



PEF2603  
Estruturas na Arquitetura III -  
Sistemas Reticulados e Laminares



## Vigas Contínuas

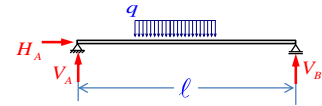
(17/04/2017)

Professores

Ruy Marcelo O. Pauletti, Leila Meneghetti Valverdes, Luís Bitencourt

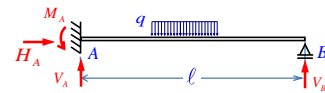
1º Semestre 2017

### Viga Isostática



3 reações de apoio - 3 equações de equilíbrio

### Viga hiperestática

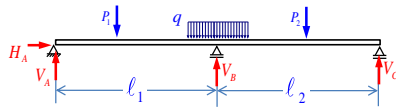


4 reações de apoio - 3 equações de equilíbrio  
Viga 1 vez hiperestática

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

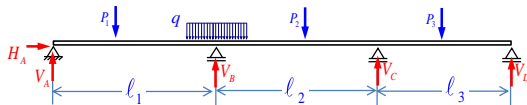


### Vigas contínuas



Viga de dois tramos: 4 reações de apoio

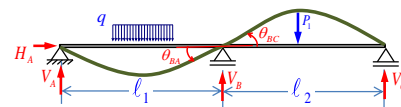
1 x hiperestática



Viga de três tramos - 5 reações de apoio

2 x hiperestática

A rotação sobre cada um dos apoios intermediários oferece uma equação de compatibilidade:



No apoio B:

$$\theta_{BA} = \theta_{BC}$$



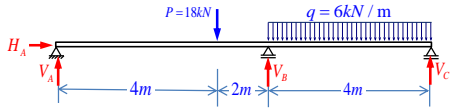
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



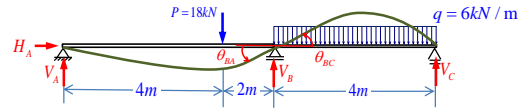
Exemplo: Determinar as reações de apoio e os diagramas de esforços cortantes e momentos fletores.



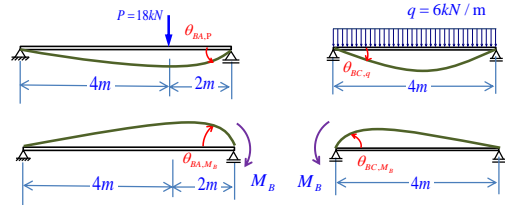
Equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} (1) \sum F_x = H_A = 0 & (1) \\ (2) \sum F_y = V_A + V_B + V_C - q \ell_{BC} - P = 0 & \therefore V_A + V_B + V_C = 42 & (2) \\ (3) \sum M_{(A)} = 10 \cdot V_C + 6 \cdot V_B - P \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 8 = 0 & \therefore 10V_C + 6V_B = 264 & (3) \end{cases}$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Equação de compatibilidade:  $\theta_{BA} = \theta_{BC}$



$$\theta_{BA,P} + \theta_{BA,M_B} = \theta_{BC,q} + \theta_{BC,M_B}$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

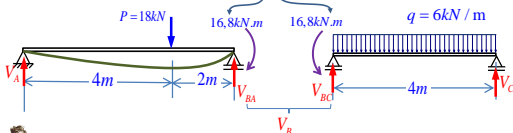
$$\theta_{BA,P} + \theta_{BA,M_B} = \theta_{BC,q} + \theta_{BC,M_B}$$

$$\frac{Pab(\ell_{BA} + a)}{6 \ell_{BA} EI} - \frac{M_B \ell_{BA}}{3EI} = -\frac{q \ell_{BC}^3}{24EI} + \frac{M_B \ell_{BC}}{3EI}$$

