

O Movimento Browniano com o uso de novas tecnologias.

Autores: Adeildo, Anderson, Cleverson e Ruan

1. Introdução

1.1 Teoria

O ano miraculoso de Einstein é principalmente lembrado pelas rupturas da teoria da relatividade e do “quantum de luz”. No entanto, a tese de doutoramento, terminada em abril de 1905 e aceita pela Universidade de Zurique em julho, e o primeiro artigo sobre o movimento browniano, recebido para publicação nos *Annalen der Physik* em maio, são trabalhos de alta qualidade, que já teriam sido suficientes para estabelecer a reputação do jovem Einstein. Contudo, o movimento Browniano foi descoberto em 1827 por Roberto Brown, um botânico. Em seus estudos, ele notou que pequenas partículas de pólen de planta que se mexiam sem parar no líquido do microscópico. Foi verificado experimentalmente que partículas muito pequenas estão se movimentando o tempo todo. Atualmente, o movimento browniano serve de modelo na descrição de flutuações que ocorrem nos mais diversos e inesperados tipos de sistemas. Por exemplo, praticamente a mesma descrição e o mesmo tratamento matemático de Einstein podem ser adaptados para descrever flutuações de preços de mercadorias, a condutividade elétrica em metais e a ocorrência de cheias nos rios. Esse movimento corresponde as colisões que as micromoléculas sofrem devido a agitação térmica das moléculas de um determinado meio.

Não é muito difícil obter a relação que nos ajudará a determinar o Número de Avogadro, N_A . Se partimos da relação de Stokes-Einstein[3]:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a} \quad (1.1)$$

onde D é o coeficiente de Difusão da gota no meio, k_B é a constante de Boltzmann, T a Temperatura na escala absoluta, η a viscosidade do meio e a o raio da gota. Fazendo algumas suposições, podemos escrever que o coeficiente de difusão, em uma direção, pode ser escrito como[3]:

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (1.2)$$

onde $n(x, t)$ é o número de partículas por unidade de volume ao redor do ponto x no instante t . Existem algumas suposições que devem ser feitas aqui, para quem estiver interessado sugiro [3].

Vamos supor que no tempo $t = 0$ todas as partículas estejam na origem, podemos resolver a equação (1.2) $\forall t > 0$:

$$n(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \frac{-x^2}{4Dt} \quad (1.3)$$

onde $n = \int n(x)dx$ é o número total de partículas contidas no volume. Logo, o valor esperado do deslocamento quadrático médio, $\langle x^2 \rangle$, será:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \int x^2 n(x,t) dx = 2Dt \quad (1.4)$$

Juntando agora as 1.4 com a 1.1 teremos que:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} \quad (1.5)$$

E lembrando que $k_B = \frac{R}{N_A}$ sendo R a constante universal dos gases e N_A o número de Avogadro, podemos por fim escrever que:

$$N_A = \frac{RT}{3\pi\eta\langle x^2 \rangle a} t \quad (1.6)$$

A equação 1.6 relaciona o número de Avogadro com o deslocamento quadrático médio $\langle x^2 \rangle$ e o raio da partícula, a .

1.2 Modelo

As forças que presentes no movimento vertical (ao longo do eixo OY) das gotas são: força peso (\vec{P}), força elétrica (\vec{F}_{el}) devido as placas do capacitor, empuxo (\vec{E}) (as gotas estão imersas num fluido – ar) e força de atrito viscoso (\vec{F}_v) determinada pela lei de Stokes. Contudo algumas correções devem ser feitas devido ao tamanho microscópico do objeto analisado. A lei de Stokes diz que se um corpo é uma esfera de raio a , movendo-se num fluido de coeficiente de viscosidade η a uma velocidade v pequena o suficiente, a força de resistência viscosa será dada por [3]:

$$F_v = 6\pi\eta av \quad (1)$$

onde η , a e v correspondem a coeficiente de viscosidade, raio da esfera e velocidade respectivamente. Como nesse regime de análise o ar não pode ser considerado como um fluido homogêneo e contínuo, foi necessário efetuar uma correção no coeficiente de viscosidade. Essa correção em η depende do raio da esfera (a) e do livre caminho médio (λ), sendo esse último proporcional a pressão [4], o que leva ao valor de:

$$\eta = \frac{\eta_0}{\left(1 + \frac{b}{p.a}\right)} \quad (2)$$

onde η_0 apresenta uma dependência com a temperatura (T). Podemos aproximar o movimento como sendo descrito a velocidade constante o que nos leva a seguinte equação vetorial:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (3)$$

Que deve a ser aplicada a duas situações: (I) descida e (II) subida, que está esquematicamente representada na figura 01.

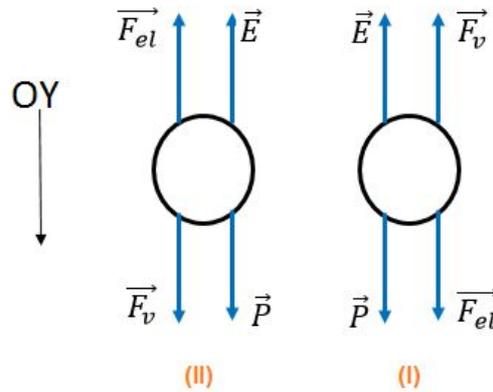


Figura 01: Representação esquemática das forças atuando na descida (I) e na subida (II) das gotas.

