

Projeto de Métodos Estatísticos em Física Experimental:  
**Estudo do Movimento Amortecido de um Sistema  
Massa-Mola**

**Alexandre dos Santos Silva 8068098**

**Lucas Carrazzoni Mirabella 8083151**

**Luan Delarion 8604404**

**Felipe Abdalla Tiradentes de Souza 9010835**

**Professor: Zwinglio Guimarães**

Departamento de Física Experimental – Instituto de Física da USP

## Sistema massa mola com amortecimento análise via Matlab

### Introdução

É feito um estudo do movimento de um sistema massa mola através da utilização de experimentos virtuais disponibilizados no site [fep.if.usp.br/~fisfoto/oscilador amortecido](http://fep.if.usp.br/~fisfoto/oscilador_amortecido) [1] pelos professores Vitor Roberto Vanin (IFUSP) e Nora Lia Maidana (IFUSP) e sua equipe. Maiores detalhes sobre procedimentos e materiais utilizados na tomada das imagens podem ser encontrados na página dos experimentos virtuais.

### Dados iniciais

As características do carrinho e das molas são:

$$m_{\text{carrinho}} = 289.4 \pm 0.2 \text{ g}$$

$$k_1 = 5.5 \pm 0.3 \frac{N}{m}$$

$$k_2 = 5.7 \pm 0.4 \frac{N}{m}$$

### Metodologia

O experimento é feito utilizando um trilho de ar, um conjunto de molas fixas e uma câmera. A Fig.1 mostra um panorama geral sobre o experimento e a captura das imagens. O carrinho é solto da posição X1, onde é gravado todo seu movimento. A posição X1 é utilizada posteriormente para a conversão de pixel para unidades de medida padrão de distância.

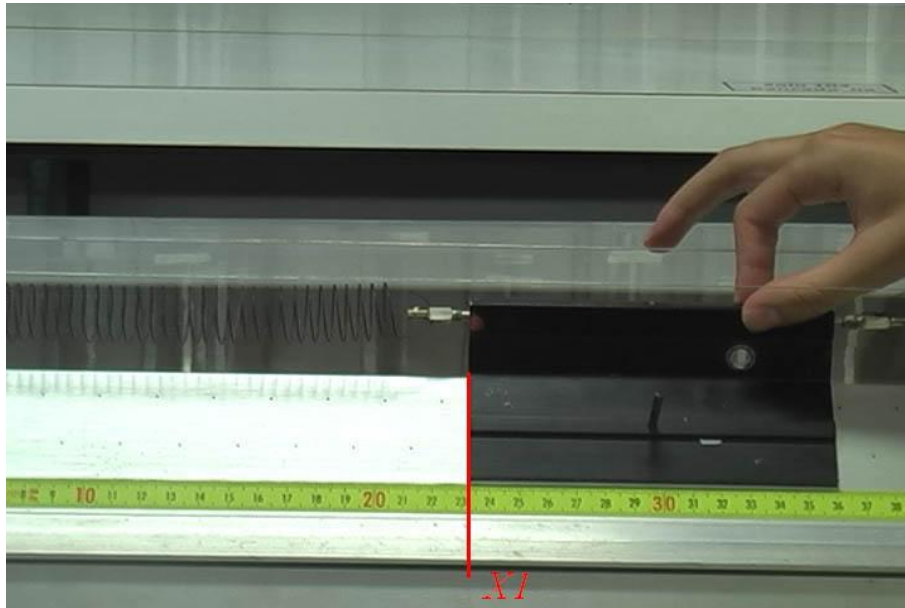


Fig. 1 – Imagens com etapas do experimento. A tomada das imagens é feita após o carrinho ser solto da posição X1. A partir da análise das imagens utilizando o software Matlab(2013a) é possível checar o amortecimento do sistema massa mola, sem necessariamente analisar imagem por imagem manualmente.

A equação geral para um movimento mecânico amortecido é dado através da soma das forças que atuam no sistema. A Eq. 4 abaixo mostra o modelo teórico empregado neste experimento, onde  $b$  é um fator de amortecimento do sistema que depende linearmente da velocidade,  $m$  é a massa do sistema massa-mola e  $k$  é a constante de elasticidade da mola.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{b}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{k}{m} x = -\gamma \frac{dx}{dt} - \omega^2 x \quad \text{Eq.1}$$

Onde  $\gamma = \frac{b}{m}$  é a constante de amortecimento.

Sabemos que a massa irá oscilar, sobre o trilho de ar, diminuindo sua amplitude de oscilação e que isso é compatível com a condição de amortecimento subcrítico no qual

$$\frac{\gamma}{2} < \omega_0$$

Resultando no seguinte modelo teórico:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}}(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$$

De acordo, com a Eq.1 uma solução possível, de acordo com os parâmetros envolvidos no sistema é dada pela Eq.2 abaixo.

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{Eq. 2}$$

Seguindo essa linha, é possível, com uma simples implementação no software Matlab(2013a), analisar de forma automática as imagens do experimento. Em geral a representação de uma imagem é feita através de uma matriz. Desse modo, é escolhida uma linha desta matriz representada pela linha pontilhada em vermelho na Fig. 2, onde é possível observar a transição da passagem do carrinho sob o trilho.

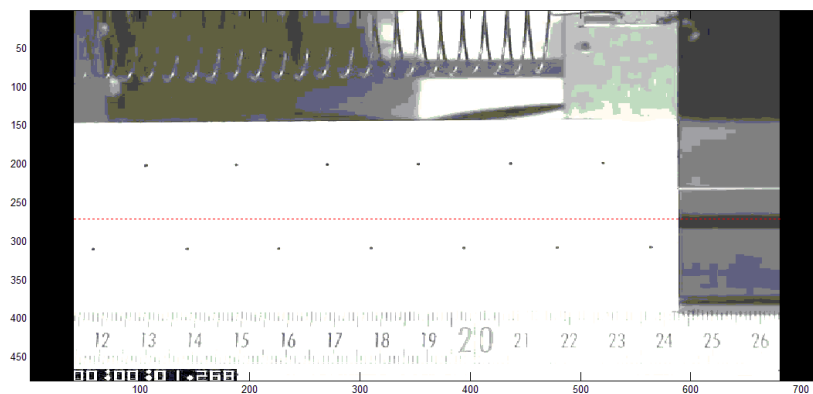


Fig. 2 – Representação de imagem via Matlab. A linha tracejada representa onde é tomada a análise do movimento.

## Resultados

A Fig. 3 apresenta os valores correspondentes da matriz para a linha tracejada da Fig. 2. A partir dos dados da Fig. 3 é possível programar um pequeno código e observar

o movimento do carrinho (o código utilizado se encontra em anexo). Os resultados são apresentados na Fig. 4.

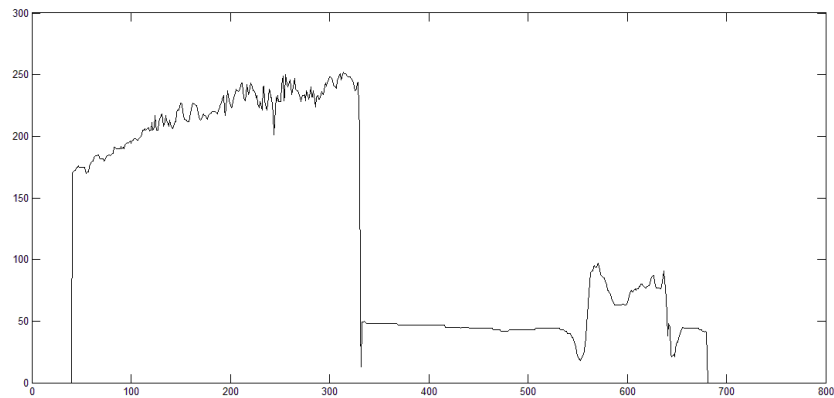


Fig. 3– Representação quantitativa da linha tracejada em vermelho.

A Fig. 4 abaixo apresenta o resultado para análise frame por frame do experimento.

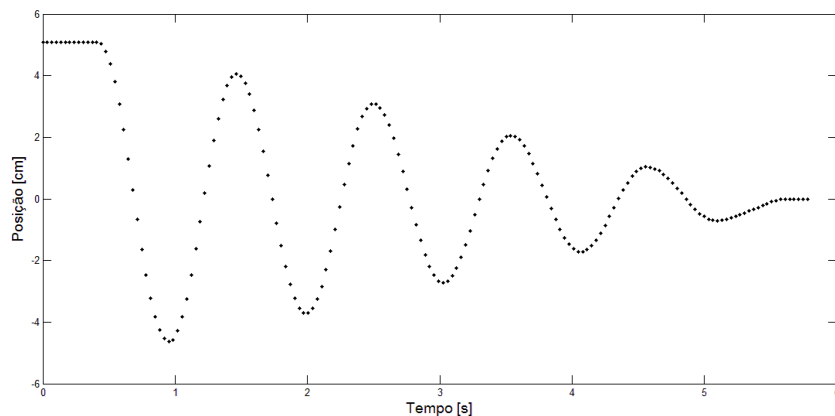


Fig. 4 – Resultados obtidos para o movimento amortecido.

A utilização de métodos automáticos na coleta de dados possui inúmeras vantagens como pode ser visto neste experimento prático, em particular, podemos atribuir uma redução significativa em coleta de dados juntamente com redução de erros grosseiros.

Com o intuito de estimar as incertezas para o experimento desse trabalho é feita a hipótese de que os dados seguem uma distribuição gaussiana. Além disso, devido à compatibilidade dos pontos com a função ajustada, assumimos que a mesma é a função correta para o conjunto de dados. É feita a aproximação de incertezas iguais para os

pontos coletados no intervalo de [0; 3,1] segundos. De acordo com [2], as incertezas estimadas a partir de  $\chi^2$  são

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n [y_i - f_i]^2 \quad \text{Eq.3}$$

Desse modo é possível assumir uma aproximação para incertezas envolvidas no experimento, haja vista as hipóteses assumidas acima (a incerteza do tempo é assumida como sendo 0,001s). O resultado é mostrado na Fig. 6. Existe uma boa concordância entre a curva ajustada e os dados experimentais. A análise de resíduos não indica que a função ajustada é incorreta.

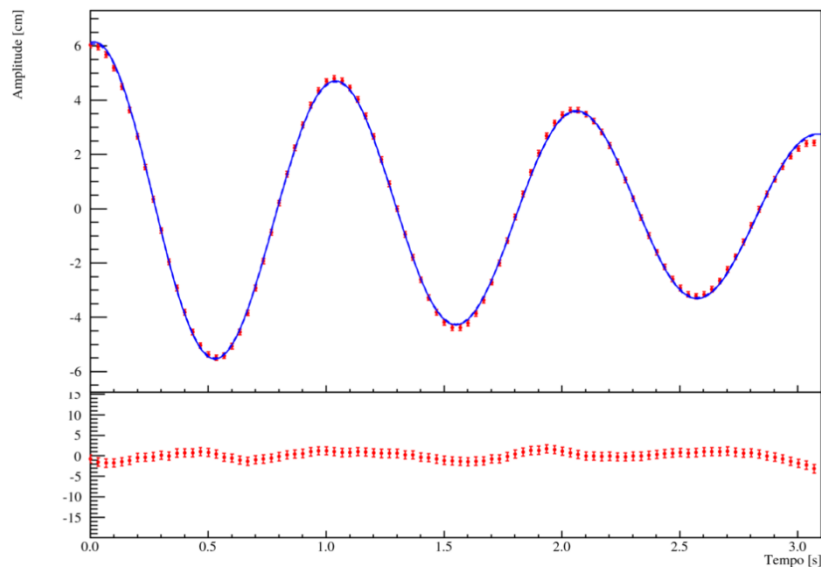


Fig. 6 Resultado para aproximação para incertezas. O resultado mostra boa concordância com os valores fornecidos pelo experimento juntamente com a curva ajustada.

De acordo com Fig. 6 os valores para o ajuste

$$x(t) = e^{-0.257 s^{-1}} \left( 6.18 \text{ cm} \cos \left( 6.146 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t \right) + 0.92 \text{ cm} \sin \left( 6.146 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t \right) \right) - 0.079 \text{ cm}$$

É feito também a comparação dos valores de frequência de oscilação para a função ajustada juntamente com os valores fornecidos no site de experimentos virtuais para a massa e constante elástica da mola envolvida no experimento. Dentro do intervalo de incerteza, os valores se interceptam, e são compatíveis:

$$\omega_{ajuste} = 6.145 \pm 0.004 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{Esperado} = 6.21 \pm 0.14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

onde  $\omega_{ajuste}$  foi o que obtivemos pela função ajustada, e  $\omega_{Esperado}$  calculado pelos parâmetros fornecidos no próprio FisFoto [1] para o experimento.

A constante que não faz parte do modelo, mas aparece nos resultados pode ser devido a erro na conversão dos valores, porém seu valor é menor do que as incertezas consideradas. Partindo do princípio de que esse parâmetro ajustado segue uma distribuição de densidade normal, é calculada a probabilidade de esse parâmetro exceder o valor ajustado, ou seja:

$$P(x_o \geq 0.079) = \int_{0.079}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma} dx \approx 0$$

Isso significa que a probabilidade desse parâmetro ser maior do que o obtido é praticamente nulo, e mostra que possivelmente não é devido a flutuações estatísticas, mas sim a um erro sistemático.

De acordo com os parâmetros ajustados para a função, temos os seguintes valores para as constantes que melhor se ajustam aos dados experimentais:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}}(a \cos(\omega t) + b \text{sen}(\omega t)) + x'_o$$

$$\omega = 6.146 \pm 0.004 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$a = 6.18 \pm 0.30 \text{ cm}$$

$$b = 0.92 \pm 0.09 \text{ cm}$$

$$\gamma_o = -0.2567 \pm 0.0038 \text{ s}^{-1}$$

$$x'_o = -0.079 \pm 0.011 \text{ cm}$$

Todos os cálculos que envolvem incerteza nos parâmetros foram feitos de acordo com propagação de incerteza, considerando, evidentemente, as covariâncias entre os parâmetros. Em seguida, temos a matriz de correlação entre os parâmetros:

#### Matriz de correlação

$$\begin{bmatrix} 1.00 & -0.77 & 0.01 & -0.05 & 0.05 \\ -0.77 & 1.00 & -0.20 & -0.13 & 0.00 \\ 0.01 & -0.20 & 1.00 & 0.83 & -0.25 \\ -0.05 & -0.13 & 0.83 & 1.00 & -0.24 \\ 0.05 & 0.00 & -0.25 & -0.24 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Fig. 7 Matriz de correção obtida pelo Webroot com o ajuste feito

De acordo com a Fig.7, vemos que os parâmetros  $\gamma_0$  e  $a$  são correlacionados negativamente, e os parâmetros  $\omega$  e  $b$  fortemente correlacionados positivamente.

## Conclusão

O objetivo principal do trabalho era analisar oscilações amortecidas através do experimento virtual cedido pelo FisFoto. Nessa atividade, foram utilizados os conhecimentos adquiridos pelos membros do grupo para ajustar uma função que descrevesse os pontos obtidos da experiência, e partindo da hipótese de que o modelo é bem ajustado, calcular as incertezas da medida através do  $\chi^2$ .

Apesar de a curva ter se ajustado melhor com um parâmetro que não era previsto teoricamente, foi feita a análise estatística acerca do modelo, e é possível concluir que o trabalho foi positivo, e de fato, descreve a experiência de oscilação amortecida para o sistema massa-mola, realizado pela equipe do FisFoto.

Basicamente, os resultados mostraram compatibilidade entre os valores de frequência esperado, e calculado, além da função ajustada apresentar concordância com os pontos, e o gráfico de resíduos não ter nenhum padrão claro.

O experimento possibilitou a aplicação dos conhecimentos adquiridos na disciplina além de outros, como programação, resolução de equações diferenciais, e possibilita a divulgação do trabalho dos Professores Vito Roberto e Nora Maidana aos alunos do Instituto de Física.



## Apêndice

### A.1 – Rotina para obtenção dos pontos da posição em função do tempo (Para Matlab)

```
readerobj = VideoReader('teste.avi', 'tag', 'myreader1');
vidFrames = read(readerobj);
numFrames = get(readerobj, 'numberOfFrames');
contador = 1;
jj = 1;
N=zeros(1,170); // Reserva um vetor com zeros em todas as casas
x=zeros(1,171);
t=zeros(1,170);
x1 = 12.8; // Reserva uma variável para transformação da análise de
imagens para unidades conhecidas.
s1 = 551.03;

// Prepara o vídeo para análise
for k = 1 : numFrames
mov(k).cdata = vidFrames(:,:,k);
mov(k).colormap = [];
end

whos
hf = figure;
set(hf, 'position', [150 150 readerobj.Width readerobj.Height])

// Laço responsável para análise de imagens.

for ii=1: numFrames

a=mov(ii).cdata;
a_pb=rgb2gray(a);
figure(1)
image(a_pb)
```

```
colormap(gray);

b = a_pb(260,:); // Linha onde se pega a transição.

// Laço responsável por observar a transição do carrinho na linha
tracejada.
for jj = 1:660

if (b(jj)> 165);
N(jj) = 1;
else
N(jj) = 0;
end

if (b(jj+1)<180 && N(jj) == 1)

x(ii) = jj*0.0198929255;
end

end

figure(2)
imagem=double(a_pb);
plot(a_pb(260,:))
pause(.1)

end
```

## **Bibliografia**

[1] Experimentos de Física: FisFoto [fep.if.usp.br/~fisfoto/oscilador\\_amortecido](http://fep.if.usp.br/~fisfoto/oscilador_amortecido)

Professores Vito Roberto Vanin e Nora Lia Maidana

Sítio desenvolvido por: Igino G. V. Martins

Atualmente mantido por: Glauco G. M. Senhora

[2] VUOLO, JOSE HENRIQUE; FUNDAMENTOS DA TEORIA DE ERROS - 2ª EDIÇÃO. Editora Edgard Blücher

[3] WebROOT [webroot.if.usp.br](http://webroot.if.usp.br)