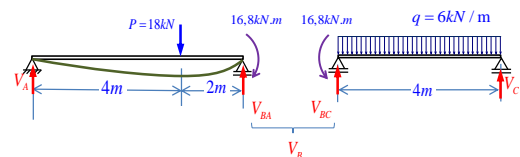
$$\frac{18 \times 4 \times 2(6+4)}{6 \times 6} - \frac{M_B \times 6}{3} = -\frac{6 \times 4^3}{24} + \frac{M_B \times 4}{3}$$

$$40 - 2M_B = -16 + \frac{4}{3} M_B$$

$$M_B = 16,8 \text{ kN.m}$$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



$$\sum M_{(A)} = 6 \cdot V_B - 18 \cdot 4 - 16,8 = 0 \quad \sum M_{(C)} = 4 \times V_{BC} - 6 \times 4 \times 2 - 16,8 = 0$$

$$V_{BA} = 14,8 \text{ kN}$$

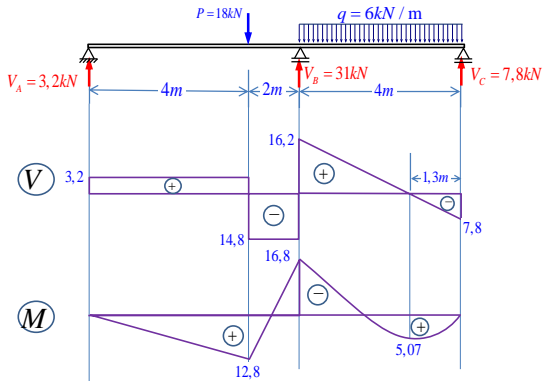
$$V_{BC} = 16,2 \text{ kN}$$

$$V_B = 14,8 + 16,2 = 31 \text{ kN}$$

Substituindo  $V_B$  em (3) temos:  $10V_C + 6 \times 31 = 264 \quad V_C = 7,8 \text{ kN}$

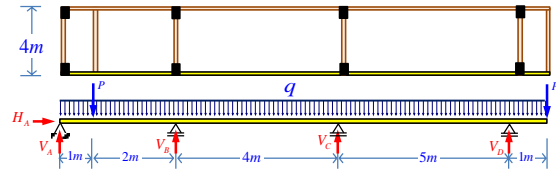
Substituindo  $V_B$  e  $V_C$  em (2) temos:  $V_A + V_B + V_C = 42 \quad V_A = 3,2 \text{ kN}$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

Exercício: Determinar os esforços na viga de concreto de seção transversal 20 cm x 50 cm. Sobre as vigas tem-se alvenaria de tijolos cerâmicos com pé-direito de 2,75m.

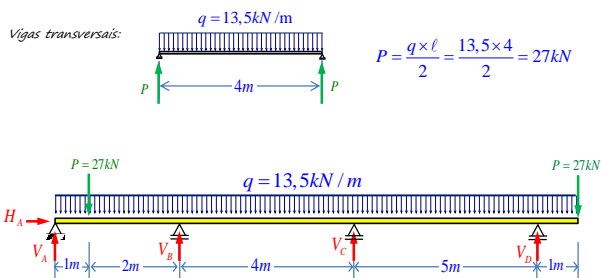


Peso próprio das vigas:  $\gamma_c = 25 \text{ kN/m}^3 \therefore q_{\text{vig}} = 0,2 \times 0,5 \times 25 = 2,5 \text{ kN/m}$

Peso próprio da parede:  $\gamma_{\text{alv}} = 16 \text{ kN/m}^3 \therefore q_{\text{alv}} = 0,25 \times 2,75 \times 16 = 11 \text{ kN/m}$

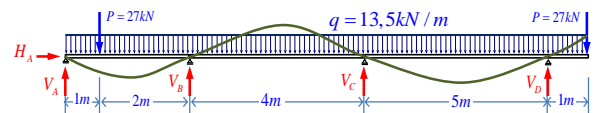
$$q = q_{\text{vig}} + q_{\text{alv}} = 2,5 + 11 = 13,5 \text{ kN/m}$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



- 5 reações de apoio  $\Rightarrow$  Viga 2x hiperestática
- 3 equações de equilíbrio

