Conceitos e aplicações de Estatística em pesquisa científica utilizando o R

Resumo da Parte Teórica

Silvio Rodrigues de Faria Junior

Departamento de Estatística - IME-USP

1 Eventos e Probabilidade

1.1 Experimento Aleatório

Qualquer aparato, fenômeno, ou situação onde:

- Há vários resultados possíveis.
- O máximo de informação disponível antes de sua realização é o conhecimento sobre as *probabilidades* de seus *eventos*.

1.2 Espaço Amostral (Ω)

Conjunto de todos os resultados de um experimento aleatório.

1.2.1 Classificação

1. **Espaço amostral discreto:** finito ou enumerável.
   Exemplos:

   (a) Lançamento de uma moeda.
   $\Omega = \{C, R\} \quad C = CARA,\ R = COROA$

   (b) Lançamento de uma moeda até a ocorrência da primeira cara.
   $\Omega = \{C, RC, RRC, RRRC, RRRRC, ...\}$

   (c) Lançamento de uma moeda 3 vezes seguidas.
   $\Omega = \{CRR, RCR, RRC, CCR, CRC, RCC, CCC, RRR\}$

2. **Espaço amostral contínuo:** não enumerável.
   Exemplos:

   (a) Sorteio de um número real entre 0 e 1.
   $\Omega = [0, 1]$

(b) Tempo de vida de uma lâmpada (célula, organismo, processo, etc...).
$\Omega = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty) = \mathbb{R}^+$

(c) Erro de um aparelho de medida.
$\Omega = \mathbb{R}$

Nota: O que define um espaço amostral não é o experimento em si, mas sim a classe de resultados de interesse. Um experimento que possui diversas classes de interesse possui diversos espaços amostrais.

1.3 Eventos

Quaisquer subconjuntos do espaço amostral Ω é denominado *evento*, e usualmente é denotado por A, B, C,... (letras latinas maiúsculas). Dizemos que um evento ocorreu quando o resultado do experimento for um de seus elementos.

1.3.1 Eventos Especiais

- Evento certo: espaço amostral (Ω).
- Evento simples: subconjunto unitário do espaço amostral ($\omega \subset \Omega$).
- Evento impossível: conjunto vazio ($\emptyset$).

1.3.2 Exemplos:

1. Evento “sair cara” no lançamento de uma moeda. $A = \{C\} \subset \Omega$
2. Evento “sair uma cara em 3 lançamentos”. $A = \{CRR, RCR, RRC\}$
3. Evento “sair 4 caras em 3 lançamentos”. $A = \emptyset$

1.3.3 Operações com Eventos

- Evento União: Sejam A, $B \subset \Omega$, o evento $A \cup B \subset \Omega$ é denominado evento união.
- Evento Interseção: Sejam A, $B \subset \Omega$, o evento $A \cap B \subset \Omega$ é denominado evento interseção.
- Evento Complementar: Para todo $A \subset \Omega$, o evento $\{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega \backslash A \subset \Omega$ é denominado evento complementar.
- Eventos Mutuamente Exclusivos: $\forall A$, $B \subset \Omega$, os eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos se $A \cap B = \emptyset$.
- Eventos Exaustivos: Uma sequência de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ é uma sequência exaustiva de eventos se $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.
- Partição de Ω: Uma sequência de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$, não-vazios, exaustivos, e mutuamente exclusivos.

1.4 Probabilidade

1.4.1 Interpretações

1. Clássica: admitindo-se que o experimento possui resultados equiprováveis (eventos simples com mesma importância), a probabilidade de um evento é a razão entre o número de resultados favoráveis a este evento e o número de resultados possíveis.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

2. Frequentista: a probabilidade de um evento é o limite da frequência relativa deste evento quando o número de ensaios vai para infinito.

$$f_n(A) = \#ocorrencias\, de\, A \qquad \mathbf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(A)}{n}$$

3. Subjetiva: a probabilidade de um evento mede o grau de crença de um indivíduo na ocorrência deste evento.

1.4.2 Definição Axiomática

Considere $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os eventos possíveis em um experimento de espaço amostral Ω. Define-se por probabilidade a função

$$\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\forall\, A \subset \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A) \geq 0$
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
3. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, ... \subset \mathcal{A}$ são mutuamente exclusivos, então:

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$$

1.4.3 Propriedades

- Se $A \subset \Omega$, então $\mathbf{P}(A^C) = 1 - \mathbf{P}(A) \Rightarrow \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
- Se $A \subseteq B \subseteq \Omega$, então $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$, $\Rightarrow \forall\, A \subset \Omega$, $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$.
- Se A, $B \subseteq \Omega$, então $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$

1.5 Eventos Independentes e Probabilidade Condicional

1.5.1 Eventos Independentes

Se a ocorrência de um evento A não altera a probabilidade de ocorrência de outro evento B, então dizemos que os eventos A e B são independentes entre si.

