Exercício 1

Para cada um dos experimentos abaixo, descreva o espaço amostral e dê o número de seus elementos.

(a) Numa linha de produção conta-se o número de peças defeituosas num intervalo de uma hora.

(b) Um fichário com dez nomes contém três nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha, até o último nome de mulher ser selecionado, e anota-se o número de fichas selecionadas.

(c) De uma população de diabéticos, três pessoas são selecionadas ao acaso com reposição e anota-se o sexo de cada um delas.

(d) Uma amostra de água é retirada de um rio e observa-se a concentração de oxigênio dissolvido na água (mg/ml).

(e) De um grupo de cinco pessoas A, B, C, D, E, sorteiam-se duas, uma após outra, com reposição, e anota-se a configuração formada.

(f) Como ficaria o espaço amostral do item (e) se as retiradas fossem sem reposição?

Solução

(a) $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$

(b) Ω={3,4,5,6,7,8,9,10}, 8 elementos.

(c) Ω={FFF, FFM, FMF, MFF, FMM, MFM, MMF, MMM}, onde F representa o sexo feminino e M o masculino. 8 elementos

(d) Ω=$\{c : c \geq 0\}$, tal que c é a concentração de oxigênio dissolvido na água (mg/ml).

(e) Ω={AA, AB, AC, AD, AE, BA, BB, BC, BD, BE, CA, CB, CC, CD, CE, DA, DB, DC, DD, DE, EA, EB, EC, ED, EE.}, 25 elementos

(f) Ω={AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED.}, 20 elementos.

Exercício 2

A senhora Y, quando tem dores de cabeça, escolhe ao acaso um dentre dois analgésicos. Se um deles tem probabilidade 3/4 de aliviar a dor e o outro tem probabilidade 2/3, qual é a probabilidade de que passe a dor de cabeça da senhora Y?

Solução

Defina os eventos,
X={Passar a dor de cabeça da senhora Y}
A={Escolher o analgésico que tem probabilidade 3/4 de aliviar a dor de cabeça}
B={Escolher o analgésico que tem probabilidade 2/3 de aliviar a dor de cabeça}
A probabilidade de que passe a dor de cabeça da senhora Y é,

$$P(X) = P(X \cap A) + P(X \cap B) = P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{2}{6} = \frac{18+16}{48} = \frac{34}{48}.$$

Exercício 3

Considere que as probabilidades relacionadas aos eventos G: ”gostar de gatos”e A: ”gostar de cachorros”sejam $P(\mathrm{G}) = 1/4$; $P(\mathrm{A}|\mathrm{G}) = 1/2$ e $P(\mathrm{G}|\mathrm{A}) = 1/4$. Responda:

(a) Os eventos G e A são mutuamente exclusivos? Justifique.

(b) Os eventos G e A são independentes? Justifique.

(c) Calcule a probabilidade de não gostar de gatos dado que gosta de cachorros.

(d) Calcule a probabilidade de não gostar de gatos e não gostar de cachorros.

Solução:

a) Observe que

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{G}) = P(\mathrm{A}|\mathrm{G})P(\mathrm{G}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq 0.$$

De modo que, $\mathrm{A} \cap \mathrm{G} \neq \emptyset$. Portanto, A e G não são mutuamente exclusivos.

b) Note que,

$$P(\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{G})}{P(\mathrm{G}|\mathrm{A})} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2} > 0.$$

Temos, $P(\mathrm{G}|\mathrm{A}) = P(\mathrm{G})$, $P(\mathrm{A}) > 0$, logo G e A são independentes.

c) Defina o evento, G^c={Não gostar de gatos.}

Resultado 1 *Se A e G são independentes, $P(A) > 0$ então A e G^c são independentes.*
De fato,

$$P(G^c|A) = \frac{P(A \cap G^c)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap G)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A)P(G)}{P(A)} = 1 - P(G) = P(G^c)$$

Note item (b) vimos que A e G são independentes, portanto, do resultado anterior segue que G^c e A também são independentes e assim,

$$P(G^c|A) = P(G^c) = 1 - P(G) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

d) Defina o evento, A^c={Não gostar de cachorros.} Como os eventos A e G^c são independentes (item c) segue que A^c e G^c também são independentes e assim,

$$P(A^c \cap G^c) = P(A^c)P(G^c) = (1 - P(A))(1 - P(G)) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

Outra forma,

$$\begin{aligned} P(A^c \cap G^c) &= 1 - P((A^c \cap G^c)^c) = 1 - P(A \cup G) = 1 - (P(A) + P(G) - P(A \cap G)) \\ &= 1 - (1/4 + 1/2 - 1/8) = 3/8. \end{aligned}$$

Uma vez que A e G são independentes (como visto anteriormente) e temos que

$$P(A \cap G) = P(A)P(G) = 1/8.$$

Exercício 4

Em uma prova cairam dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 erraram apenas um problema. Qual é a pro-babilidade de que um aluno, escolhido ao acaso:

(a) Não tenha acertado nenhum problema?

(b) Tenha acertado apenas o segundo problema

Solução

- Observe que,
  - Se 132 alunos acertaram o primeiro problema e 120 acertaram os dois então 12 alunos acertaram apenas o primeiro problema.
  - Note que dizer que 12 alunos acertaram apenas o primeiro problema significa dizer que 12 alunos erraram apenas o segundo problema. Como 86 alunos erraram o segundo problema significa que 74 estudantes erraram os dois problemas
  - Como 54 alunos erraram apenas um problema e 12 alunos erraram apenas o segundo problema logo, 42 alunos erraram apenas o primeiro problema.
  - Logo, 120 alunos acertaram os dois problemas, 74 alunos erraram os dois, 12 acertaram apenas o primeiro problema e 42 acertaram apenas o segundo problema então existe um total de 120+74+12+42=248 estudantes.

a) Defina o evento, E={O estudante não acertou nenhum problema}

$$P(E) = \frac{74}{248}$$

Outra forma: Defina os eventos, A={O estudante acertou os dois problemas}, B={O estudante errou apenas um problema.} A probabilidade do estudante não ter acertado nenhum problema é dada por,

$$P(E) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{120}{248} - 54248 = \frac{248 - 120 - 54}{248} = \frac{74}{248}$$

b) Defina C={Acertou apenas o segundo problema}

$$P(C) = \frac{42}{248}$$

Exercício 5

Os 10000 estudantes da Universidade, cuja área de estudo e sexo foram registradas, responderam à seguinte questão: Você é a favor, contrário, ou não tem opinião sobre a "democratização do acesso à Universidade para estudantes da Escola Pública?"Os resumos das respostas estão no quadro:

Área	Sexo	Opinião		
		Sim	não	nto
Exatas	masc	550	1000	550
	fem	350	500	750
Humanas	masc	100	1000	750
	fem	400	600	550
Biológicas	masc	280	550	570
	fem	220	850	430

Se dentre os 10000 alunos escolhemos um aleatoriamente, qual é a probabilidade de:

(a) Ser do sexo feminino e ser favorável;

(b) Ser contrário, sabendo-se que é da área das exatas;

(c) Ser do sexo feminino e da área das biológicas, sabendo-se que não tem opinião.

Solução

O espaço amostral é dado por, Ω={10000 estudantes da universidade.}

a) Defina os eventos, F={O estudante entrevistado é do sexo feminino}, S={O estudante entrevistado é favorável a democratização do acesso à universidade para estudantes da escola pública.}

$$P(\mathrm{F} \cap \mathrm{S}) = \frac{350 + 400 + 220}{10000} = \frac{970}{10000} = 0,097$$

b) Defina os eventos, E={O estudante entrevistado é da área de exatas}, C={O estudante entrevistado é contrário democratização do acesso à universidade para estudantes da escola pública.}

$$P(\mathrm{C}|\mathrm{E}) = \frac{P(\mathrm{C} \cap \mathrm{E})}{P(\mathrm{E})} = \frac{1500/10000}{3700/10000} = \frac{15}{37} = 0.4054.$$

c) Defina os eventos, B={O estudante entrevistado é da área de biológicos}, N={O estudante entrevistado não tem opinião}

$$P(\mathrm{F} \cap \mathrm{B}|\mathrm{N}) = \frac{P(\mathrm{F} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{N})}{P(\mathrm{N})} = \frac{430/10000}{3600/10000} = \frac{43}{360} = 0.1194$$