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



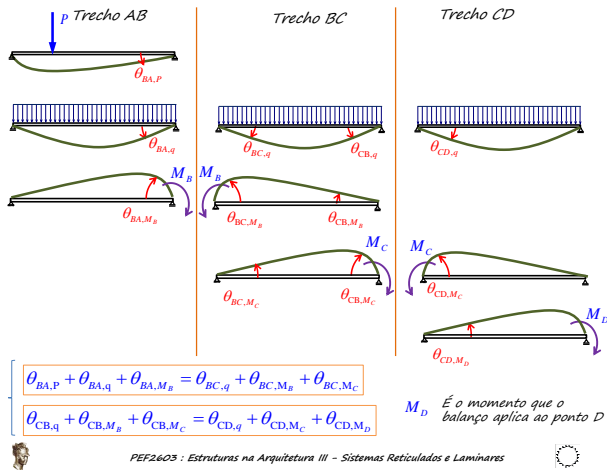
Equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} (1) \quad \sum F_x = H_A = 0 \\ (2) \quad \uparrow \sum F_y = V_A + V_B + V_C + V_D - q\ell - 2P = 0 \therefore V_A + V_B + V_C + V_D = 229,5 \quad (2) \\ (3) \quad \sum M_{(A)} = 3V_B + 7V_C + 12V_D - P \cdot 1 - P \cdot 13 - \frac{q \cdot 13^2}{2} = 0 \therefore 3V_B + 7V_C + 12V_D = 1518,75 \quad (3) \end{cases}$$

Equações de compatibilidade:

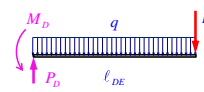
$$\theta_{BA} = \theta_{BC} \quad \theta_{CB} = \theta_{CD}$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

Momento fletor e carga vertical no apoio D:



$$M_D = P \times l_{DE} + \frac{q \times l_{DE}^2}{2} = 33,75 \text{ kN.m}$$

$$P_D = P + q \times l_{DE} = 40,5 \text{ kN}$$

Equação de compatibilidade para ao apoio B:

$$\theta_{BA,P} + \theta_{BA,q} + \theta_{BA,M_B} = \theta_{BC,q} + \theta_{BC,M_B} + \theta_{BC,M_C}$$

$$\frac{Pab(\ell_{BA} + a)}{6\ell_{BA}EI} + \frac{q\ell_{BA}^3}{24EI} - \frac{M_B\ell_{BA}}{3EI} = -\frac{q\ell_{BC}^3}{24EI} + \frac{M_B\ell_{BC}}{3EI} + \frac{M_C\ell_{BC}}{6EI}$$

$$\frac{27 \times 1 \times 2(3+1)}{6 \times 3} + \frac{13,5 \times 3^3}{24} - \frac{M_B \times 3}{3} = -\frac{13,5 \times 4^3}{24} + \frac{M_B \times 4}{3} + \frac{M_C \times 4}{6}$$

$$7M_B + 2M_C = 189,5625 \quad (1)$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

Equação de compatibilidade para ao apoio C:

$$\theta_{CB,q} + \theta_{CB,M_B} + \theta_{CB,M_C} = \theta_{CD,q} + \theta_{CD,M_C} + \theta_{CD,M_D}$$

$$\frac{q\ell_{CB}^3}{24EI} - \frac{M_B\ell_{CB}}{6EI} - \frac{M_C\ell_{CB}}{3EI} = -\frac{q\ell_{CD}^3}{24EI} + \frac{M_C\ell_{CD}}{3EI} + \frac{M_D\ell_{CD}}{6EI}$$

$$\frac{13,5 \times 4^3}{24} - \frac{M_B \times 4}{6} - \frac{M_C \times 4}{3} = -\frac{13,5 \times 5^3}{24} + \frac{M_C \times 5}{3} + \frac{M_D \times 5}{6}$$

$$2M_B + 9M_C = 234,5625 \quad (2)$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

$$7M_B + 2M_C = 189,5625 \quad (1)$$

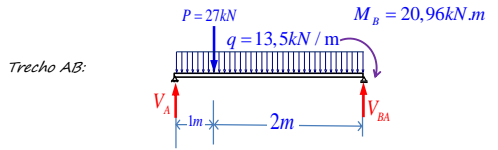
$$2M_B + 9M_C = 234,5625 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema de equações, obtém-se:

$$M_B = 20,96 \text{ kN.m}$$

$$M_C = 21,4 \text{ kN.m}$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



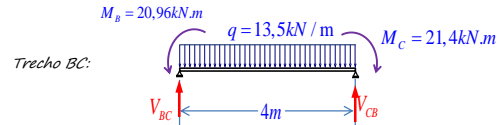
$$\sum M_{(A)} = 3 \cdot V_{BA} - 20,96 - 27 \times 1 - \frac{13,5 \times 3^2}{2} = 0$$

$$V_{BA} = 36,24 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_Y = V_A + V_{BA} - 13,5 \times 3 - 27 = 0$$

$$V_A = 31,26 \text{ kN}$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



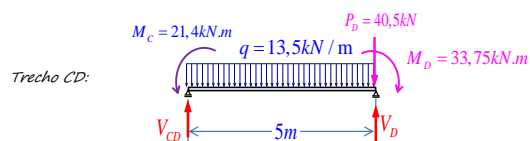
$$\sum M_{(C)} = -4 \times V_{BC} + 20,96 + \frac{13,5 \times 4^2}{2} - 21,4 = 0$$

$$V_{BC} = 26,89 \text{ kN}$$

$$\sum M_{(B)} = 4 \times V_{CB} + 20,96 - \frac{13,5 \times 4^2}{2} - 21,4 = 0$$

$$V_{CB} = 27,11 \text{ kN}$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



$$\sum M_{(C)} = 5 \times V_D - 33,75 - 40,5 \times 5 - \frac{13,5 \times 5^2}{2} + 21,4 = 0$$

$$V_D = 76,72 \text{ kN}$$

$$\sum M_{(D)} = -5 \times V_{CD} - 33,75 + \frac{13,5 \times 5^2}{2} + 21,4 = 0$$

$$V_{CD} = 31,28 \text{ kN}$$

$$V_A = 31,26 \text{ kN}$$

$$V_D = 76,72 \text{ kN}$$

$$V_{BA} = 36,24 \text{ kN}$$

$$V_{BC} = 26,89 \text{ kN}$$

$$V_B = V_{BA} + V_{BC} = 36,24 + 26,89$$

$$V_B = 63,13 \text{ kN}$$

$$V_{CB} = 27,11 \text{ kN}$$

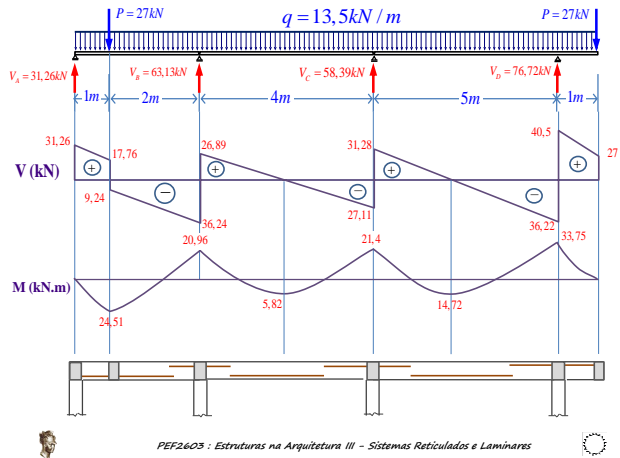
$$V_{CD} = 31,28 \text{ kN}$$

$$V_C = V_{CB} + V_{CD} = 27,11 + 31,28$$

$$V_C = 58,39 \text{ kN}$$

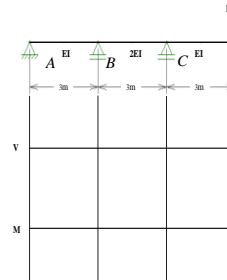
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

P1-Q2-2008: Determine os diagramas de esforços solicitantes atuantes na viga contínua, uma vez hiperestática, esquematizada na figura abaixo. Considere  $P=(20+n)$  em kN, onde n corresponde ao último algarismo não-nulo de seu número USP.



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares