Variáveis Aleatórias Discretas

Bacharelado em Economia - FEA - Noturno

1º Semestre 2017

Profs. Gilberto A. Paula e Vanderlei C. Bueno

Sumário

1. Objetivos da Aula
2. Variável Aleatória Discreta
3. Distribuição de Variável Aleatória Discreta
4. Esperança Matemática
5. Variância
6. Propriedades
7. Distribuição de Bernoulli
8. Distribuição Binomial
9. Distribuição Geométrica
10. Distribuição de Poisson

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos o conceito de Variável Aleatória Discreta e as definições de

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos o conceito de Variável Aleatória Discreta e as definições de

- função de probabilidade

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos o conceito de Variável Aleatória Discreta e as definições de

- função de probabilidade
- função de distribuição acumulada

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos o conceito de Variável Aleatória Discreta e as definições de

- função de probabilidade
- função de distribuição acumulada
- valor médio (ou esperança matemática)

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos o conceito de Variável Aleatória Discreta e as definições de

- função de probabilidade
- função de distribuição acumulada
- valor médio (ou esperança matemática)
- variância matemática

Objetivos da Aula

Discutiremos também as seguintes distribuições discretas:

Objetivos da Aula

Discutiremos também as seguintes distribuições discretas:

- disribuição de Bernoulli

Objetivos da Aula

Discutiremos também as seguintes distribuições discretas:

- disribuição de Bernoulli
- disribuição binomial

Objetivos da Aula

Discutiremos também as seguintes distribuições discretas:

- disribuição de Bernoulli
- disribuição binomial
- disribuição geométrica

Objetivos da Aula

Discutiremos também as seguintes distribuições discretas:

- disribuição de Bernoulli
- disribuição binomial
- disribuição geométrica
- distribuição de Poisson

Sumário

1. Objetivos da Aula
2. Variável Aleatória Discreta
3. Distribuição de Variável Aleatória Discreta
4. Esperança Matemática
5. Variância
6. Propriedades
7. Distribuição de Bernoulli
8. Distribuição Binomial
9. Distribuição Geométrica
10. Distribuição de Poisson

Definição

Variável aleatória é qualquer função definida sobre o espaço amostral Ω que atribui um valor real a cada elemento do espaço amostral.

Definição

Uma variável aleatória é definida como sendo discreta quando o número de valores possíveis que a variável assume for finito ou infinito enumerável.

Exemplos

Exemplos

- n$^{\underline{o}}$ de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã

Variável Aleatória Discreta

Exemplos

- nº de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- nº de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados

Exemplos

- n$^{\underline{o}}$ de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- n$^{\underline{o}}$ de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- n$^{\underline{o}}$ de acessos a um determinado site, das 0h às 6h

Exemplos

- nº de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- nº de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- nº de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- nº de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano

Exemplos

- nº de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- nº de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- nº de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- nº de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano
- nº de consultas ao médico num determinado ano

Exemplos

- $n^{\underline{o}}$ de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- $n^{\underline{o}}$ de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- $n^{\underline{o}}$ de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- $n^{\underline{o}}$ de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano
- $n^{\underline{o}}$ de consultas ao médico num determinado ano
- $n^{\underline{o}}$ de domicílios com crianças menores de 6 anos

Exemplos

- n$^{\underline{o}}$ de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- n$^{\underline{o}}$ de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- n$^{\underline{o}}$ de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- n$^{\underline{o}}$ de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano
- n$^{\underline{o}}$ de consultas ao médico num determinado ano
- n$^{\underline{o}}$ de domicílios com crianças menores de 6 anos
- n$^{\underline{o}}$ de clientes que visitaram uma loja num determinado período

Exemplo 1

Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

Exemplo 1

Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que $\omega_1 = \{\text{cara,cara}\}$, $\omega_2 = \{\text{cara,coroa}\}$, $\omega_3 = \{\text{coroa,cara}\}$ e $\omega_4 = \{\text{coroa,coroa}\}$.

Exemplo 1

Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que $\omega_1 = \{\text{cara,cara}\}$, $\omega_2 = \{\text{cara,coroa}\}$, $\omega_3 = \{\text{coroa,cara}\}$ e $\omega_4 = \{\text{coroa,coroa}\}$.

Variável Aleatória

Se definimos a variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas, então obtemos

Exemplo 1

Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que $\omega_1 = \{\text{cara,cara}\}$, $\omega_2 = \{\text{cara,coroa}\}$, $\omega_3 = \{\text{coroa,cara}\}$ e $\omega_4 = \{\text{coroa,coroa}\}$.

Variável Aleatória

Se definimos a variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas, então obtemos

$$X(\omega_1) = 2,\ X(\omega_2) = 1,\ X(\omega_3) = 1 \text{ e } X(\omega_4) = 0.$$

Exemplo 1

Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que $\omega_1 = \{\text{cara,cara}\}$, $\omega_2 = \{\text{cara,coroa}\}$, $\omega_3 = \{\text{coroa,cara}\}$ e $\omega_4 = \{\text{coroa,coroa}\}$.

Variável Aleatória

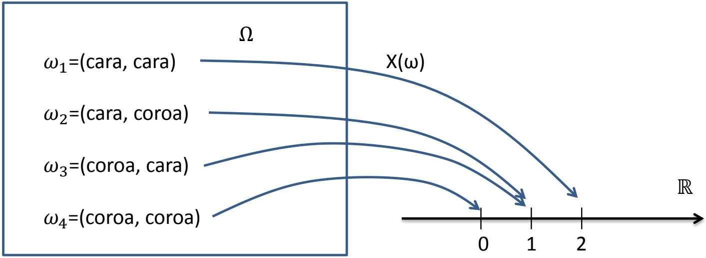
Se definimos a variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas, então obtemos

$$X(\omega_1) = 2,\ X(\omega_2) = 1,\ X(\omega_3) = 1 \text{ e } X(\omega_4) = 0.$$

Ou seja, a variável aleatória X assume os valores $X = 0, 1, 2$.

Exemplo 1

Descrição da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas



Sumário

1. Objetivos da Aula
2. Variável Aleatória Discreta
3. Distribuição de Variável Aleatória Discreta
4. Esperança Matemática
5. Variância
6. Propriedades
7. Distribuição de Bernoulli
8. Distribuição Binomial
9. Distribuição Geométrica
10. Distribuição de Poisson

Definição

Para cada elemento ω_i do espaço amostral transferimos um valor $p(X(\omega_i))$ para o intervalo $[0, 1]$.

Definição

Para cada elemento ω_i do espaço amostral transferimos um valor $p(X(\omega_i))$ para o intervalo $[0, 1]$. Se denotamos $x_i = X(\omega_i)$, então podemos definir

Definição

Para cada elemento ω_i do espaço amostral transferimos um valor $p(X(\omega_i))$ para o intervalo $[0, 1]$. Se denotamos $x_i = X(\omega_i)$, então podemos definir

$$P(X = x_i) = p(x_i).$$

Função de probabilidade

A função de probabilidade de X pode ser representada pela tabela abaixo

Função de probabilidade

A função de probabilidade de X pode ser representada pela tabela abaixo

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X = x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_k)$

Função de probabilidade

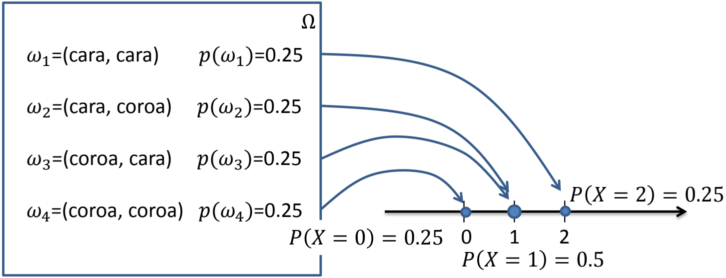
A função de probabilidade de X pode ser representada pela tabela abaixo

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X = x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_k)$

- $p(x_i) \geq 0$
- $p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_k) = 1$

Exemplo 1

Descrição do cálculo da probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas



Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

Exemplo 1

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	$0,25$	$0,50$	$0,25$

Função de distribuição acumulada

Outra maneira de definirmos a distribuição de uma variável aleatória é através da função de distribuição acumulada, definida por

Função de distribuição acumulada

Outra maneira de definirmos a distribuição de uma variável aleatória é através da função de distribuição acumulada, definida por

$$F(x) = P(X \leq x),$$

Função de distribuição acumulada

Outra maneira de definirmos a distribuição de uma variável aleatória é através da função de distribuição acumulada, definida por

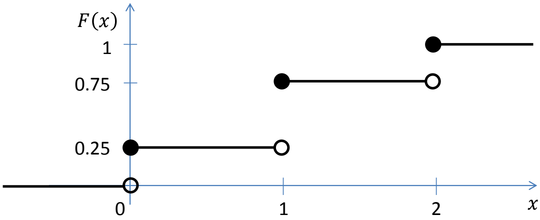
$$F(x) = P(X \leq x),$$

em que x é um número real e $F(x)$ pertence ao intervalo $[0, 1]$.

Exemplo 1

Descrição da função de distribuição acumulada *F(x) = P(X ≤ x)* da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas

x	0	1	2
P(X=x)	**0,25**	**0,50**	**0,25**



Função de distribuição acumulada

Portanto, a função de distribuição acumulada da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

Função de distribuição acumulada

Portanto, a função de distribuição acumulada da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0,25 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0,75 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Exemplo 2

Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino).

Exemplo 2

Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino). O espaço amostral fica dado por

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}.$$

Exemplo 2

Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino). O espaço amostral fica dado por

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}.$$

Para a variável aleatória X: número de crianças do sexo masculino temos a relação

Exemplo 2

Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino). O espaço amostral fica dado por

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}.$$

Para a variável aleatória X: número de crianças do sexo masculino temos a relação

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	3	2	2	2	1	1	1	0

Exemplo 2

Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino). O espaço amostral fica dado por

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}.$$

Para a variável aleatória X: número de crianças do sexo masculino temos a relação

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	3	2	2	2	1	1	1	0

Portanto, X assume os valores $X = 0, 1, 2, 3$.