Considerando a orientação indicada na figura 01 temos o seguinte par de equações:

$$(I) \quad P + F_{el} - E - F_v = 0 \quad (4)$$

$$(II) \quad P - F_{el} - E + F_v = 0 \quad (5)$$

As equações 4 e 5 não foram escritas na forma vetorial, devido representarem as forças na direção OY. Podemos reescrever as forças presentes nessas equações considerando a gota como sendo uma esfera de raio a , o campo elétrico no interior de um capacitor de placas paralelas e o empuxo igual ao peso do fluido deslocado, o que nos leva a:

$$P = \rho_o \cdot V \cdot g \quad (6)$$

$$F_{el} = q \cdot E = q \cdot \frac{V}{d} \quad (7)$$

$$E = \rho_{ar} \cdot V_{deslocado} \cdot g \quad (8)$$

$$F_v = 6\pi a v \eta_0 \left(1 + \frac{b}{p \cdot a}\right)^{-1} \quad (9)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3 \quad (10)$$

Na equação (9) foi substituído a correção dada por (2). Com ρ_o , V , g , e v sendo densidade do óleo, diferença de potencial entre as placas do capacitor,

aceleração da gravidade local e velocidade das gotas respectivamente. A soma das equações (4) e (5) com a substituição de (6), (8) e (9) fornece:

$$a = -\frac{b}{2p} + \sqrt{\frac{b^2}{4p^2} + \frac{9\eta_0(v_{descida} - v_{subida})}{4g(\rho_{\acute{o}leo} - \rho_{ar})}} \quad (11)$$

2. Experimental

O aparato experimental utilizado na experiência encontra-se minuciosamente detalhado na figura 02. Um borrifador de gotas de óleo, figura 3(b), foi utilizado para gerar as gotas carregadas a serem analisadas. Essas entravam pelo orifício presente na parte superior do capacitor que permaneceu fechado (foi utilizado uma moeda) afim de evitar correntes de ar dentro do mesmo. O capacitor (figura 3(a)) era constituído de duas placas paralelas separadas por placas isolantes com duas aberturas afim de permitir entrada de luz no sistema e também campo de visão para a câmera digital. As aberturas eram fechadas com vidros para que não aja correntes de ar dentro do sistema. A câmera estava conectada a um computador de uso pessoal e utilizando o software **VideoPoint 2.5** foi efetuado gravações de vídeo para análise posterior.

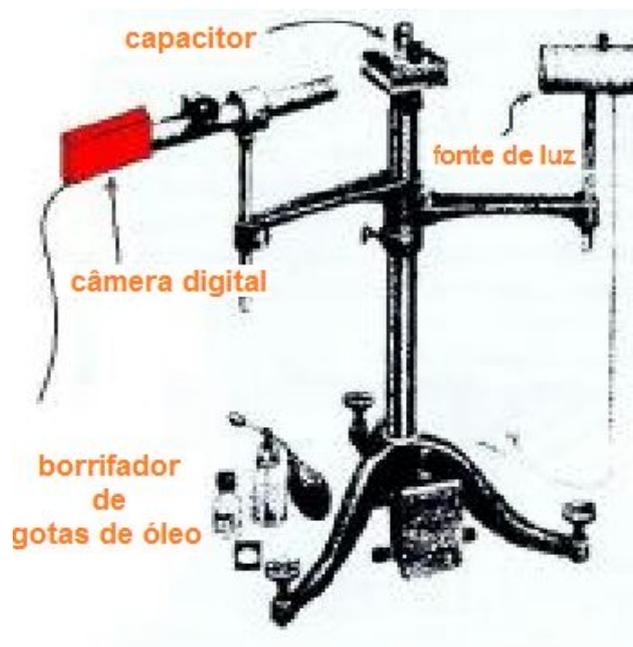


Figura 02: Aparato experimental utilizado na experiência [5].

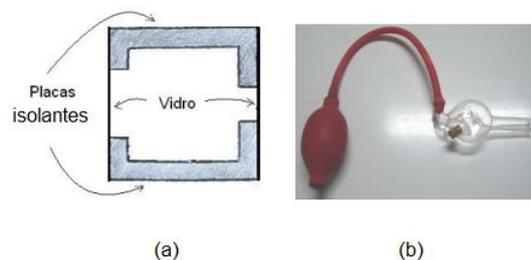


Figura 03: (a) vista superior do capacitor de placas paralelas; (b) borrifador de gotas de óleo.

A figura 04 mostra o esquema do posicionamento do conjunto.

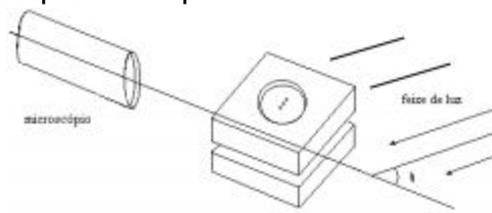


Figura 04: Esquema do posicionamento do conjunto óptico em relação ao condensador [5].

Após verificação do alinhamento de todo o sistema foi ajustado o foco da câmera utilizando um fio de arame inserido dentro do capacitor. Para verificar a qualidade dos vídeos a ser produzido, o ajuste final do foco foi feito borrifando gotas de óleo dentro do sistema. Foi considerado pronto para gravação a posição da fonte de luz e/ou câmera que permitisse a visualização das gotas com a máxima intensidade de brilho. Foram gravados cerca de 25 vídeos o que permitiu a obtenção dos dados de movimento de 42 gotas, em média de 2~3 gotas por vídeo. A obtenção da posição das gotas em função do tempo foi obtida utilizando o software gratuito **Tracker**, que necessitava de calibração afim de efetuar a conversão de pixel/s para cm/s. Essa calibração consistiu da tomada de foto de uma escala colocada na mesma posição que o capacitor utilizando a câmera digital, figura 05.