1. Dois eventos A, $B \subset \Omega$ são independentes se $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$
2. Três eventos A, B, $C \subset \Omega$ são independentes se:
   (a) são dois a dois independentes: $\begin{cases} \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B) \\ \mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(C) \\ \mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B).\mathbf{P}(C) \end{cases}$
   (b) são conjuntamente independentes $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B).\mathbf{P}(C)$

Nota: Eventos de probabilidade 0 ou 1 são independentes de qualquer outro evento:

- Se $P(A) = 0$, então $\mathbf{P}(A \cap B) \leq \mathbf{P}(A) = 0.\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \Rightarrow$ independentes.
- Se $P(A) = 1$, então $\mathbf{P}(A \cap B) = 1.\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \Rightarrow$ independentes.

Nota: Se A e B são eventos independentes, então

$$\begin{cases} A^C \, \mathrm{e} \, B \\ A \, \mathrm{e} \, B^C \\ A^C \, \mathrm{e} \, B^C \end{cases} \quad \text{são independentes.}$$

Exemplo - Independência

Lançamento de uma moeda honesta até ocorrer CARA

- $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftarrow \begin{cases} n-1 & COROA \\ 1 & CARA \end{cases}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$

Nota: a probabilidade de uma seq. infinita de COROAS é nula.

1.5.2 Probabilidade Condicional

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

Exemplo: Urna com:

- 3 bolas brancas (B)

- 2 bolas azuis (A)

Sorteia-se duas bolas sem reposição:

- $P(A|1a.\,bola) = \begin{cases} 1/2 & B \\ 1/4 & A \end{cases}$
- $P(A,A) = P(A|A).P(A) = \frac{1}{4}.\frac{2}{5} = \frac{1}{10}$

1. Lei do Produto
   (a) 2 eventos:
   $$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A|B)P(B)$$
   (b) 3 eventos:
   $$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) \\ &= \mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_1) \end{aligned}$$
   (c) n eventos:
   $$\mathbf{P}(\bigcap_n A_n) = \prod_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n-1}} \mathbf{P}(A_{n-i}| \bigcap_{j=1}^{n-i-1} A_j)$$
2. Teorema da Probabilidade Total
   Seja $A_1, \ldots, A_k \subset \Omega$ uma partição de Ω, então para qualquer $B \subset \Omega$
   $$\mathbf{P}(B) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(B|A_j)$$
3. Teorema de Bayes
   Seja $A_1, \ldots, A_k \subset \Omega$ uma partição de Ω, e $B \subset \Omega$ com $\mathbf{P}(B) > 0$
   $$\mathbf{P}(A_i|B) = \frac{\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B|A_i)}{P(B)} = \frac{\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(B|A_j)}$$
   (a) Exemplo: Teste positivo para uma doença rara
      i. Eventos de interesse:
         - $+$: evento resultado positivo
         - $-$: evento resultado positivo
         - C: evento paciente tem doença
         - $\overline{C}$:evento paciente não tem doença
      ii. Acurácia do teste
         - $\mathbf{P}(+|C) = A = 0,99 = \mathbf{P}(-|\overline{C})$

- $\mathbf{P}(-|C) = 1 - A = 0,01 = \mathbf{P}(+|\overline{C})$

- Interesse: $\mathbf{P}(C|+) = \frac{\mathbf{P}(C)\mathbf{P}(+|C)}{\mathbf{P}(+)}$
- Informação:
  –

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(+) &= \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(C|+) + \mathbf{P}(\overline{C})\mathbf{P}(\overline{C}|+) \\ &= pA + (1-p)(1-A) \end{aligned}$$

$\mathbf{P}(C|+) = \frac{pA}{pA+(1-p)(1-A)}$

		p				
		0,01	0,05	0,10	0,20	0,30
	0,99	0,50	0,83	0,91	0,97	0,97
	0,95	0,16	0,50	0,67	0,82	0,89
A	0,90	0,08	0,32	0,50	0,69	0,79
	0,80	0,03	0,17	0,30	0,50	0,63
	0,70	0,02	0,10	0,20	0,36	0,50

2 Variáveis Aleatórias

2.1 Definição

Uma variável aleatória (v.a.) X é uma função que associa elementos do espaço amostral Ω ao conjunto dos números reais multidimensional.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

1. Exemplo: Lançamento de uma moeda

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & se\, \omega = CARA \\ 0 & se\, \omega = COROA \end{cases}$$

2. Exemplo: Lançamento de uma moeda duas vezes

$$X(\omega) = \begin{cases} (1,1) & se\, \omega = (CARA, CARA) \\ (1,0) & se\, \omega = (CARA, COROA) \\ (0,1) & se\, \omega = (COROA, CARA) \\ (0,0) & se\, \omega = (COROA, COROA) \end{cases}$$

Nota: Por convenção, é comum nos textos usar apenas a notação X ao invés de $X(\omega)$ e fazer referência aos eventos apenas pelo valor que a variável assume.

Nota: Variáveis aleatórias são denotadas por letras latinas maiúsculas.

Nota: Os valores que as variávies podem assumir são denotados por letras latinas minúsculas.

2.2 Variáveis Aleatórias Discretas

São aquelas que podem ser associadas a subconjuntos de $\mathbb{Z}$, podendo assumir um conjunto de valores finito ou infinito enumerável.

2.2.1 Função de Probabilidade (Distribuição)

$$p(x) = \mathbf{P}(X = x)$$

1. Propriedades:
   (a) $p(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \Omega$
   (b) $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$

2. Exemplo: Lançamento de uma moeda "honesta"

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 1 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

3. Exemplo: Lançamento de uma moeda "desconhecida"

$$p(x) = \begin{cases} \theta & x = 1 \\ 1 - \theta & x = 0 \end{cases}$$

   Nota: O valor θ desconhecido é chamado de *parâmetro*.

   Nota: O parâmetro define uma classe de modelos.

   Nota: O modelo descrito pelo lançamento de uma moeda "desconhecida" é conhecido como $Bernoulli(\theta)$. Notação: $X \sim Bernoulli(\theta)$

4. Exemplo: Lançamento de duas moedas desconhecidas

$$p(x) = \begin{cases} \theta_1\theta_2 & x = (1,1) \\ \theta_1(1-\theta_2) & x = (1,0) \\ (1-\theta_1)\theta_2 & x = (0,1) \\ (1-\theta_1)(1-\theta_2) & x = (0,0) \end{cases}$$

2.2.2 Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \sum_{y \leq x} p(y)$$

1. Propriedades:
   (a) $F(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$ além disso $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
   (b) $F(x)$ é uma função monótona não-decrescente

2. Exemplo: Lançamento de uma moeda "honesta¨

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

3. Exemplo: Lançamento de uma moeda "desconhecida"

$$p(x) = \begin{cases} 1-\theta & x = 0 \\ \theta & x = 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \theta & x = 0 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

4. Exemplo: Lançamento de duas moedas desconhecidas

$$p(x) = \begin{cases} (1-\theta_1)(1-\theta_2) & x = (0,0) \\ \theta_1(1-\theta_2) & x = (1,0) \\ (1-\theta_1)\theta_2 & x = (0,1) \\ \theta_1\theta_2 & x = (1,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < (0,0) \\ 1-\theta_1-\theta_2+\theta_1\theta_2 & x = (0,0) \\ 1-\theta_2 & x = (1,0) \\ 1-\theta_1 & x = (0,1) \\ 1 & x \geq (1,1) \end{cases}$$

2.3 Variáveis Aleatórias Contínuas

São aquelas que podem ser associadas a conjuntos numéricos não enumeráveis.

2.3.1 Função de Densidade de Probabilidade (fdp)

Uma variável aleatória contínua tem função densidade de probabilidade p, se para qualquer intervalo $A \subset X(\Omega)$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_{\mathbf{A}} p(x)dx$$

1. Propriedades:

   (a) $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$

   (b) $\int_{\Omega} p(x)dx = 1$

2. Exemplo: Modelo Uniforme $[0, 1]$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

3. Exemplo: Modelo Uniforme $[a, b]$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Nota: Neste modelo o parâmetro $\theta = (a, b)$

4. Exemplo: Lançamento de duas moedas desconhecidas

$$p(x) = \begin{cases} \theta_1\theta_2 & x = (1, 1) \\ \theta_1(1-\theta_2) & x = (1, 0) \\ (1-\theta_1)\theta_2 & x = (0, 1) \\ (1-\theta_1)(1-\theta_2) & x = (0, 0) \end{cases}$$

2.3.2 Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx$$

1. Propriedades:

   (a) $F(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$ além disso $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$

   (b) $F(x)$ é uma função monótona não-decrescente e contínua.

   Nota: A propriedade (b) de $F(x)$ é importante pois isto garante que existe uma função inversa $F^{-1} : (0, 1) \to \Omega^*$, onde $\Omega^* = \{x \in \Omega : p(x) > 0\}$ é o chamado *suporte* da distribuição.

2. Exemplo: Modelo Uniforme $[0, 1]$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

   Nota: O modelo uniforme é importante pois a partir dele podemos gerar através de simulações outras variáveis aleatórias com dois passos simples:

   - Primeiro: gerar valores y aleatórios no intervalo $(0, 1)$;

- Segundo: os valores do modelo simulado serão dados por $x = F^{-1}(y)$, onde F^{-1} é a inversa da fda do modelo desejado.

3. Exemplo: Modelo Uniforme $[a, b]$

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases} \quad F^{-1}(y) = (b-a)y
\end{aligned}
$$

4. Exemplo: Modelo Exponencial

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \\
&\Rightarrow \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-y)
\end{aligned}
$$

Nota: Nem sempre é possível encontrar F *analiticamente*.

Nota: Um mesmo modelo pode ter mais de uma *parametrização*.

5. Exemplo: Modelo Normal (Gaussiano)

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&\Rightarrow \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right\} \\
&\quad\quad F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \int_{0}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right\}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Nota: É necessário o uso de métodos numéricos para calcular o valor da função de erro *erf*.

3 Medidas Resumo

- Como resumir de forma sucinta o comportamento de uma v.a.?

- Dada uma amostra de um experimento aleatório com observações independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), qual o melhor "chute" para apostar na ocorrência de uma próxima realização?

1. Amostra.

   Uma amostra $\mathbf{x}$ é uma sequência de:

   (a) dados já observados de um experimento: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

   (b) variáveis aleatórias: $X_1, X_2, \ldots, X_n$

   Nota: Quando assumimos a hipótese de que cada observação ou variável da amostra possui uma distribuição comum, dizemos que a amostra é identicamente distribuída.

   Nota: Uma amostra identicamente distribuída com observações ou variáveis independentes é chamada de i.i.d.

2. Estatística: Qualquer função da amostra.

3. Estimador: Um estimador $\hat{\theta}$ é uma estatística que relaciona uma amostra a um parâmetro.

4. Estimativa: é o valor observado de um estimador.

3.1 Valor Esperado

A esperança $E(X)$ ou valor esperado μ de uma variável aleatória é um valor definido por:

caso discreto	caso contínuo
$E(X) = \sum x_j p_j$	$E(X) = \int xp(x)dx$

Dada uma amostra i.i.d. o estimador da esperança, tanto no caso discreto como no contínuo é dado por:

$$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}$$

Nota: Nem sempre o valor esperado de uma v.a. existe.

Exemplo: $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (distribuição Cauchy)

3.1.1 Algumas propriedades

1. $E(X)$ é um operador linear: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

2. Se $X \leq Y$ então $E(X) \leq E(Y)$

3. Dada a v.a. X, se $E(X) < \infty$, então $E(g(X)) = \int g(x)p(x)dx$ para qualquer função g

4. Desigualdade de Markov

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

3.2 Medidas de Posição

Medida	Definição	Estimador
Média	$E(X)$	$\frac{\sum_i x_i}{n}$
Mediana	$x_{md} : \mathbf{P}(X \leq x_{md}) = 0,50$	valor que separa a amostra ordenada ao meio
Moda	$\arg\max_x p(x)$	valor mais frequente da amostra

3.3 Variância

A variância $V(X)$ (também denotado por σ^2) de uma variável aleatória é um valor definido por:

caso discreto	caso contínuo
$V(X) = \sigma^2 = \sum(x_j - \mu)^2 p_j$	$V(X) = \sigma^2 = \int(x-\mu)^2 p(x)dx$

Dada uma amostra i.i.d. um estimador da variância, tanto no caso discreto como no contínuo é dado por:

$$\hat{\sigma^2} = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

3.3.1 Algumas propriedades

1. $V(X) \geq 0 \; \forall \; X$, se $V(X) = 0 \Leftrightarrow X = cte$
2. $V(aX + b) = a^2 V(X)$
3. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$, portanto se X e Y são independentes, então $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
4. Desigualdade de Chebychev

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

3.4 Medidas de Dispersão

Medida	Definição	Estimador
Variância	$V(X)$	$\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$
Desvio Padrão	$DP(X)$	$\sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$
Amplitude	$\max(\mathbf{x}) - \min(\mathbf{x})$	

4 Lei dos Grandes Números

Se X é uma v.a. com $E(X) = \mu < \infty$, e $E(X) = \mu < \infty$ então dada uma amostra i.i.d.:

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mu$$

5 Teorema do Limite Central

Se X é uma v.a. com $E(X) = \mu < \infty$ e $V(X) = \sigma^2$, então dada uma amostra i.i.d.:

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)$$

6 Testes de Hipóteses

- Como saber se duas amostras pertencem à mesma população?
- Como saber se um modelo estatístico é adequado para fazer previsões?
- Como saber se o valor estimado para um parâmetro é aceitável?

6.1 Estratégia

1. Assumir um modelo para os dados.
   - $X_i \sim D(\theta)$ i.i.d.
   - Verossimilhança:

     $$L(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\theta)$$

2. Definir a hipótese a ser testada (hipótese nula).
   - $H_0 : \theta \in \Theta_0$
   - $H_A : \theta \notin \Theta_0$
3. Adotar um ponto de vista:
   - **Frequentista**: parâmetro é uma constante desconhecida.
   - **Bayesiano**: parämetro é uma variável aleatória.

6.2 Pontos de Vista

6.2.1 Frequentista

Parâmetro é uma constante desconhecida.

Obter estimadores para o parämetro a partir da verossimilhança com boas propriedades:

- máxima verossimilhança
- variância mínima
- etc...

		Situação	
		H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Decisão	Rejeitar H_0	Erro Tipo I	OK
	Não rejeitar H_0	OK	Erro Tipo II

- Nível Descritivo:

$$\alpha = P(Erro\,Tipo\,I) = P(Rejeitar\,H_0|H_o\,Verdadeira)$$

- Poder do teste:

$$1 - \beta = 1 - P(Erro\,Tipo\,II) = P(Aceitar\,H_0|H_o\,Falsa)$$

- p-value:

$$p_{value} = P(T(X) > t_{obs}|H_0\,Verdadeiro) \neq P(H_0\,Verdadeiro)$$

Possibilidades de Procedimentos:

1. Fixado α, encotrar o valor t_{crit} e comparar com t_{obs}, rejeita-se H_0, se $t_{obs} > t_{crit}$ (Teste via estimação por intervalo).
2. Calcular p_{value} e comparar com um p_{crit}, rejeita-se H_0, se $p_{value} < p_{crit}$

6.2.2 Bayesiano

Parâmetro é uma variável aleatória.

Utilizando a informação contida na amostra e a opinião do especialista no problema para calcular a probabilidade posteriori da hipótese nula e confrontá-la com a alternativa.

- Probabilidade posteriori

$$L(\theta|x) = \tfrac{1}{\kappa}L(x|\theta)\pi(\theta) \qquad \kappa = \textstyle\int_\Theta L(x|\theta)d\theta = cte$$

- Distribuição priori: $\pi(\theta)$

Confrontando hipóteses:

- Bayes Factors:

$$K = \frac{\int_{\Theta_0} L(\theta|x)d\theta}{\int_{\Theta_1} L(\theta|x)d\theta}$$

O bayes factor é uma razão de probabilidades.

- Full Bayesian Significance Test (FBST):

$$e_{value} = \int_{\Theta^*} L(\theta|x)d\theta$$

$$\Theta^* = \{\theta : L(\theta) > L(\theta^*),\ \theta^* = \underset{\theta\in\Theta_0}{\arg} \max L(\theta)\}$$

O e-value é a probabilidade do conjunto de pontos do espaço paramétrico que possuem verossimilhança superior fora da hipótese nula.

7 Modelos de Regressão

7.1 Regressão Linear Simples

$$Y_i = aX_i + b + \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

7.2 Modelo Generalizado

$$Y_i = f_\theta(X_i) + \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i \sim D(\theta)$$

8 Resumo

- Estatística é o instrumento fundamental da ciência para:
  - Testar hipóteses
  - Fazer previsões
- O uso de técnicas computacionais é indispensável.
- Todo e qualquer modelo está ERRADO por definição... alguns menos errados que os outros, por isso funcionam melhor. ;-)
- Consulte SEMPRE um especialista em estatística.

Referências

[1] M.N. Magalhães e A.C.P. de Lima. *Noções de Probabilidade e Estatística - 6a. ed.*Edusp, 2007.

[2] W. Feller *An Introduction to Probability and Its Applications* Vol I, 3rd ed. John Wiley, 1968.

[3] W. Feller *An Introduction to Probability and Its Applications* Vol II, 3rd ed. John Wiley, 1968.

[4] G. Casella e R.L. Berger. *Statistical Inference* 2nd. ed.Duxbury, 2001.

[5] M. DeGroot *Probability and Statistics* - 3rd. ed. Addison Wesley, 2001.

[6] J.M. Stern Cognitive construtivism and the epistemic significance of sharp statistical hypotheses ed. http://www.ime.usp.br/~jstern/infcomp/evli.pdf