Energia Mecânica - Matheus Souza Gomes / N° USP: 7161048

Introdução

No trabalho, foi analisado o experimento "Energia Cinética" encontrado no portal web do Fisfoto, localizado no endereço http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto.

O experimento consistia em analisar um sistema massa-mola, formado por duas molas presas nas duas extremidades de um carrinho, que oscilava sobre um trilho de ar horizontal, com o menor atrito possível entre o carrinho e o trilho.

Tinha como objetivo analisar a relação entre a energia cinética e a energia potencial elástica com a energia mecânica total do sistema ao longo das oscilações, desprezando o atrito e a força gravitacional.

Materiais

Para a realização do experimento, foram utilizados os seguintes materiais:

- **Carrinhos**: Foram utilizados dois carrinhos, que consistiam em três placas plásticas, unidas de forma que o carrinho pudesse se encaixar perfeitamente sobre o trilho de ar.
- **Trilho de ar**: Tubo triangular e oco, que permitia a existência de um fluxo de ar, proveniente de uma mangueira conectada com um gerador. O trilho possuía orifícios em suas faces superiores, que permitiam a saída do ar em trânsito dentro dele, de forma a gerar uma força vertical sobre o carrinho (perpendicular ao movimento), evitando o contato do mesmo com o trilho e, assim, minimizando o atrito.
- **Macaco**: Suporte de altura responsável por manter balancear a direção do trilho, para que, no caso do experimento, mantivesse-o na horizontal. Assim, a força gravitacional sobre o carrinho seria perpendicular ao movimento, portanto, sem efeito sobre o experimento.
- **Gerador de fluxo de ar**: Dispositivo elétrico que gerava o fluxo de ar dentro do tubo, permitindo a saída do ar pelos orifícios.
- **Forquilha**: Consiste em uma junta acoplada a um elástico e a uma placa metálica. É usada para que o carrinho deforme o elástico até certo ponto, gerando o impulso inicial para que o carrinho possa ser lançado sobre o trilho.
- **Mangueira**: Responsável por conectar o gerador ao trilho.
- **Fita métrica**: Usado como o sistema de referência do movimento.
- **Filmadora**: Utilizada para registrar as imagens que mostrariam a posição do carrinho ao longo da fita métrica. Também possuía um cronômetro, que registraria o instante da obtenção da imagem.

Procedimento

A primeira parte da análise do experimento consistia em assistir a dois breves vídeos e observar o comportamento periódico do movimento dos carrinhos. Os vídeos podem ser encontrados no site do Fisfoto e mostram oscilações dos carrinhos sobre os trilhos. Em cada vídeo, foram usados carrinhos e/ou molas diferentes, o que alterava o período e a amplitude das oscilações.

Em seguida, foi realizada a tomada de dados, que podia ser feita observando as fotos disponíveis no site e anotando, para cada uma das 20 situações, todas as posições do carrinho registradas e seus respectivos instantes. Também foram anotadas as massas dos carrinhos e das molas e suas constantes elásticas. Cada situação representava uma oscilação completa do carrinho.

Depois, foram montadas tabelas para as 20 situações, contendo a posição do carrinho em função do tempo. Com esses dados, foram calculadas as velocidades em cada instante, e posteriormente, foram calculados os valores de energia cinética, potencial elástica e mecânica ao longo das oscilações. Para cada dado, foi calculada a sua incerteza.

Análise dos dados

Deslocamento e intervalo de tempo:

O deslocamento do carrinho pode ser definido através da equação

$$\Delta x(x, x_0) = x - x_0$$

Sendo x a posição final do carrinho e x_0 a sua posição inicial.

A incerteza do deslocamento ($\sigma_{\Delta x}$) pode ser obtida usando a fórmula da propagação de incertezas para grandezas não correlacionadas:

$${\sigma_{\Delta x}}^2 = \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial \bar{x}}\right)^2 {\sigma_x}^2 + \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial \bar{x}_0}\right)^2 {\sigma_{x_0}}^2$$

Derivando Δx, temos que:

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial x} = 1$$

e

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial x_0} = 1$$

Portanto,

$${\sigma_{\Delta x}}^2 = {\sigma_x}^2 + {\sigma_{x_0}}^2$$

$$\sigma_x = \sigma_{x_0}$$

$${\sigma_{\Delta x}}^2 = 2{\sigma_x}^2$$

$$\sigma_{\Delta x} = \sqrt{2}\sigma_x$$

Analogamente, a incerteza para um intervalo de tempo ($\sigma_{\Delta t}$) pode ser obtida por:

$$\sigma_{\Delta t} = \sqrt{2}\sigma_t$$

Sendo Δt o intervalo de tempo.

