

Ano	Saldo no início de cada ano	Juros apurados para cada ano	Saldo devedor ao final de cada ano
Início ano 1	-	-	1.000,00
Fim ano 1	1.000	0,10 x 1.000 = 100,00	1.100,00
Fim ano 2	1.100	0,10 x 1.100 = 110,00	1.210,00
Fim ano 3	1.210	0,10 x 1.210 = 121,00	1.331,00
Fim ano 4	1.331	0,10 x 1.331 = 133,10	1.464,10
Fim ano 5	1.464,10	0,10 x 1.464,10 = 146,41	1.610,51

Os juros incidem sobre o total existente no início de cada ano (ou cada período)

Matemática Financeira

Comparação entre os dois sistemas de capitalização

Período	Capitalização Simples		Capitalização Composta		Diferença Composta-Simples	
	Juros anuais ($)	Saldo devedor	Juros anuais ($)	Saldo devedor	Juros anuais ($)	Saldo devedor
Início ano 1	-	1.000		1.000,00		
Fim ano 1	100	1.100	100,00	1.100,00	Sem diferença	Sem diferença
Fim ano 2	100	1.200	110,00	1.210,00	10,00	10,00
Fim ano 3	100	1.300	121,00	1.331,00	21,00	31,00
Fim ano 4	100	1.400	133,10	1.464,10	33,10	64,10
Fim ano 5	100	1.500	146,41	1.610,51	46,41	110,51

No primeiro período é indiferente o uso de capitalização simples ou composta.

Matemática Financeira

Fórmulas de juros simples

Cálculo do valor dos juros

$J = C \times i \times n$

Variações da fórmula

$C = \frac{J}{i \times n}$

$i = \frac{J}{C \times n}$

$n = \frac{J}{C \times i}$

Matemática Financeira

Exemplo:

Um capital de R$ 80.000 é aplicado à taxa de 2,5% ao mês durante um trimestre. Pede-se determinar o valor dos juros acumulados neste período.

$$\boxed{J = C \times i \times n}$$

Taxa = 2,5% (0,025) Capital = R$ 80.000 Prazo = 3 meses

J = 80.000 x 0,025 x 3
J = R$ 6.000

Matemática Financeira

Exercícios:

1) Um negociante tomou um empréstimo pagando uma taxa de juros simples de 6% ao mês durante nove meses. Ao final deste período, calculou em R$ 270.000 o total de juros incorridos na operação. Determinar o valor do empréstimo.

2) Um capital de R$ 40.000 foi aplicado num fundo de poupança por 11 meses, produzindo um rendimento financeiro de R$ 9.680. Pede-se apurar a taxa de juros oferecida por esta operação.

Matemática Financeira

Exercícios:

3) Uma aplicação de R$ 250.000, rendendo uma taxa de juros de 1,8% ao mês produz, ao final de determinado período, juros no valor de R$ 27.000. Calcular o prazo da aplicação.

4) Qual o capital que produz R$ 18.000 de juros simples, à taxa de 3% ao mês, pelo prazo de:

a) 60 dias
b) 80 dias
c) 3 meses e 20 dias

Matemática Financeira

Fórmulas de juros simples

Montante: capital + valor dos juros acumulados

$\boxed{M = C + \mathbf{J}} \longrightarrow \boxed{\mathbf{J} = C \times i \times n}$

$\downarrow$

$\boxed{M = C + \mathbf{C \times i \times n}}$

$\downarrow$

$\boxed{M = C\,(1 + i \times n)}$ Ou $\boxed{C = \frac{M}{(1 + i \, x \, n)}}$

Matemática Financeira

Exemplo:

Uma pessoa aplica R$ 18.000 à taxa de 1,5% ao mês durante 8 meses. Determinar o valor acumulado ao final deste período.

$$\boxed{M = C\,(1 + i \times n)}$$

Taxa = 1,5% (0,015) Capital = R$ 18.000 Prazo = 8 meses

M = 18.000 (1 + 0,015 x 8)
M = 18.000 x 1,12 = R$ 20.160

Matemática Financeira

Exercícios:

Uma dívida de R$ 900.000 irá vencer em 4 meses. O credor está oferecendo um desconto de 7% ao mês caso o devedor deseje antecipar o pagamento para hoje. Calcular o valor que o devedor pagaria se antecipasse a liquidação.

M = R$ 900.000; n= 4 meses; i = 7% (0,07); C= ???

C = (900.000)/ (1 + 0,07 x 4) = 900.000/ 1,28 = 703.125

Matemática Financeira

Equivalência financeira

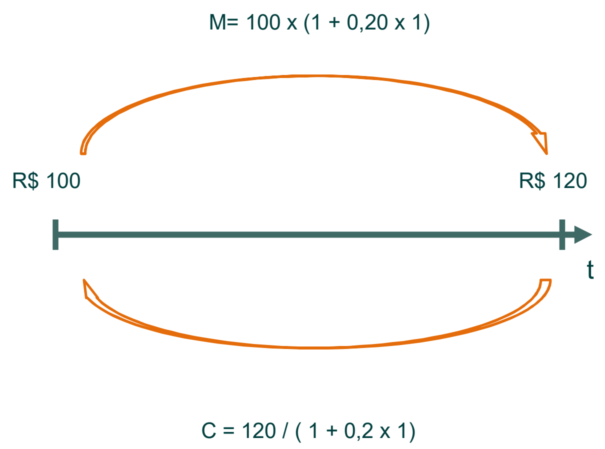
Dois ou mais capitais representativos de uma certa data dizem-se equivalentes quando, a uma certa taxa de juros, produzem resultados iguais numa data comum.

Exemplo:
R$ 120 daqui um ano

Equivalem a R$ 100 hoje

Considerado uma taxa de 20%

Matemática Financeira



Matemática Financeira

Equivalência financeira

Na questão da equivalência financeira em juros simples, é importante ressaltar que os prazos não podem ser desmembrados.

Isto se dá uma vez que, dois capitais equivalentes, ao fracionar seus prazos, deixam de produzir o mesmo resultado na data focal pelo critério de juros simples.

Matemática Financeira

Exemplo:

Admita R$ 100, à taxa de 20%, ao final de 2 anos.

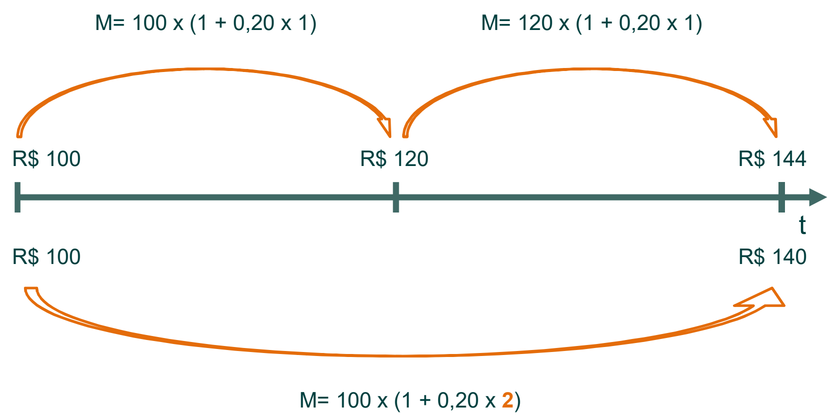
Este processo não pode ser fracionado em juros simples!

Por exemplo, apurar o montante ao final do 1º ano e, a partir daí, chegar ao montante do 2º ano.

↑

Juros compostos = juros sobre juros

Matemática Financeira



Matemática Financeira

Assim, a equivalência de capitais em juros simples é dependente da data de comparação escolhida.

Exemplo:

Admita que A deve a B os seguintes pagamentos:

R$ 50.000 de hoje a 4 meses

R$ 80.000 de hoje a 8 meses

Nova proposta de pagamento

R$ 10.000 hoje
R$ 30.000 de hoje a 6 meses
Restante no final do ano

Taxa = 2% a.m.

Matemática Financeira

Para que a nova proposta seja equivalente, os pagamentos devem produzir os mesmos resultados em qualquer data comum (data focal).

Data focal do exemplo: hoje (0)

R$ 50.000 / (1+0,02 x 4) + R$ 80.000 / (1+0,02 x 8)

=

R$ 10.000 + R$ 30.000 / (1+0,02 x 6) + R$ X / (1+0,02 x 12)

R$ 115.261,80 = R$ 36.785,70 + X / 1,24

X = 97.310,40

Matemática Financeira

Suponha que B resolva definir no mês 12 a data focal para determinar o valor a ser pago:

Data focal do exemplo: 12

R$ 50.000 (1+0,02 x 8) + R$ 80.000 (1+0,02 x 4)

=

R$ 10.000 (1+0,02 x12) + R$ 30.000 (1+0,02 x 6) + X

R$ 144.400 = R$ 46.000 + X

X = 98.400

Matemática Financeira

Exercício:

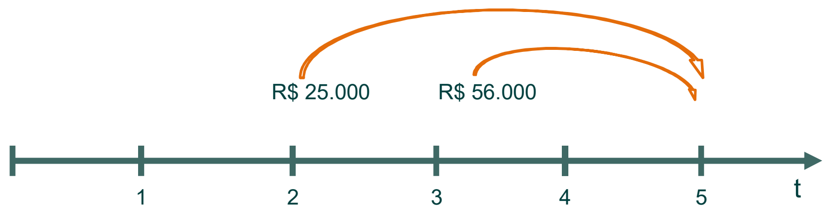
Uma pessoa deve dois títulos no valor de R$ 25.000 e R$ 56.000 cada. O primeiro título vence de hoje a 2 meses, e o segundo um mês após.

O devedor deseja propor a substituição destas duas obrigações por um único pagamento ao final do 5º mês.

Considerando uma taxa de 3% ao mês a taxa corrente de juros simples, determinar o valor deste pagamento único.

Matemática Financeira

Exercício:



M5 = 25.000 x (1 +0,03 x 3) + 56.000 x (1+0,03 x2)

M5 = 27.250 + 59.360 = 86.610