Exemplo 2

Para a variável aleatória Y: número de crianças do sexo feminino temos a relação

Exemplo 2

Para a variável aleatória Y: número de crianças do sexo feminino temos a relação

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	0	1	1	1	2	2	2	3

Exemplo 2

Para a variável aleatória Y: número de crianças do sexo feminino temos a relação

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	0	1	1	1	2	2	2	3

Portanto, Y assume os valores $Y = 0, 1, 2, 3$.

Exemplo 2

Para a variável aleatória Y: número de crianças do sexo feminino temos a relação

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	0	1	1	1	2	2	2	3

Portanto, Y assume os valores $Y = 0, 1, 2, 3$.

Assim, para um mesmo espaço amostral podemos definir mais de uma variável aleatória.

Exemplo 3

Descrição

Joga-se um dado equilibrado e observa-se a face superior.

Exemplo 3

Descrição

Joga-se um dado equilibrado e observa-se a face superior. Considere a variável aleatória X: número da face superior.

Descrição

Joga-se um dado equilibrado e observa-se a face superior. Considere a variável aleatória X: número da face superior.

A função de probabilidade de X fica dada por

Exemplo 3

Descrição

Joga-se um dado equilibrado e observa-se a face superior. Considere a variável aleatória X: número da face superior.

A função de probabilidade de X fica dada por

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemplo 3

Descrição

Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores.

Exemplo 3

Descrição

Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores. Considere a variável aleatória X: soma das faces superiores.

Exemplo 3

Descrição

Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores. Considere a variável aleatória X: soma das faces superiores.

A função de probabilidade de X fica dada por

Exemplo 3

Descrição

Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores. Considere a variável aleatória X: soma das faces superiores.

A função de probabilidade de X fica dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Sumário

1. Objetivos da Aula
2. Variável Aleatória Discreta
3. Distribuição de Variável Aleatória Discreta
4. Esperança Matemática
5. Variância
6. Propriedades
7. Distribuição de Bernoulli
8. Distribuição Binomial
9. Distribuição Geométrica
10. Distribuição de Poisson

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de valor médio, ou valor esperado, ou esperança matemática de X o valor

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de valor médio, ou valor esperado, ou esperança matemática de X o valor

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots + x_k p(x_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i),
\end{aligned}
$$

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de valor médio, ou valor esperado, ou esperança matemática de X o valor

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots + x_k p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i), \end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação $\mu = \mathrm{E}(X)$.

Exemplo 1

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

Exemplo 1

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	$0,25$	$0,50$	$0,25$

Exemplo 1

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	$0,25$	$0,50$	$0,25$

A esperança matemática de X fica então dada por

Exemplo 1

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

A esperança matemática de X fica então dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0 \times 0,25 + 1 \times 0,50 + 2 \times 0,25 \\ &= 1,0. \end{aligned}$$

Exemplo 1

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

A esperança matemática de X fica então dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,25 + 1 \times 0,50 + 2 \times 0,25 \\ &= 1,0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, 1 cara.

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: soma das faces superiores é dada por

Exemplo 3

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: soma das faces superiores é dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exemplo 3

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: soma das faces superiores é dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança matemática de X fica então dada por

Exemplo 3

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: soma das faces superiores é dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança matemática de X fica então dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7,0. \end{aligned}$$

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: soma das faces superiores é dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança matemática de X fica então dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+\cdots+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36}=7,0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, soma 7.

Sumário

1. Objetivos da Aula
2. Variável Aleatória Discreta
3. Distribuição de Variável Aleatória Discreta
4. Esperança Matemática
5. Variância
6. Propriedades
7. Distribuição de Bernoulli
8. Distribuição Binomial
9. Distribuição Geométrica
10. Distribuição de Poisson

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X - \mu)^2$, ou seja

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X - \mu)^2$, ou seja

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + \cdots + (x_k - \mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p(x_i), \end{aligned}$$

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X - \mu)^2$, ou seja

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + \cdots + (x_k - \mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p(x_i), \end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação $\sigma^2 = \text{Var}(X)$.

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X-\mu)^2$, ou seja

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= (x_1-\mu)^2 p(x_1) + \cdots + (x_k-\mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (x_i-\mu)^2 p(x_i),\end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Desvio Padrão

O desvio padrão de X é definido por

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X - \mu)^2$, ou seja

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + \cdots + (x_k - \mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p(x_i), \end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Desvio Padrão

O desvio padrão de X é definido por

$$\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Fórmula Alternativa

A variância de X pode, alternativamente, ser expressa na forma

Fórmula Alternativa

A variância de X pode, alternativamente, ser expressa na forma

$$\text{Var}(X) = \text{E}(X^2) - \mu^2,$$

Fórmula Alternativa

A variância de X pode, alternativamente, ser expressa na forma

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2,$$

em que

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) &= x_1^2 p(x_1) + \cdots + x_k^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i^2 p(x_i).\end{aligned}$$

Cálculo Variância

Para a variável X: número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

Cálculo Variância

Para a variável X: número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Cálculo Variância

Para a variável X: número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

Cálculo Variância

Para a variável X: número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 1,50 - (1,0)^2 = 1,50 - 1,0 = 0,50.$$

Exemplo 1

Cálculo Variância

Para a variável X: número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 1,50 - (1,0)^2 = 1,50 - 1,0 = 0,50.$$

E o desvio padrão

$$\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{0,50} \cong 0,707.$$

Cálculo Variância

Para a variável X: soma das faces superiores obtemos

Cálculo Variância

Para a variável X: soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83. \end{aligned}$$

Cálculo Variância

Para a variável X: soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

Exemplo 3

Cálculo Variância

Para a variável X: soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 54,83 - (7,0)^2 = 54,83 - 49,0 = 5,83.$$

Exemplo 3

Cálculo Variância

Para a variável X: soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 54,83 - (7,0)^2 = 54,83 - 49,0 = 5,83.$$

E o desvio padrão

$$\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{5,83} \cong 2,415.$$

Sumário

1. Objetivos da Aula
2. Variável Aleatória Discreta
3. Distribuição de Variável Aleatória Discreta
4. Esperança Matemática
5. Variância
6. Propriedades
7. Distribuição de Bernoulli
8. Distribuição Binomial
9. Distribuição Geométrica
10. Distribuição de Poisson

Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória X assume um único valor a (distribuição degenerada em a), então $P(X = a) = p(a) = 1$.

Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória X assume um único valor a (distribuição degenerada em a), então $P(X = a) = p(a) = 1$. Temos para este caso as seguintes propriedades:

Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória X assume um único valor a (distribuição degenerada em a), então $P(X = a) = p(a) = 1$. Temos para este caso as seguintes propriedades:

- $\mathrm{E}(X) = a \times p(a) = a$

Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória X assume um único valor a (distribuição degenerada em a), então $P(X = a) = p(a) = 1$. Temos para este caso as seguintes propriedades:

- $\mathrm{E}(X) = a \times p(a) = a$
- $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - a^2$

Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória X assume um único valor a (distribuição degenerada em a), então $P(X = a) = p(a) = 1$. Temos para este caso as seguintes propriedades:

- $E(X) = a \times p(a) = a$
- $Var(X) = E(X^2) - a^2$
  $= a^2 \times p(a) - a^2$

Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória X assume um único valor a (distribuição degenerada em a), então $P(X = a) = p(a) = 1$. Temos para este caso as seguintes propriedades:

- $E(X) = a \times p(a) = a$
- $\text{Var}(X) = E(X^2) - a^2$
  $= a^2 \times p(a) - a^2$
  $= a^2 - a^2$

Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória X assume um único valor a (distribuição degenerada em a), então $P(X = a) = p(a) = 1$. Temos para este caso as seguintes propriedades:

- $\mathrm{E}(X) = a \times p(a) = a$
- $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - a^2$
  $= a^2 \times p(a) - a^2$
  $= a^2 - a^2$
  $= 0$

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

- $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(aX + b)$

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

- $E(Y)$ = $E(aX + b)$
  = $E(aX) + E(b)$

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$
  $= E(aX) + E(b)$
  $= aE(X) + b$

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$
  $= E(aX) + E(b)$
  $= aE(X) + b$
- $\text{Var}(Y) = \text{Var}(aX + b)$

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

- $\text{E}(Y) = \text{E}(aX + b)$
  $= \text{E}(aX) + \text{E}(b)$
  $= a\text{E}(X) + b$
- $\text{Var}(Y) = \text{Var}(aX + b)$
  $= \text{Var}(aX) + \text{Var}(b)$

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$
  $= E(aX) + E(b)$
  $= aE(X) + b$
- $Var(Y) = Var(aX + b)$
  $= Var(aX) + Var(b)$
  $= Var(aX) + 0$

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$
  $= E(aX) + E(b)$
  $= aE(X) + b$
- $\text{Var}(Y) = \text{Var}(aX + b)$
  $= \text{Var}(aX) + \text{Var}(b)$
  $= \text{Var}(aX) + 0$
  $= a^2\text{Var}(X)$

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$
  $= E(aX) + E(b)$
  $= aE(X) + b$
- $Var(Y) = Var(aX + b)$
  $= Var(aX) + Var(b)$
  $= Var(aX) + 0$
  $= a^2 Var(X)$
- $DP(Y) = |a| DP(X)$

Sumário

1 Objetivos da Aula

2 Variável Aleatória Discreta

3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta

4 Esperança Matemática

5 Variância

6 Propriedades

7 Distribuição de Bernoulli

8 Distribuição Binomial

9 Distribuição Geométrica

10 Distribuição de Poisson

Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

Função de probabilidade

Seja X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso p, em que $X = 1$ se o resultado é sucesso e $X = 0$ se o resultado é fracasso. Então, a função de probabilidade de X fica dada por

Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

Função de probabilidade

Seja X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso p, em que $X = 1$ se o resultado é sucesso e $X = 0$ se o resultado é fracasso. Então, a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{(1-x)},$$

em que $x = 0, 1$.

Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

Função de probabilidade

Seja X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso p, em que $X = 1$ se o resultado é sucesso e $X = 0$ se o resultado é fracasso. Então, a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{(1-x)},$$

em que $x = 0, 1$. Denotamos $X \sim \text{Be}(p)$.

Exemplos

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não
- conclusão de uma corrida para pedestres, sim ou não

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não
- conclusão de uma corrida para pedestres, sim ou não
- pressão arterial de um paciente, normal ou alterada

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não
- conclusão de uma corrida para pedestres, sim ou não
- pressão arterial de um paciente, normal ou alterada
- hábito de práticas esportivas, sim ou não

Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Variância

A variância de X é definida por $\text{Var}(X) = E(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$. Temos que

Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) \\ &= 0 \times (1-p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Variância

A variância de X é definida por Var(X) = E(X^2) - $[\mathrm{E}(X)]^2$. Temos que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) \\ &= 0 \times (1-p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) \\ &= 0 \times (1-p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Variância

A variância de X é definida por Var(X) = E(X^2) - $[\mathrm{E}(X)]^2$. Temos que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) \\ &= 0 \times (1-p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p)$ e portanto $\mathrm{DP}(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Sumário

1. Objetivos da Aula
2. Variável Aleatória Discreta
3. Distribuição de Variável Aleatória Discreta
4. Esperança Matemática
5. Variância
6. Propriedades
7. Distribuição de Bernoulli
8. Distribuição Binomial
9. Distribuição Geométrica
10. Distribuição de Poisson

Motivação

Um dado é lançado 3 vezes de forma independente. Qual a probabilidade de obter a face 5 duas vezes?

Motivação

Um dado é lançado 3 vezes de forma independente. Qual a probabilidade de obter a face 5 duas vezes?

Denotando S como sendo sucesso (obter face 5 num lançamento) e F como sendo fracasso, o espaço amostral pode ser representado por

$$\Omega = \{(SSS), (SSF), (SFS), (FSS), (SFF), (FSF), (FFS), (FFF)\}.$$

Motivação

Um dado é lançado 3 vezes de forma independente. Qual a probabilidade de obter a face 5 duas vezes?

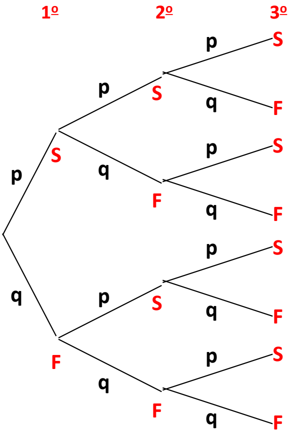
Denotando S como sendo sucesso (obter face 5 num lançamento) e F como sendo fracasso, o espaço amostral pode ser representado por

$$\Omega = \{(SSS), (SSF), (SFS), (FSS), (SFF), (FSF), (FFS), (FFF)\}.$$

Vamos considerar a variável aleatória X: número de sucessos nos três lançamentos, sendo $p = P(\mathrm{S})$ e $q = 1 - p = P(\mathrm{F})$ em cada lançamento.

Motivação

Diagrama de Árvore



Ω	Prob	X
(SSS)	p^3	3
(SSF)	p^2q	2
(SFS)	p^2q	2
(SFF)	pq^2	1
(FSS)	p^2q	2
(FSF)	pq^2	1
(FFS)	pq^2	1
(FFF)	q^3	0

Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de sucessos nos três lançamentos fica dada por

Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de sucessos nos três lançamentos fica dada por

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de sucessos nos três lançamentos fica dada por

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Assim, a função de probabilidade de X pode ser expressa na forma

Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de sucessos nos três lançamentos fica dada por

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Assim, a função de probabilidade de X pode ser expressa na forma

$$P(X = x) = \binom{3}{x} p^x (1 - p)^{(3-x)},$$

para $x = 0, 1, 2, 3$.

Distribuição de probabilidade

Em particular, para um dado equilibrado $p = \frac{1}{6}$ obtemos

Distribuição de probabilidade

Em particular, para um dado equilibrado $p = \frac{1}{6}$ obtemos

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$0,5787$	$0,3472$	$0,0694$	$0,0046$

Distribuição de probabilidade

Em particular, para um dado equilibrado $p = \frac{1}{6}$ obtemos

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$0,5787$	$0,3472$	$0,0694$	$0,0046$

Assim, a probabilidade da face 5 aparecer duas vezes (para um dado equilibrado) fica dada por $P(X = 2) = 0,0694$.

Definição

A variável aleatória X correspondente ao número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes (no sentido probabilístico) e com mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio, tem distribuição binomial com parâmetros n e p.

Definição

A variável aleatória X correspondente ao número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes (no sentido probabilístico) e com mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio, tem distribuição binomial com parâmetros n e p.

A função de probabilidade de X é expressa na forma

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)},$$

em que $x = 0, 1, \ldots, n$.

Definição

A variável aleatória X correspondente ao número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes (no sentido probabilístico) e com mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio, tem distribuição binomial com parâmetros n e p.

A função de probabilidade de X é expressa na forma

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)},$$

em que $x = 0, 1, \ldots, n$. Denotamos $X \sim \mathrm{B}(n, p)$.

Esperança

Se $X \sim \mathrm{B}(n, p)$ podemos escrever $X = X_1 + \cdots + X_n$, em que $X_i \sim \mathrm{Be}(p)$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim, obtemos

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = np.$$

Esperança

Se $X \sim \mathrm{B}(n, p)$ podemos escrever $X = X_1 + \cdots + X_n$, em que $X_i \sim \mathrm{Be}(p)$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim, obtemos

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = np.$$

Variância

Similarmente como temos n ensaios independentes, então

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = np(1 - p).$$

E daí segue que $\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Aplicação

Considere uma prova com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha que o aluno escolha a resposta ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele acerte pelo menos 6 questões?

Aplicação

Considere uma prova com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha que o aluno escolha a resposta ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele acerte pelo menos 6 questões?

Vamos considerar a variável aleatória X: número de questões que o aluno acerta. Vamos supor que $X \sim \mathrm{B}(n, p)$, em que $n = 12$ e $p = 0,25$.

Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de X fica dada por

Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x 0,75^{(12-x)},$$

em que $x = 0, 1, \ldots, 12$.

Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x 0,75^{(12-x)},$$

em que $x = 0, 1, \ldots, 12$. Portanto, usando uma tabela binomial obtemos $P(X \geq 6) = P(X = 6) + \cdots + P(X = 12) \cong 0,0544$.

Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x 0,75^{(12-x)},$$

em que $x = 0, 1, \ldots, 12$. Portanto, usando uma tabela binomial obtemos $P(X \geq 6) = P(X = 6) + \cdots + P(X = 12) \cong 0,0544$.

Adicionalmente, temos que o valor esperado de X fica dado por $\mu = n \times p = 12 \times 0,25 = 3$.

Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x 0,75^{(12-x)},$$

em que $x = 0, 1, \ldots, 12$. Portanto, usando uma tabela binomial obtemos $P(X \geq 6) = P(X = 6) + \cdots + P(X = 12) \cong 0,0544$.

Adicionalmente, temos que o valor esperado de X fica dado por $\mu = n \times p = 12 \times 0,25 = 3$. Ou seja, espera-se que o aluno acerte 3 questões.

Sumário

1. Objetivos da Aula
2. Variável Aleatória Discreta
3. Distribuição de Variável Aleatória Discreta
4. Esperança Matemática
5. Variância
6. Propriedades
7. Distribuição de Bernoulli
8. Distribuição Binomial
9. **Distribuição Geométrica**
10. Distribuição de Poisson

Definição

Supor que X representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade p.

Definição

Supor que X representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade p. A função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)},$$

em que $x = 1, 2, \ldots$.

Definição

Supor que X representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade p. A função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)},$$

em que $x = 1, 2, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{G}(p)$.

Definição

Supor que X representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade p. A função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)},$$

em que $x = 1, 2, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{G}(p)$. É um exemplo de variável aleatória discreta com um número enumerável de valores.

Definição

Supor que X representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade p. A função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)},$$

em que $x = 1, 2, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{G}(p)$. É um exemplo de variável aleatória discreta com um número enumerável de valores.

- Valor esperado
  $\mu = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$

Definição

Supor que X representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade p. A função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)},$$

em que $x = 1, 2, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{G}(p)$. É um exemplo de variável aleatória discreta com um número enumerável de valores.

- Valor esperado
  $\mu = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$
- Variância
  $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$, logo $\mathrm{DP}(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$

Aplicação

Num jogo a probabilidade de um jogador ganhar algum prêmio em cada tentativa é de 0,10. Supondo tentativas independentes, qual a probabilidade do jogador ganhar algum prêmio antes de 5 tentativas?

Aplicação

Num jogo a probabilidade de um jogador ganhar algum prêmio em cada tentativa é de 0,10. Supondo tentativas independentes, qual a probabilidade do jogador ganhar algum prêmio antes de 5 tentativas?
Seja X: número de tentativas até a ocorrência do primeiro sucesso (ganhar algum prêmio).

Aplicação

Num jogo a probabilidade de um jogador ganhar algum prêmio em cada tentativa é de 0,10. Supondo tentativas independentes, qual a probabilidade do jogador ganhar algum prêmio antes de 5 tentativas?
Seja X: número de tentativas até a ocorrência do primeiro sucesso (ganhar algum prêmio). Vamos supor que $X \sim \mathrm{G}(0,10)$.

Aplicação

Portanto, queremos saber $P(X \leq 4) = \sum_{x=1}^{4} P(X = x)$, em que

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)} = 0,10 \times 0,90^{(x-1)}.$$

para $x = 1, 2, 3, 4$.

Aplicação

Portanto, queremos saber $P(X \leq 4) = \sum_{x=1}^{4} P(X = x)$, em que

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)} = 0,10 \times 0,90^{(x-1)}.$$

para $x = 1, 2, 3, 4$.

Daí obtemos

$$P(X \leq 4) \quad = \quad 0,10 \times \{0,90^0 + 0,90^1 + 0,90^2 + 0,90^3\}$$

Aplicação

Portanto, queremos saber $P(X \leq 4) = \sum_{x=1}^{4} P(X = x)$, em que

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)} = 0,10 \times 0,90^{(x-1)}.$$

para $x = 1, 2, 3, 4$.

Daí obtemos

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= 0,10 \times \{0,90^0 + 0,90^1 + 0,90^2 + 0,90^3\} \\ &= 0,10 \times \{1 + 0,9 + 0,81 + 0,729\} \\ &= 0,10 \times 3,439 \\ &\cong 0,344 (34,4\%). \end{aligned}$$

Sumário

1. Objetivos da Aula
2. Variável Aleatória Discreta
3. Distribuição de Variável Aleatória Discreta
4. Esperança Matemática
5. Variância
6. Propriedades
7. Distribuição de Bernoulli
8. Distribuição Binomial
9. Distribuição Geométrica
10. Distribuição de Poisson

Definição

Se X representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ, então a função de probabilidade de X fica dada por

Definição

Se X representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ, então a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},$$

em que $x = 0, 1, \ldots$.

Definição

Se X representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ, então a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

em que $x = 0, 1, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$.

Definição

Se X representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ, então a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

em que $x = 0, 1, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$. Temos também aqui uma variável aleatória discreta com um número enumerável de valores.

Definição

Se X representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ, então a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

em que $x = 0, 1, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$. Temos também aqui uma variável aleatória discreta com um número enumerável de valores.

- Valor esperado
  $\mu = \mathrm{E}(X) = \lambda$

Definição

Se X representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ, então a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

em que $x = 0, 1, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$. Temos também aqui uma variável aleatória discreta com um número enumerável de valores.

- Valor esperado
  $\mu = \mathrm{E}(X) = \lambda$
- Variância
  $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \lambda$, logo $\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\lambda}$

Exemplos

Exemplos

- nº de acidentes numa rodovia num determinado período

Exemplos

- nº de acidentes numa rodovia num determinado período
- nº de chamadas telefônicas por minuto

Exemplos

- nº de acidentes numa rodovia num determinado período
- nº de chamadas telefônicas por minuto
- nº de mensagens que chegam a um servidor por minuto

Exemplos

- nº de acidentes numa rodovia num determinado período
- nº de chamadas telefônicas por minuto
- nº de mensagens que chegam a um servidor por minuto
- nº de pedidos de empréstimno num banco num mês

Exemplos

- nº de acidentes numa rodovia num determinado período
- nº de chamadas telefônicas por minuto
- nº de mensagens que chegam a um servidor por minuto
- nº de pedidos de empréstimno num banco num mês
- nº de defeitos num tecido por metro quadrado

Exemplos

- $n^{\underline{o}}$ de acidentes numa rodovia num determinado período
- $n^{\underline{o}}$ de chamadas telefônicas por minuto
- $n^{\underline{o}}$ de mensagens que chegam a um servidor por minuto
- $n^{\underline{o}}$ de pedidos de empréstimno num banco num mês
- $n^{\underline{o}}$ de defeitos num tecido por metro quadrado
- $n^{\underline{o}}$ de bactérias numa lâmina de microscópio

Exemplos

- n$^{\underline{o}}$ de acidentes numa rodovia num determinado período
- n$^{\underline{o}}$ de chamadas telefônicas por minuto
- n$^{\underline{o}}$ de mensagens que chegam a um servidor por minuto
- n$^{\underline{o}}$ de pedidos de empréstimno num banco num mês
- n$^{\underline{o}}$ de defeitos num tecido por metro quadrado
- n$^{\underline{o}}$ de bactérias numa lâmina de microscópio
- n$^{\underline{o}}$ de automóveis vendidos numa concessionária num dia

Aplicação 1

Sabe-se que em média ocorrem 1,5 acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer?.

Aplicação 1

Sabe-se que em média ocorrem 1,5 acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer?.Seja X: número de acidentes num dia na rodovia. Vamos supor que $X \sim \mathrm{P}(1,5)$.

Aplicação 1

Sabe-se que em média ocorrem 1,5 acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer?.Seja X: número de acidentes num dia na rodovia. Vamos supor que $X \sim \mathrm{P}(1,5)$.

Temos que $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$,

Aplicação 1

Sabe-se que em média ocorrem 1,5 acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer?.Seja X: número de acidentes num dia na rodovia. Vamos supor que $X \sim \mathrm{P}(1,5)$.

Temos que $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$,
em que $P(X = 0) = e^{-1,5} = 0,223$ e $P(X = 1) = e^{-1,5} \times 1,5 = 0,335$.

Aplicação 1

Sabe-se que em média ocorrem 1,5 acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer?.Seja X: número de acidentes num dia na rodovia. Vamos supor que $X \sim \text{P}(1,5)$.

Temos que $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$,
em que $P(X = 0) = e^{-1,5} = 0,223$ e $P(X = 1) = e^{-1,5} \times 1,5 = 0,335$.
Daí obtemos

$$P(X \geq 2) = 1 - 0,223 - 0,335 = 0,442.$$

Aplicação 2

Devido aos fortes nevoeiros no inverno o aeroporto de Congonhas-SP fecha para pousos e decolagens de acordo com uma distribuição de Poisson com média de 2 vezes ao ano.
Determine a probabilidade de que o aeroporto paralize suas atividades pela segunda vez, sabendo que já paralizou uma vez no corrente ano.

Aplicação 2

Seja N: número de paralizações durante um ano. Vamos supor que $N \sim \mathrm{P}(2)$.

Aplicação 2

Seja N: número de paralizações durante um ano. Vamos supor que $N \sim \mathrm{P}(2)$.

Queremos calcular

$$P(N = 2 | N \geq 1)$$

Aplicação 2

Seja N: número de paralizações durante um ano. Vamos supor que $N \sim \mathrm{P}(2)$.

Queremos calcular

$$P(N = 2 | N \geq 1) = \frac{P(N = 2, N \geq 1)}{P(N \geq 1)}$$

Aplicação 2

Seja N: número de paralizações durante um ano. Vamos supor que $N \sim \mathrm{P}(2)$.

Queremos calcular

$$\begin{aligned} P(N=2|N\geq 1) &= \frac{P(N=2, N\geq 1)}{P(N\geq 1)} \\ &= \frac{P(N=2)}{P(N\geq 1)} \end{aligned}$$

Aplicação 2

Seja N: número de paralizações durante um ano. Vamos supor que $N \sim \mathrm{P}(2)$.

Queremos calcular

$$
\begin{aligned}
P(N = 2 | N \geq 1) &= \frac{P(N = 2, N \geq 1)}{P(N \geq 1)} \\
&= \frac{P(N = 2)}{P(N \geq 1)} \\
&= \frac{\frac{e^{-2}2^2}{2!}}{1 - e^{-2}} \\
&= \frac{2e^{-2}}{1 - e^{-2}} \\
&\cong 0,313(31,3\%).
\end{aligned}
$$

Processo de Poisson

Dizemos que $N(t)$, $t \geq 0$, é um processo de Poisson de intensidade λ se $N(t) \sim P(\lambda t)$. Ou seja,

Processo de Poisson

Dizemos que $N(t)$, $t \geq 0$, é um processo de Poisson de intensidade λ se $N(t) \sim P(\lambda t)$. Ou seja,

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!},$$

para $k = 0, 1, \ldots$.

Aplicação 3

O número de sinistros de uma uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de 0,3 sinistro a cada ano.

Aplicação 3

O número de sinistros de uma uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de 0,3 sinistro a cada ano. Determine a probabilidade que nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros.

Aplicação 3

O número de sinistros de uma uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de 0,3 sinistro a cada ano. Determine a probabilidade que nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros.
Seja $N(5)$: número de sinistros em 5 anos.

Aplicação 3

O número de sinistros de uma uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de 0,3 sinistro a cada ano. Determine a probabilidade que nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros.
Seja $N(5)$: número de sinistros em 5 anos. Sabemos que que $N(5) \sim \mathrm{P}(1,5)$.

Aplicação 3

O número de sinistros de uma uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de 0,3 sinistro a cada ano. Determine a probabilidade que nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros.

Seja $N(5)$: número de sinistros em 5 anos. Sabemos que que $N(5) \sim \mathrm{P}(1,5)$.

Queremos calcular

$$P(N(5) = 3)$$

Aplicação 3

O número de sinistros de uma uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de 0,3 sinistro a cada ano. Determine a probabilidade que nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros.
Seja $N(5)$: número de sinistros em 5 anos. Sabemos que que $N(5) \sim \mathrm{P}(1,5)$.

Queremos calcular

$$P(N(5) = 3) \quad = \quad \frac{e^{-1,5}(1,5)^3}{3!}$$

Aplicação 3

O número de sinistros de uma uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de 0,3 sinistro a cada ano. Determine a probabilidade que nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros.
Seja $N(5)$: número de sinistros em 5 anos. Sabemos que que $N(5) \sim \mathrm{P}(1,5)$.

Queremos calcular

$$\begin{aligned} P(N(5) = 3) &= \frac{e^{-1,5}(1,5)^3}{3!} \\ &\cong 0,126(12,6\%). \end{aligned}$$

Aproximação da Binomial para a Poisson

Se $X \sim \mathrm{B}(n, p)$ então para n grande e p pequeno temos que

Aproximação da Binomial para a Poisson

Se $X \sim \mathrm{B}(n, p)$ então para n grande e p pequeno temos que

$$P(X = x) \cong \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},$$

em que $\lambda = np$, $x = 0, 1, \ldots, n$ e $np < 10$.