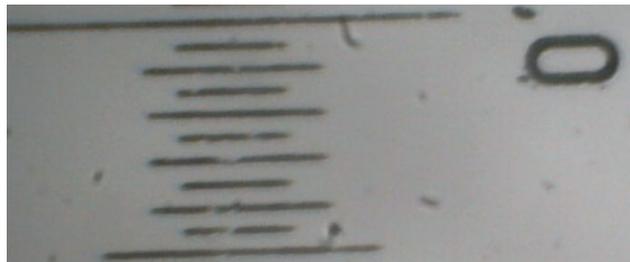


Figura 05: Foto tirada da escala com a câmera digital acoplada ao microscópio.

Foi colocada uma diferença de potencial de 150 V entre as placas do capacitor. Utilizando um paquímetro determinamos a distância entre as placas no valor **$d=0,4010(3)$ cm**. Foram tomadas medidas em diferentes posições e por diferentes experimentadores, sendo o resultado apresentado a média dessas medidas. Utilizando a equação 7 temos que o campo elétrico dentro das placas paralelas era no valor (módulo) de **$E = 374,0(3)V/cm$** . As condições do laboratório no dia da tomadas de dados está representado na tabela a seguir.

T (°C)	20,6
Umidade do ar (%)	58
P (cmHg)	7,076

Tabela 01: Tabela com os dados das condições de medida do dia 15/05/2015.

3. Resultados e Discussão

Conforme exposto na introdução, nossa proposta é utilizar software de análise de vídeo para o estudo do movimento browniano. Para esse estudo será necessário preliminarmente calcular o raio das gotas de óleo em suspensão e a partir dessa, calcular a correção na viscosidade do ar.

3.1 Cálculo do raio da gota

Utilizando o software Tracker no modo de análise automática foi possível obter a posição da gota em função do tempo. As gotas foram analisadas seguindo o critério daquelas que descreviam sucessivos movimentos de subida e descida sem serem perdidas de vista durante o maior tempo possível em cada vídeo gravado. As figuras 1 e 2 apresentam os resultados encontrados para o movimento ascendente e descendente, respectivamente.

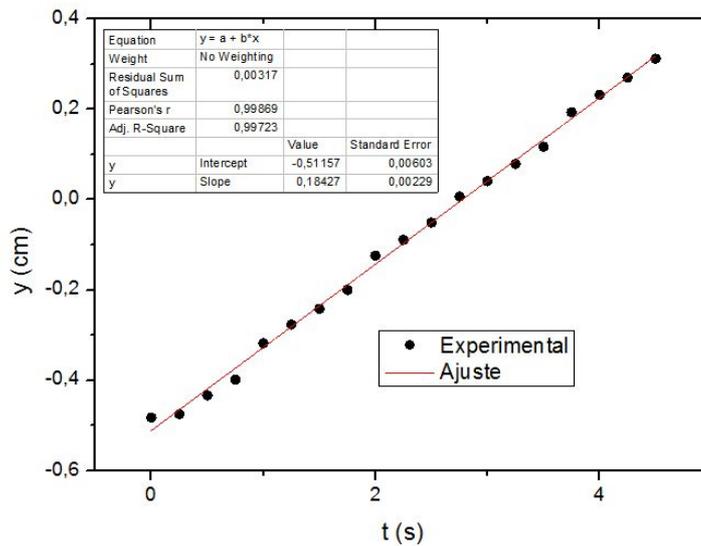


Figura 1: Gráfico do movimento de subida da gota em função do tempo.

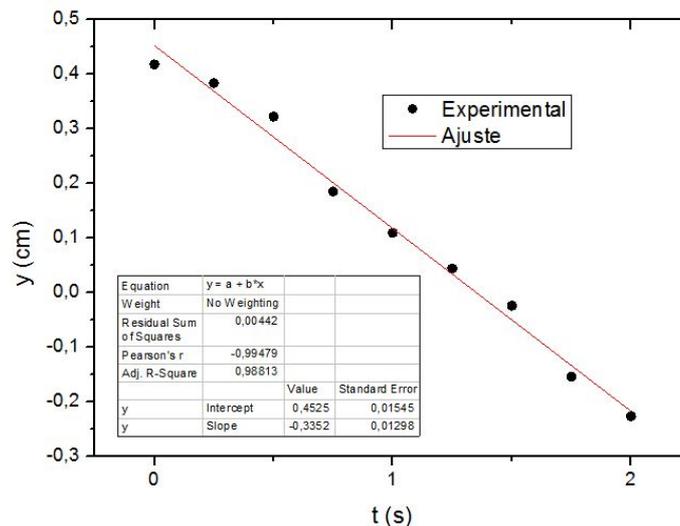


Figura 2: Gráfico do movimento de descida da gota em função do tempo.

Os gráficos com os respectivos ajustes foram realizados no software Origin. As curvas ajustadas foram obtidas através do método dos mínimos quadrados. Para obtenção dos raios, foi utilizada a fórmula obtida anteriormente.

$$a = -\frac{b}{2p} + \sqrt{\frac{b^2}{4p^2} + \frac{9\eta_0(v_d - v_s)}{4g(\rho_{\text{oleo}} - \rho_{\text{ar}})}} \quad (3.1)$$

Onde:

$b = 6,17 \cdot 10^{-4}$ (cm.Hg).cm, constante

$p = 70,470 \pm 0,005$ cm.Hg, *pressão medida no laboratório*

$\eta_0 = (1,840 \pm 0,005) \cdot 10^{-4}$ P(cgs)

$\rho_{\text{oleo}} = 0,8312 \pm 0,0036$ g/cm³, *densidade do óleo utilizado*

$g = 978,622$ cm/s², *valor da aceleração da gravidade no laboratório*

$\rho_{\text{ar}} = 0,0011114 \pm 0,0000019$ g/cm³, *valor da densidade do ar já corrigido com a umidade relativa medida no laboratório¹.*

A incerteza do raio da gota é dada por:

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial p}\right)^2 \sigma_p^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \rho_{\text{ar}}}\right)^2 \sigma_{\rho_{\text{ar}}}^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \rho_{\text{oleo}}}\right)^2 \sigma_{\rho_{\text{oleo}}}^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \eta_0}\right)^2 \sigma_{\eta_0}^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial v_{\text{subida}}}\right)^2 \sigma_{v_{\text{subida}}}^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial v_{\text{descida}}}\right)^2 \sigma_{v_{\text{descida}}}^2$$

explicitando as derivadas parciais acima, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial p} &= \frac{b}{2p^2} - \frac{0,25b^2}{p^3 \cdot \sqrt{\frac{9\eta_0(v_d - v_s)}{4g(\rho_{\text{oleo}} - \rho_{\text{ar}})}}} \\ \frac{\partial a}{\partial \eta_0} &= \frac{1,125(v_d - v_s)}{g(\rho_{\text{oleo}} - \rho_{\text{ar}}) \sqrt{\frac{9\eta_0(v_d - v_s)}{4g(\rho_{\text{oleo}} - \rho_{\text{ar}})} + \frac{b^2}{4p^2}}} \\ \frac{\partial a}{\partial v_{\text{subida}}} &= \frac{1,125\eta_0}{g(\rho_{\text{oleo}} - \rho_{\text{ar}}) \sqrt{\frac{9\eta_0(v_d - v_s)}{4g(\rho_{\text{oleo}} - \rho_{\text{ar}})} + \frac{b^2}{4p^2}}} \\ \frac{\partial a}{\partial v_d} &= -\frac{1,125\eta_0}{g(\rho_{\text{oleo}} - \rho_{\text{ar}}) \sqrt{\frac{9\eta_0(v_d - v_s)}{4g(\rho_{\text{oleo}} - \rho_{\text{ar}})} + \frac{b^2}{4p^2}}} \\ \frac{\partial a}{\partial \rho_{\text{oleo}}} &= -\frac{1,125\eta_0(v_d - v_s)}{g(\rho_{\text{oleo}} - \rho_{\text{ar}})^2 \sqrt{\frac{9\eta_0(v_d - v_s)}{4g(\rho_{\text{oleo}} - \rho_{\text{ar}})} + \frac{b^2}{4p^2}}} \\ \frac{\partial a}{\partial \rho_{\text{ar}}} &= \frac{1,125\eta_0(v_d - v_s)}{g(\rho_{\text{oleo}} - \rho_{\text{ar}})^2 \sqrt{\frac{9\eta_0(v_d - v_s)}{4g(\rho_{\text{oleo}} - \rho_{\text{ar}})} + \frac{b^2}{4p^2}}} \end{aligned}$$

Com essas expressões temos que o valor do raio da gota analisada é de:

$$a = (2,7 \pm 0,6) 10^{-4} \text{ cm}$$

3.2 Correção da viscosidade do ar

A Força de Atrito Viscoso decorre da Lei de Stokes, que diz que a força de atrito viscoso de um objeto imerso em um fluido é proporcional à velocidade de deslocamento do objeto e de sentido contrário ao mesmo. A Lei de Stokes tem limites a serem observados:

- A partícula deve ser uma esfera lisa e rígida;
- A não-homogeneidade do meio deve ser menor, relativamente, que o tamanho da esfera;
- O deslocamento total é muito maior que as dimensões da esfera;
- Não há escorregamento do meio na superfície da esfera;
- A velocidade de deslocamento da esfera é tal que a resistência ao movimento é totalmente devido à viscosidade e não à inércia do meio ao deslocamento do objeto.

Temos teste caso a expressão para a Força de atrito dada por:

$$F_{at. visc.}^{\vec{}} = -6\pi\eta a\vec{v} \quad (3.2)$$

No experimento original de Millikan as relações entre as velocidades (diferenças e somas) e as cargas para cada gota estavam resolvidas, mas os valores variavam de gota para gota. Os esforços foram dirigidos, então, para a determinação de uma constante de proporcionalidade entre carga e velocidade. Foi a partir dessa investigação que se chegou à conclusão de que a Lei de Stokes deveria ser corrigida. A falha foi que as gotas eram tão pequenas que o meio – ar – não poderia ser considerado contínuo e homogêneo. Esse fator dependia do raio da esfera (a) e do caminho médio livre do meio (l). Como l , por sua vez é proporcional à pressão do meio (p), chegou-se ao valor:

$$\eta = \frac{\eta_0}{(1+\frac{l}{pa})} \quad (3.3)$$

Sendo que η_0 depende da temperatura do meio (T). O valor de η_0 foi obtido através da figura 3, disponível para consulta no laboratório didático do IFUSP.

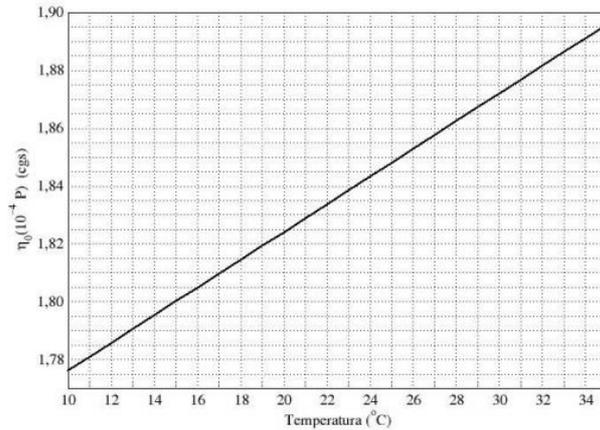


Figura 03 :Gráfico para correção do coeficiente de viscosidade do ar em uma dada temperatura [8].

A temperatura no dia da obtenção dos dados era de 20,6 °C o que nos leva a $\eta_0 = 1,840 \cdot 10^{-4} P (cgs)$.

A incerteza de η é obtida pela expressão:

$$\sigma_{\eta}^2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial b} \sigma_b\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial a} \sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \eta_0} \sigma_{\eta_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial P} \sigma_P\right)^2 \quad (3.4)$$

Combinando (Eq. 3.3) e (Eq. 3.4) podemos escrever:

$$\eta = (1,782 \pm 0,013) \cdot 10^{-4} P (cgs).$$

3.3 Cálculo do número de Avogadro

O movimento browniano ocorre em todas as direções, contudo nesse trabalho foi analisado o efeito apenas na componente x. Essa direção foi escolhida, pois não é possível garantir que o valor do campo elétrico aplicado seja exato para que a força elétrica sobre essa gota equilibre a força gravitacional. O vídeo gravado tinha duração de 20 minutos. A figura 3 mostra a análise efetuada utilizando o software em trajetória automática.

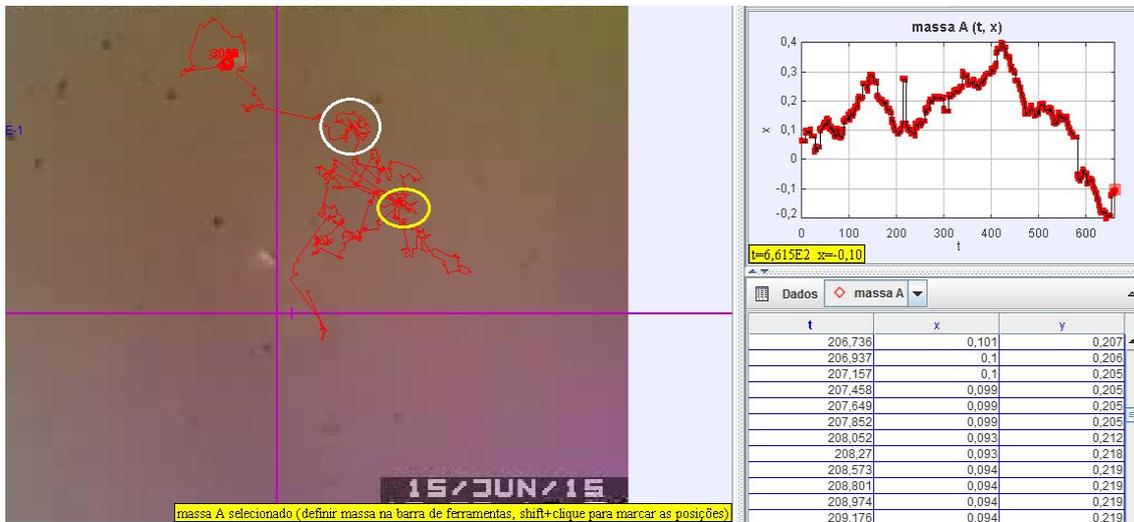


Figura 3: Análise do movimento da gota de óleo utilizando o software Tracker em busca automática.

Cabe aqui algumas ressalvas. Na figura são destacadas duas regiões, essas são exemplos em que ocorre o movimento Browniano. Não foi possível analisar o vídeo como um todo pois percebemos durante a experiência a necessidade de corrigir o valor do campo elétrico aplicado durante o passar do tempo. Podemos explicar isso como devido ao fato da gota lentamente evaporar, o que muda o valor da quantidade de carga sobre a mesma e também as oscilações na quantidade de carga devido a colisões com outras gotas existentes. Quanto as fontes de erros, é possível identificar duas fontes, resultado do processo para determinar as posições e tempo das partículas e as incertezas dos instrumentos de medida; temperatura, viscosidade do líquido e raio das partículas. Das incertezas dos instrumentos, foram utilizados os valores encontrados disponíveis no laboratório didático do IFUSP. Os erros para as medidas da posição x_i são estatísticos. Isto é, ao utilizarmos o programa de análise de vídeo para as medidas das posições das partículas, os valores sob as mesmas condições têm a mesma probabilidade de ser por excesso ou por falta. E, ao determinar $\langle x^2 \rangle$ as incertezas se compensam para um número grande de medidas. Foi obtido o histograma abaixo com respeito a uma tomada de dados com duração de 5 minutos no tracker.

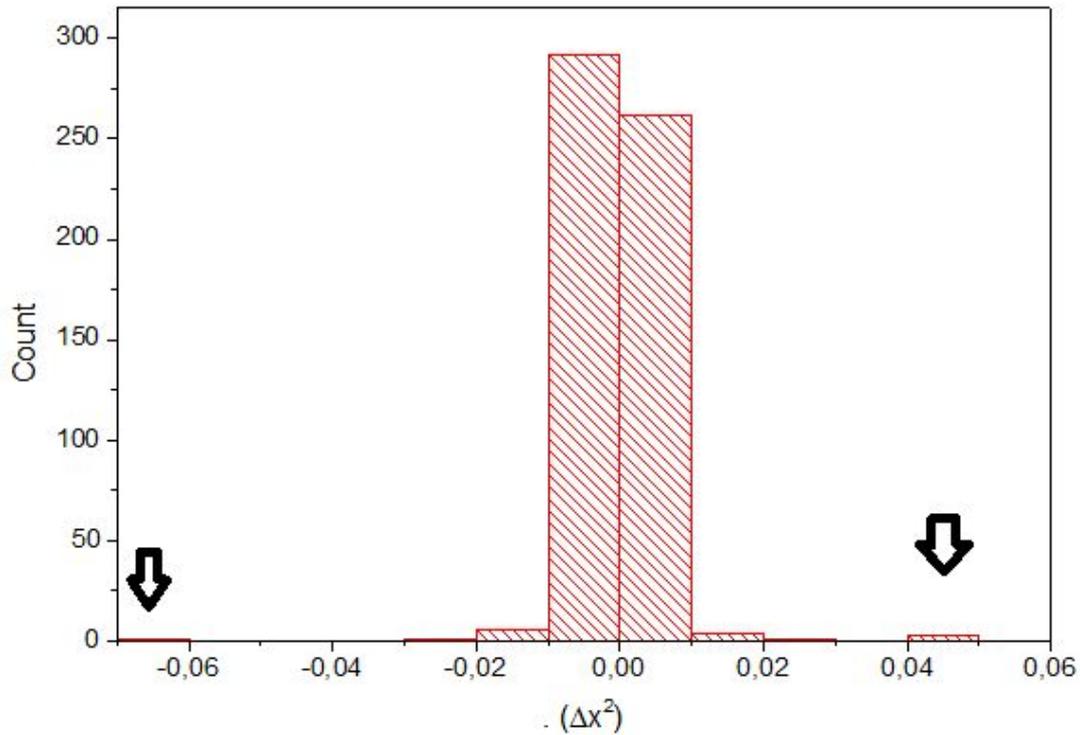


Figura 4: Análise do movimento de uma gota por 4 minutos.

Pelo histograma acima é possível verificar que os dados estão concentrados em sua maioria ao redor do zero. Existem dados afastados dessa região (indicado pelas setas), esses devem ser descartados, pois não são atribuídos como causa do movimento Browniano.

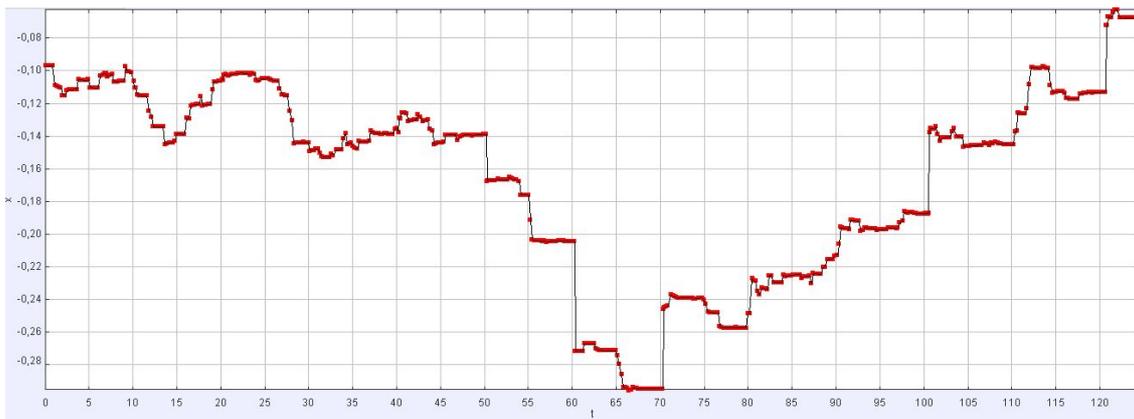


Figura 5: Posição em função do tempo.

A figura 5 obtida diretamente do tracker justifica a necessidade de descartar alguns dados. Na figura acima, observamos a existência de grandes deslocamentos, o que não é compatível com o modelo do MB que implica passos iguais com igual probabilidade de ocorrência.

Removendo os pontos suspeitos seguindo o critério de grandes deslocamentos e considerando um intervalo de tempo menor, $t=222$ s, obtivemos o histograma abaixo.

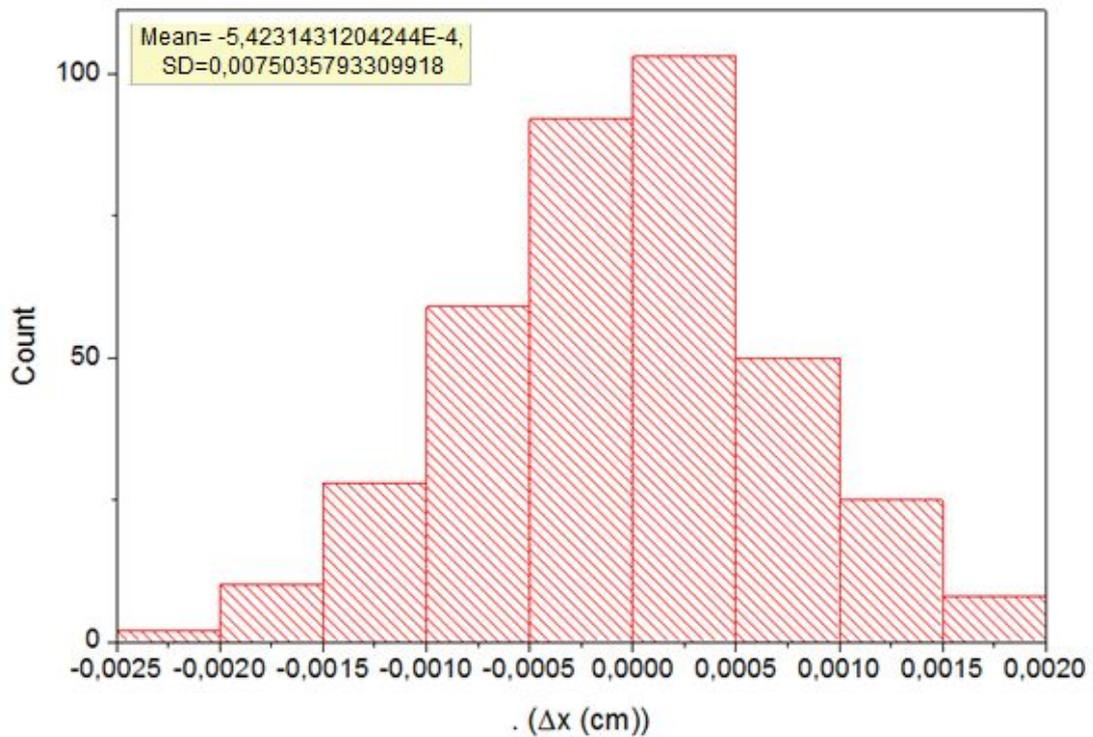


Figura 6: Análise de ~3,7 minutos.

Foi utilizada análise estatística do software Origin para, a partir dos dados obtidos, encontrar o valor de $\langle x^2 \rangle = SD^2 = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2$. É possível mostrar que a partir de uma distribuição normal a variância é dada por: $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

Supondo que a probabilidade da gota ir para direita é igual a probabilidade da gota se deslocar para esquerda temos que em média $\langle x \rangle \approx 0$ o que nos leva a $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle$. Para o cálculo do número de Avogadro será considerado os dois métodos, o valor obtido diretamente pela análise dos dados ($\langle x^2 \rangle$) e dos parâmetros da Gaussiana ajustada aos valores experimentais, σ^2 . A gaussiana será ajustada sobre a frequência absoluta em função dos valores centrais de cada intervalo do histograma.

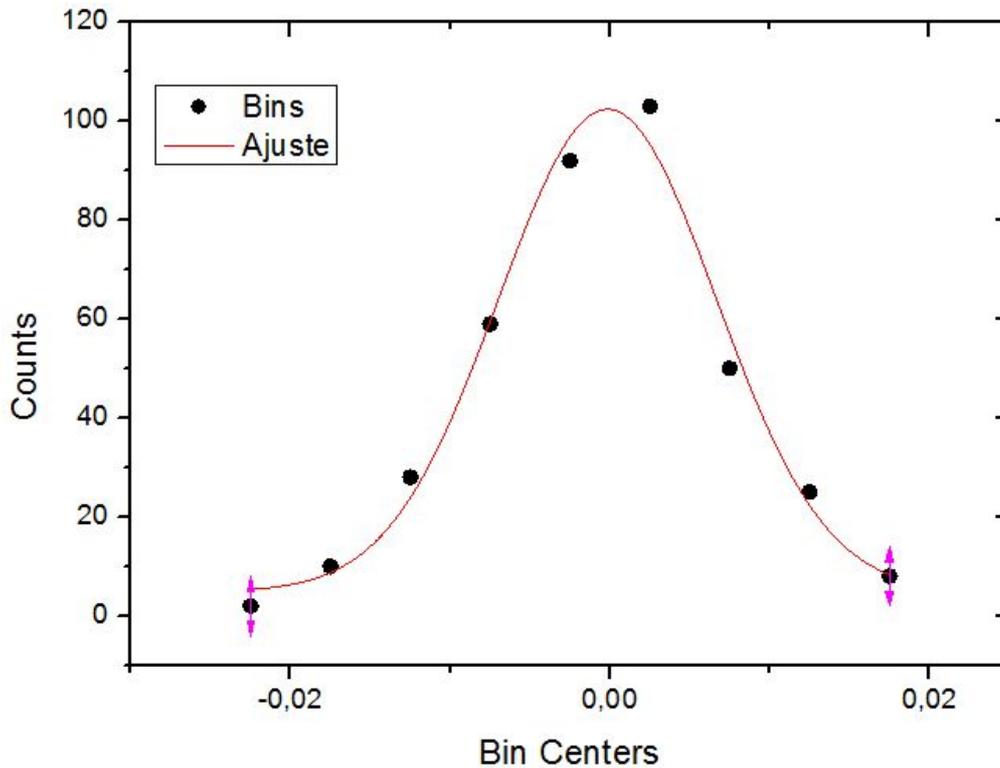


Figura 07: Gaussiana ajustada sobre o histograma da Figura 6.

O gráfico de resíduo com os respectivos valores das constantes do ajuste gaussiano é encontrado na figura 08.

Model	Gauss	
Equation	$y=y_0 + (A/(w*\sqrt{\pi/2}))\exp(-2*((x-x_c)/w)^2)$	
Reduced Chi-Sqr	33,36256	
Adj. R-Square	0,97538	
	Value	Standard Error
Counts	y0	4,8761 4,19217
Counts	xc	-1,62411E-4 3,67522E-4
Counts	w	0,01365 0,00109
Counts	A	1,66784 0,16942
Counts	sigma	0,00682 5,45428E-4
Counts	FWHM	0,01607 0,00128
Counts	Height	97,51958 5,47322

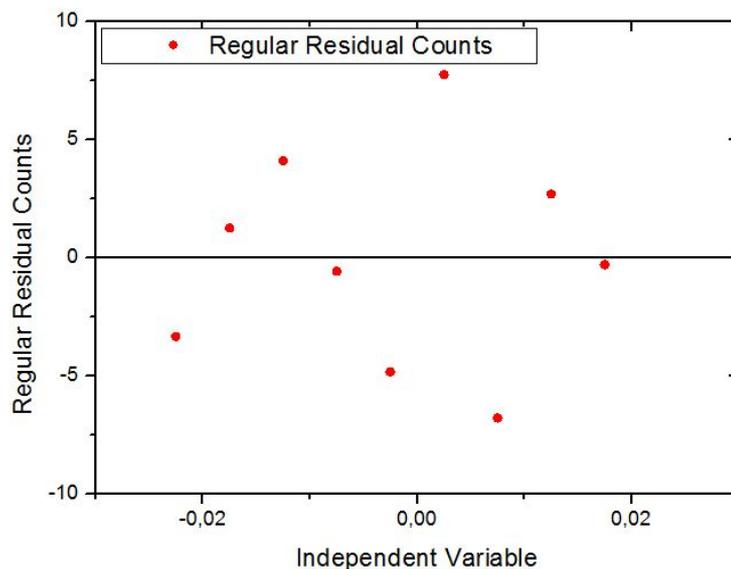


Figura 8: Valores das constantes ajustadas e gráfico de resíduos

O gráfico de resíduos acima não apresenta uma tendência clara. A larga dispersão ao redor do zero pode ser atribuída ao fato de não garantir que todos os pontos não inerentes ao movimento Browniano foram removidos para confecção do histograma, o que naturalmente influi diretamente na gaussiana ajustada. O valor de $\sigma^2=(4,6\pm 0,5)\cdot 10^{-5} \text{ cm}^2$ é menor que o encontrado para $\langle x^2 \rangle$

o que mostra claramente que $\langle x \rangle \neq 0$. Utilizando essas informações mais as constantes tabeladas acima foi possível calcular o número de Avogadro pelos dois métodos:

$$N_{Avogadro} = \frac{4.R.T}{6.\pi.\eta.a.\langle x^2 \rangle} t$$

	σ^2	$\langle x^2 \rangle$
$N_{Avogadro}$	$(4,7 \pm 0,6).10^{23}$	$(4,1 \pm 0,9).10^{23}$

As incertezas acima foram estimadas levando em conta a incerteza do raio da gota, da temperatura (metade da menor divisão do aparelho) e da viscosidade do ar (no caso do σ^2 também foi levado em conta sua incerteza). Os valores encontrados são compatíveis dentro da incerteza com o valor disponível na literatura, a saber: $(N_a)_{literatura} = 6,02214129(27).10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Conclusão

A ideia desse trabalho era a aplicação dos conceitos aprendidos na disciplina de Métodos estatísticos em física experimental (MEFE). Essa experiência atendeu a proposta inicial, em vista do forte caráter estatístico que rege o experimento. O valor calculado do número de Avogadro é compatível com o reportado em literatura, contudo vale ressaltar que a incerteza encontrada era maior que 10%. É reconhecido a necessidade de refinar o processo de obtenção do raio da gota para uma diminuição do respectivo valor da incerteza, assim como no processo envolvendo $\langle x^2 \rangle$.

Referências

Albert Einstein, *Investigations on the Theory of the Brownian Movement* (Dover Publications, New York, 1956), texto editado, com notas, por R. Fürth.

Abraham Pais, *Sutil é o Senhor ... A Ciência e a Vida de Albert Einstein* (Editora Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1995).

Laszlo Tisza, *Generalized Thermodynamics* (The MIT Press, Boston, 1966).

Ludwig Boltzmann, *Lectures on Gas Theory* (Dover Publications, New York, 1995).

L. Landau e E. Lifchitz, *Mécanique des Fluides* (editora Mir, Moscou, 1967).

Josiah Willard Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics* (Scribner's, New York, 1902). Há uma edição mais recente da Dover.