Velocidade

A velocidade do carrinho pode ser calculada por

$$v(\Delta x, \Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Sua incerteza foi calculada da seguinte forma:

$$\sigma_v{}^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial(\Delta x)}\right)^2 \sigma_{\Delta x}{}^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial(\Delta t)}\right)^2 \sigma_{\Delta t}{}^2$$

Derivando a velocidade no espaço e no tempo, temos que:

$$\frac{\partial v}{\partial(\Delta x)} = \frac{1}{\Delta x}$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial(\Delta t)} = -\frac{\Delta x}{(\Delta t)^2}$$

Logo:

$$\sigma_v{}^2 = \frac{\sigma_{\Delta x}{}^2}{(\Delta t)^2} + \frac{(\Delta x)^2 \sigma_{\Delta t}{}^2}{(\Delta t)^4} = \frac{1}{(\Delta t)^2}\left(\sigma_{\Delta x}{}^2 + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)^2}\sigma_{\Delta t}{}^2\right) = \frac{1}{(\Delta t)^2}\left(\sigma_{\Delta x}{}^2 + v^2 \sigma_{\Delta t}{}^2\right)$$

Mas temos que:

$$\sigma_{\Delta x} = \sqrt{2}\sigma_x$$
$$\sigma_{\Delta t} = \sqrt{2}\sigma_t$$

Portanto:

$$\sigma_v{}^2 = \frac{2}{(\Delta t)^2}\left(\sigma_x{}^2 + v^2 \sigma_t{}^2\right)$$
$$\sigma_v = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t}\sqrt{\sigma_x{}^2 + v^2 \sigma_t{}^2}$$

Neste experimento, em particular, a incerteza no tempo pode ser desprezada. Então:

$$\sigma_v = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t}\sigma_x$$

Energia cinética

A energia cinética do carrinho é dada por:

$$K(m, v) = \frac{mv^2}{2}$$

Sendo m a massa do carrinho.

Derivando a expressão acima nas suas duas variáveis, obtemos as seguintes relações:

$$\frac{\partial K}{\partial m} = \frac{v^2}{2}$$
$$\frac{\partial K}{\partial v} = mv$$

Logo:

$$\sigma_K{}^2 = \left(\frac{v^2}{2}\right)^2 \sigma_m{}^2 + (mv)^2 \sigma_v{}^2$$

$$\sigma_K{}^2 = \frac{m^2 v^4}{4}\left(\frac{\sigma_m{}^2}{m^2} + \frac{4\sigma_v{}^2}{v^4}\right)^2 = \left(\frac{mv^2}{2}\right)^2\left(\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_v}{v}\right)^2\right) = K^2\left(\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_v}{v}\right)^2\right)$$

$$\sigma_K = K\sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_v}{v}\right)^2}$$

Se $\Delta x \approx 0$, temos que $v \approx 0$, e assim, encontramos $\sigma_K = m\sigma_v{}^2$.

Energia potencial elástica

A energia potencial elástica do sistema é definida por:

$$U(x, x_0, k) = U(\Delta x, k) = \frac{k(\Delta x)^2}{2}$$

Sendo k a soma das constantes elásticas das duas molas presas ao carrinho e Δx, neste caso, o deslocamento do carrinho em relação à sua posição de equilíbrio.

Assim, incerteza da energia potencial elástica é calculada a partir de:

$$\sigma_U{}^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial k}\right)^2 \sigma_k{}^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \Delta x}\right)^2 \sigma_{\Delta x}{}^2$$

Aplicando as derivadas parciais de U:

$$\frac{\partial U}{\partial k} = \frac{(\Delta x)^2}{2}$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta x} = k\Delta x$$

Logo,

$$\sigma_U{}^2 = \left(\frac{(\Delta x)^2}{2}\right)^2 \sigma_k{}^2 + (k\Delta x)^2 \sigma_{\Delta x}{}^2 = \frac{k^2(\Delta x)^4}{4}\left(\frac{\sigma_k{}^2}{k^2} + \frac{4\sigma_{\Delta x}{}^2}{(\Delta x)^2}\right)$$

$$\sigma_U{}^2 = \left(\frac{k(\Delta x)^2}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2\right) = U^2\left(\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2\right)$$

$$\sigma_U = U\sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2} = U\sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}\sigma_x}{\Delta x}\right)^2}$$

Como as constantes elásticas das molas já estão prefixados no site, sem a presença de incertezas, suas incertezas foram desconsideradas no cálculo de σ_U. Logo,

$$\sigma_U = U\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}\sigma_x}{\Delta x}\right)^2} = U\frac{2\sqrt{2}\sigma_x}{|\Delta x|}$$

Como já mencionado acima, se $\Delta x \approx 0$,temos que $v \approx 0$. Assim, podemos considerara $\sigma_U = (k\Delta x)^2 \sigma_{\Delta x}{}^2 = k\sigma_{\Delta x}{}^2$.

Energia mecânica total

Para um sistema massa-mola na horizontal e com atrito, resistência do ar e outras forças dissipativas desprezíveis, considera-se apenas a energia potencial elástica do sistema e a massa do carrinho no cálculo da energia mecânica total:

$$E(K, U) = K + U$$

Então, a incerteza da energia mecânica é definida por:

$$\sigma_E{}^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial K}\right)^2 \sigma_K{}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial U}\right)^2 \sigma_U{}^2$$

Sendo:

$$\frac{\partial E}{\partial U} = 1$$
$$\frac{\partial E}{\partial K} = 1$$

Portanto:

$$\sigma_E{}^2 = \sigma_K{}^2 + \sigma_U{}^2$$
$$\sigma_E = \sqrt{\sigma_K{}^2 + \sigma_U{}^2}$$

Dados e resultados

Ao longo das 20 situações do experimento, foram utilizadas quatro molas diferentes, com massas (m) e constantes elásticas (k) listadas abaixo:

Mola	**Situações**	**k (N^{-5}/cm)**	**m (g)**
1	1 a 10	3750	3,8
2	1 a 10	3915	3,6
5	11 a 20	17000	5,8
6	11 a 20	16000	5,6

A massa do carrinho também variou em diferentes situações, conforme tabela abaixo:

Situações	**m (g)**
1 a 5	200
6 a 10	300
11 a 15	200
16 a 20	300

De acordo com as constantes elásticas da mola, o carrinho se encontrava em equilíbrio em diferentes posições:

Situações	**Posição de equilíbrio (cm)**
1 a 10	160
11 a 20	164

Portanto, as 20 situações estavam divididas em quatro grupos diferentes:

- Grupo 1 - Situações 1 a 5: Molas de massas iguais a 3,8 g e 3,6 g e constantes elásticas iguais a 3750 N^{-5}/cm e 3915 N^{-5}/cm, respectivamente. Carrinho com massa igual a 200 g.

- Grupo 2 - Situações 1 a 5: Molas de massas iguais a 3,8 g e 3,6 g e constantes elásticas iguais a 3750 N^{-5}/cm e 3915 N^{-5}/cm, respectivamente. Carrinho com massa igual a 300 g.

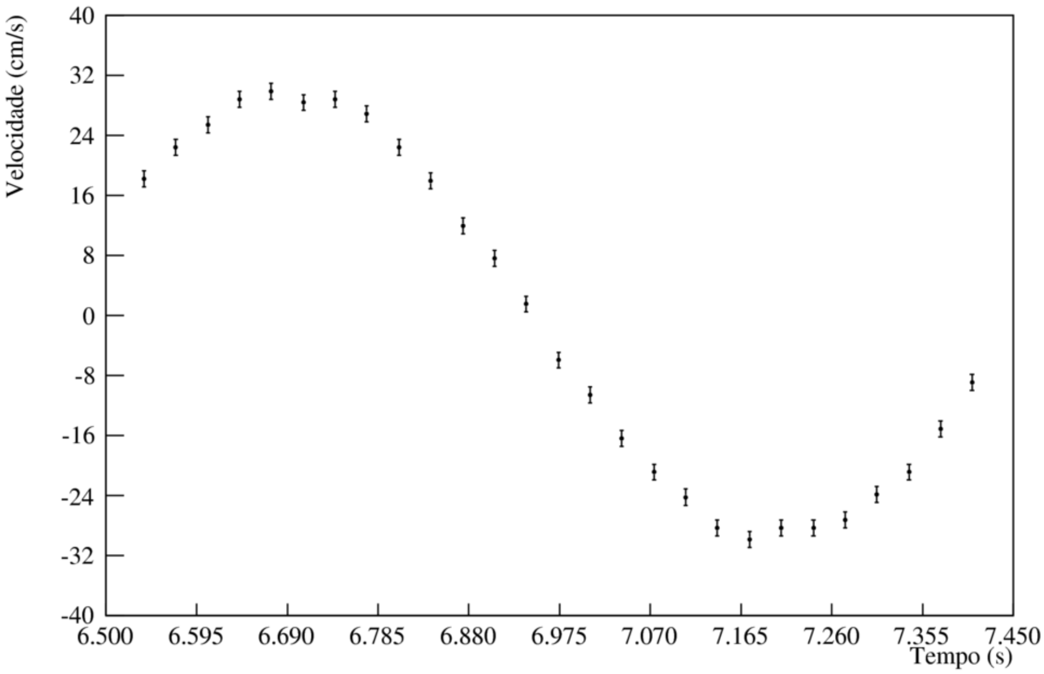
- Grupo 3 - Situações 1 a 5: Molas de massas iguais a 3,8 g e 3,6 g e constantes elásticas iguais a 17000 N^{-5}/cm e 16000 N^{-5}/cm, respectivamente. Carrinho com massa igual a 200 g.

- Grupo 4 - Situações 1 a 5: Molas de massas iguais a 3,8 g e 3,6 g e constantes elásticas iguais a 17000 N^{-5}/cm e 16000 N^{-5}/cm, respectivamente. Carrinho com massa igual a 300 g.

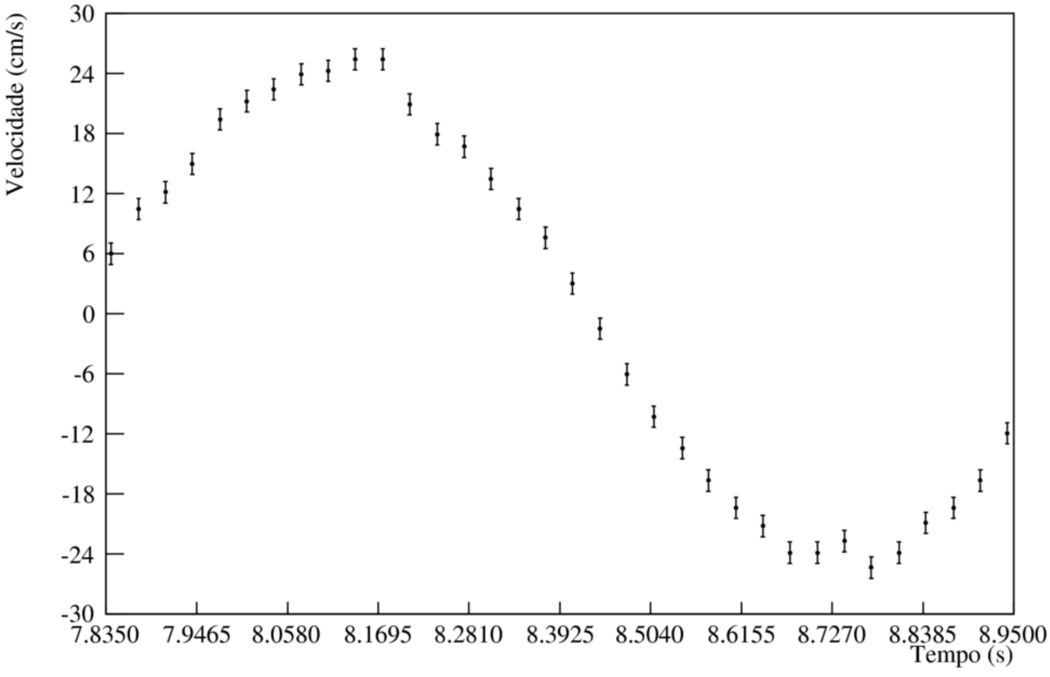
Assim, a análise foi feita a partir de uma situação em cada um dos quatro grupos.

Velocidade:

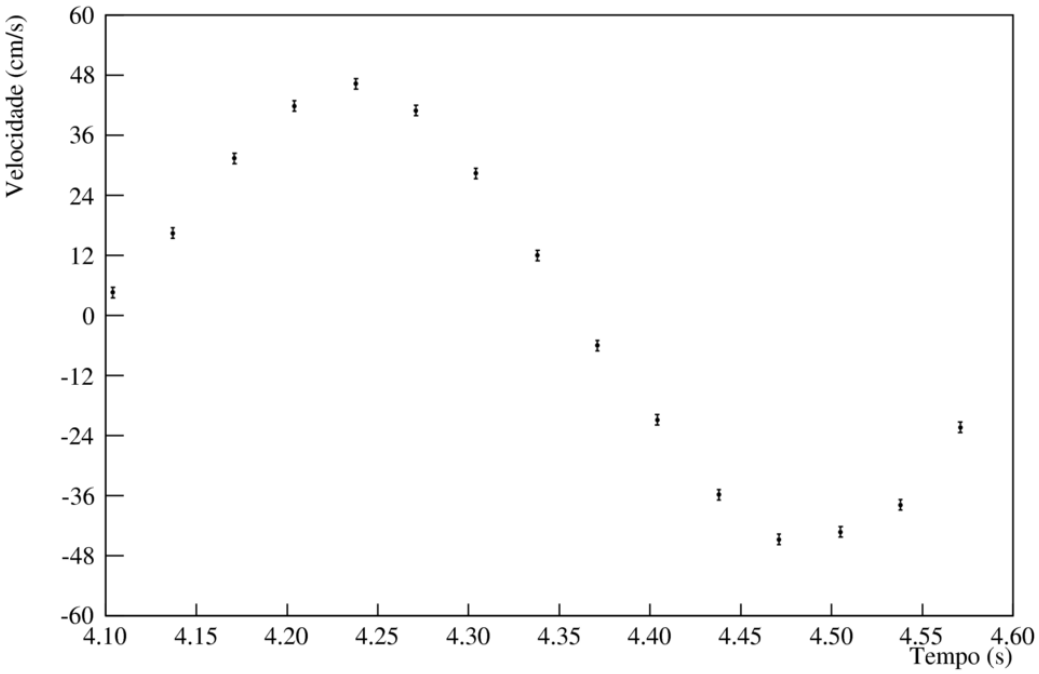
-Grupo 1- situação 1:



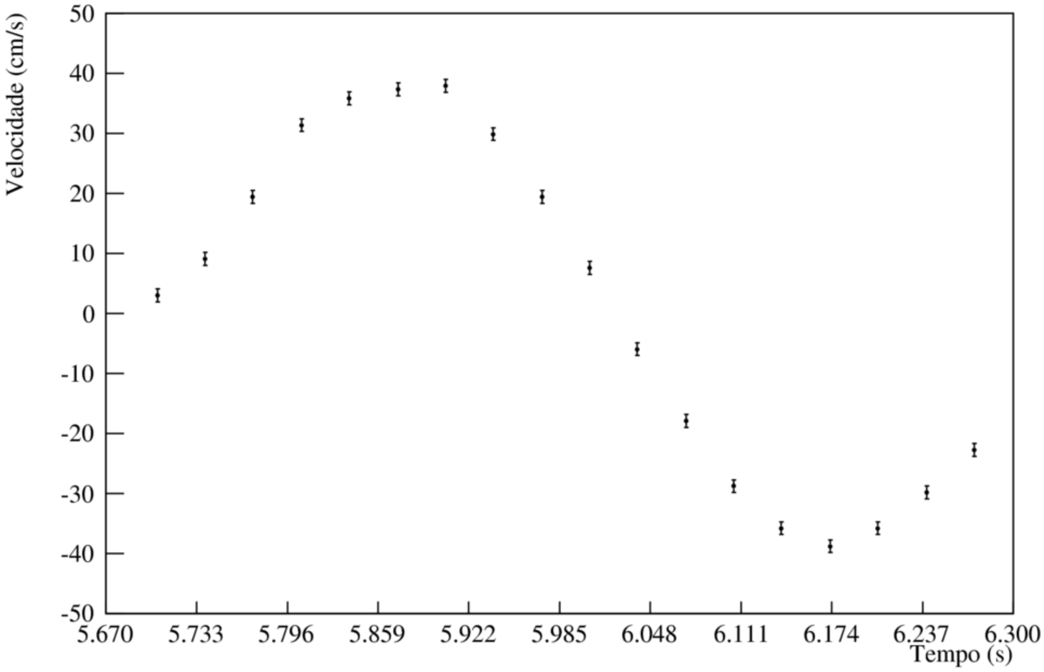
- Grupo 2 – Situação 6:



- Grupo 3 – situação 11:

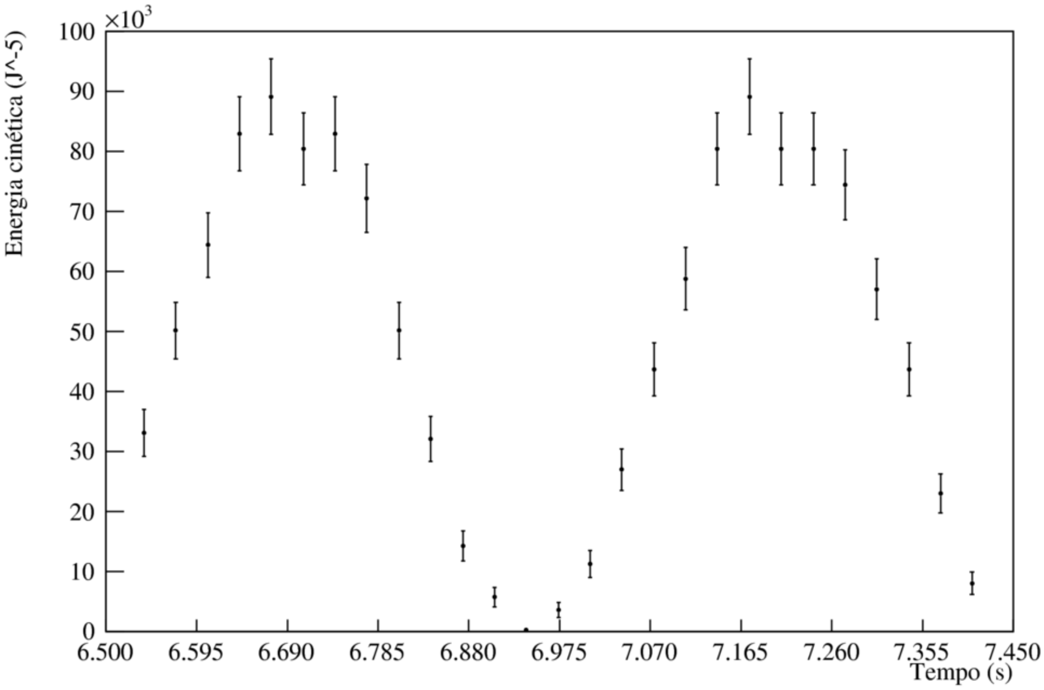


- Grupo 4 – Situação 16

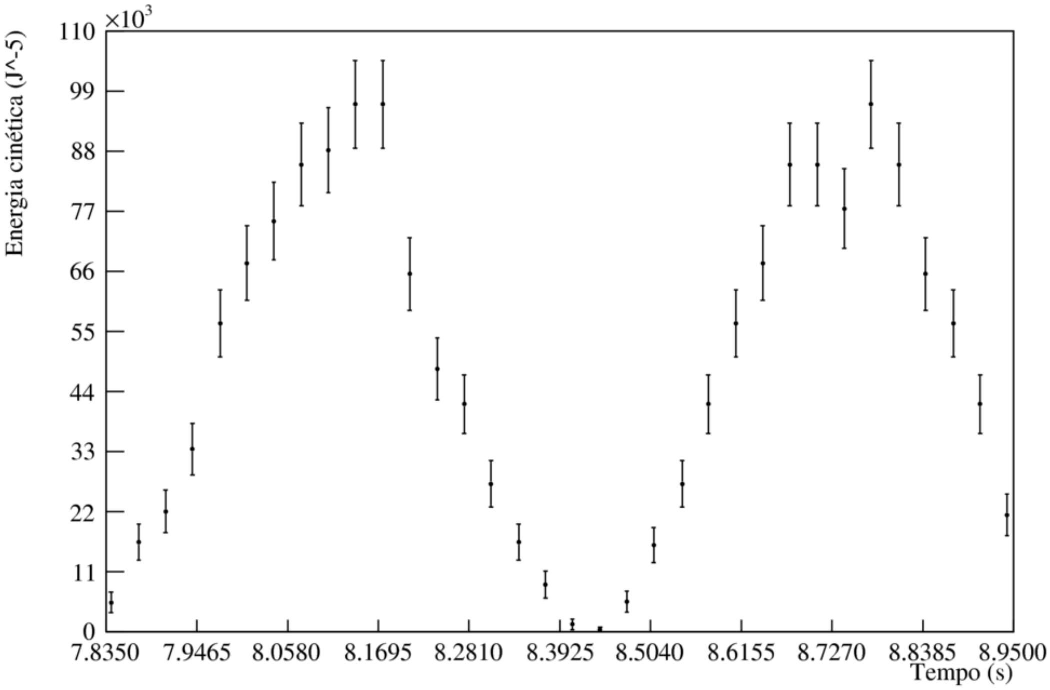


Energia Cinética

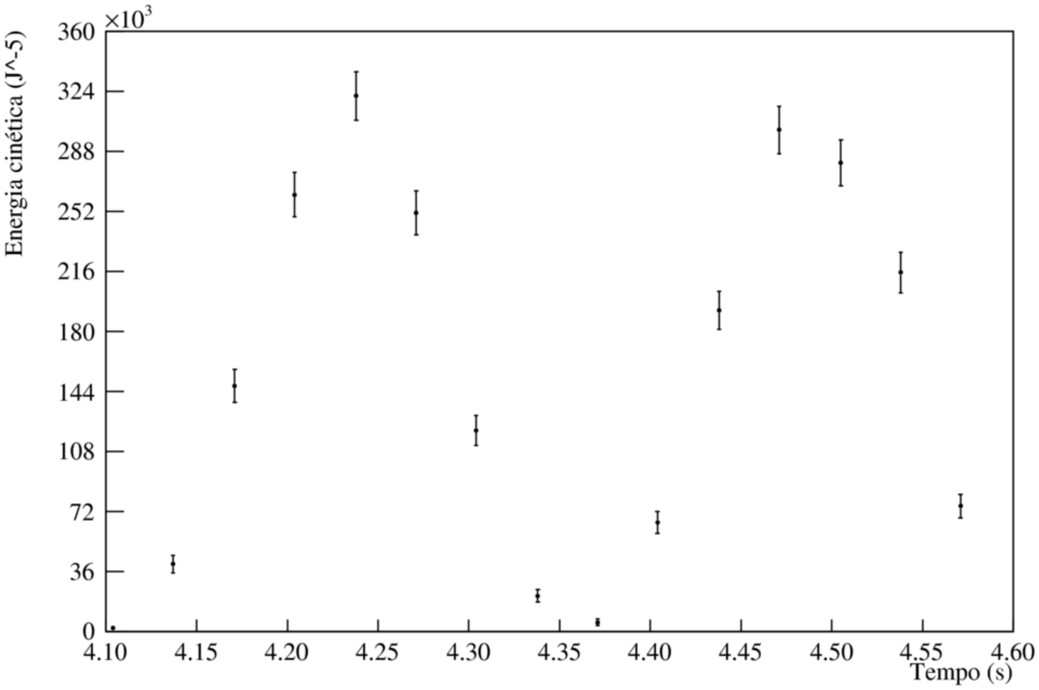
-Grupo 1- situação 1:



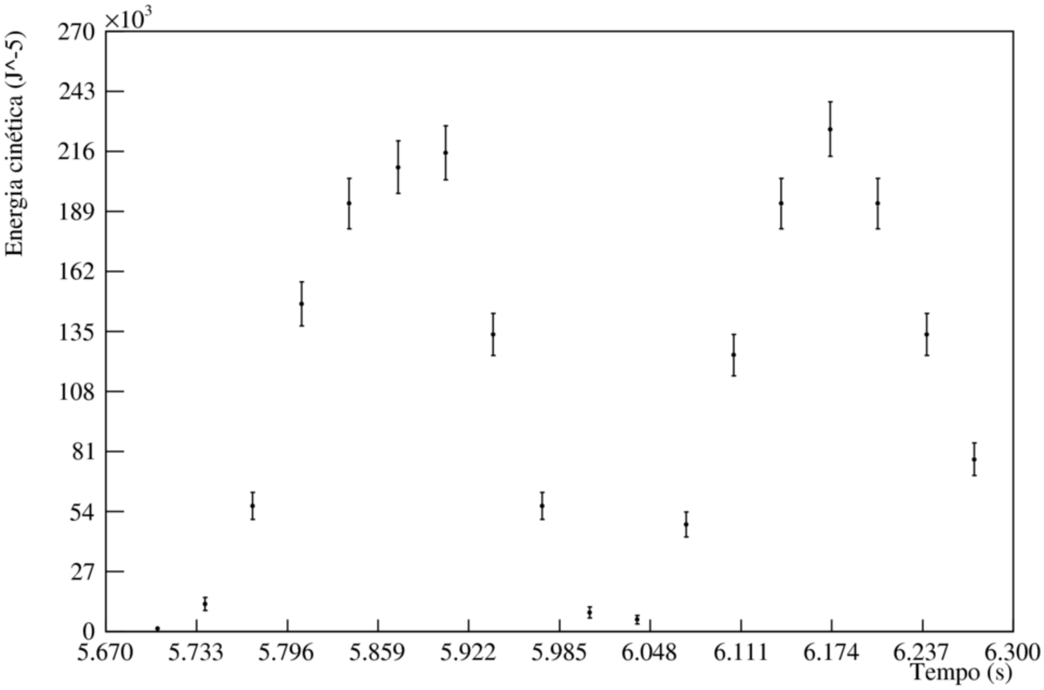
- Grupo 2 – Situação 6:



- Grupo 3 – situação 11:

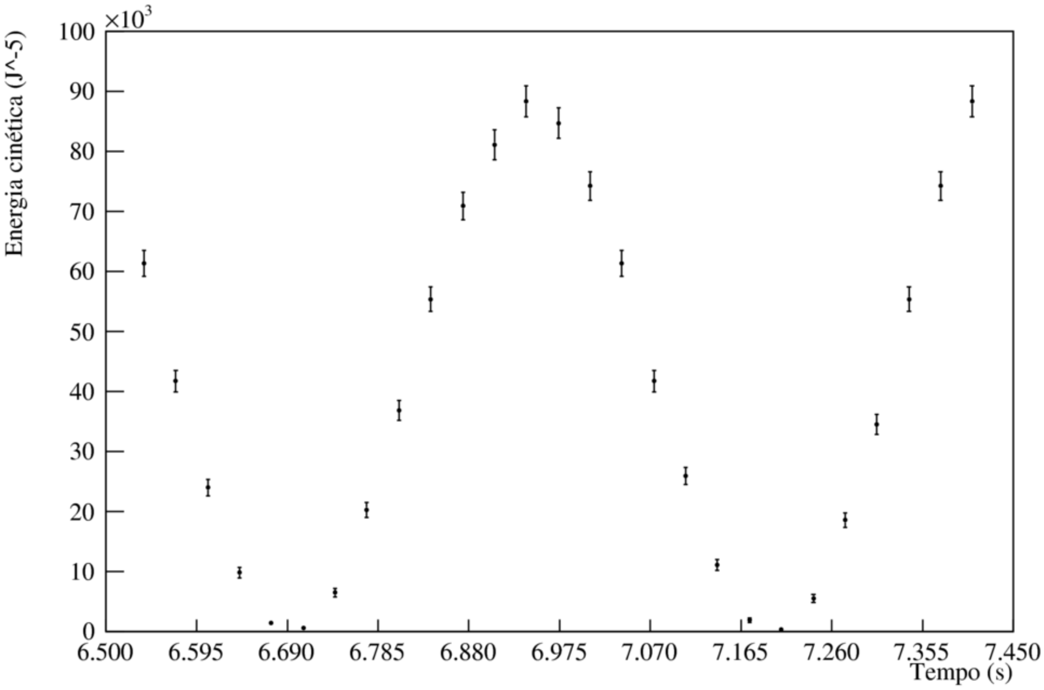


- Grupo 4 – Situação 16

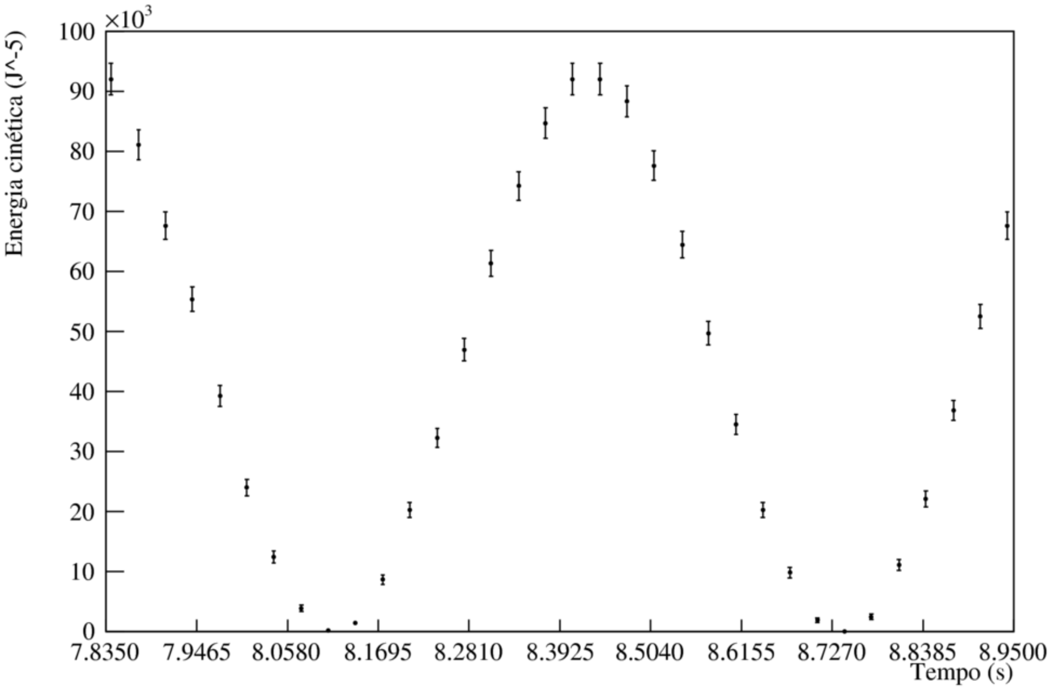


Energia Potencial Elástica

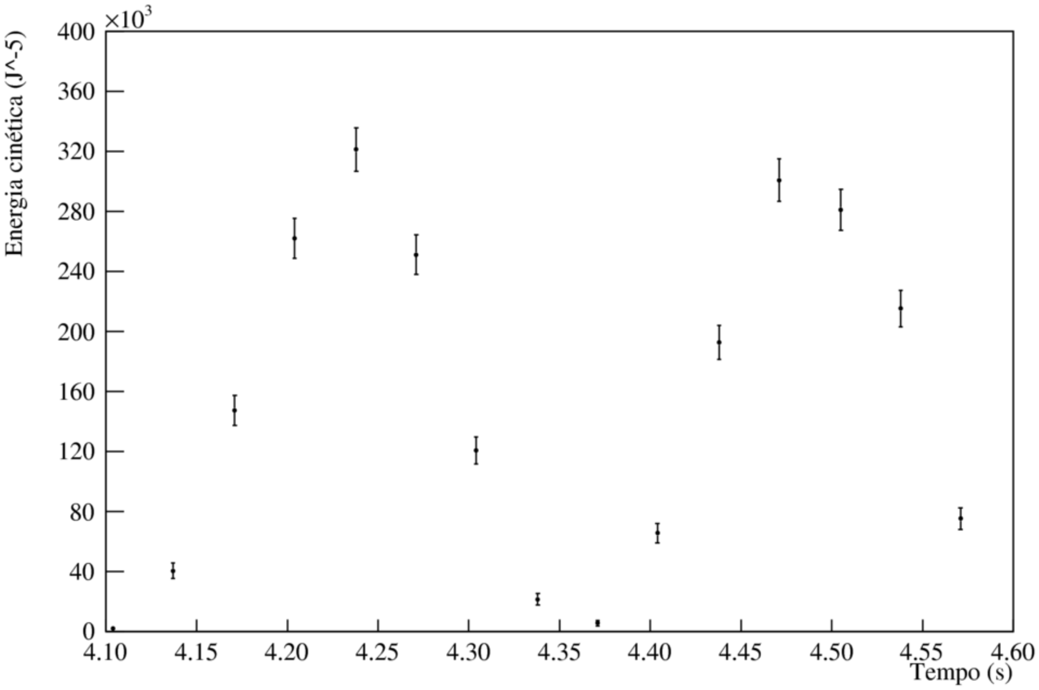
-Grupo 1- situação 1:



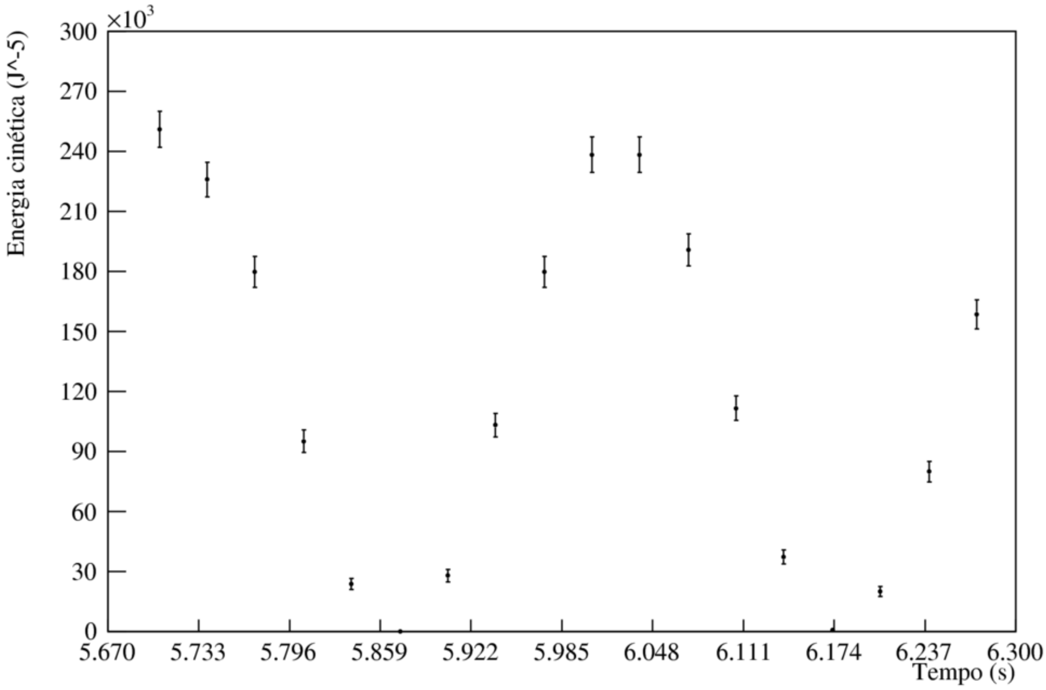
- Grupo 2 – Situação 6:



- Grupo 3 – Situação 11:

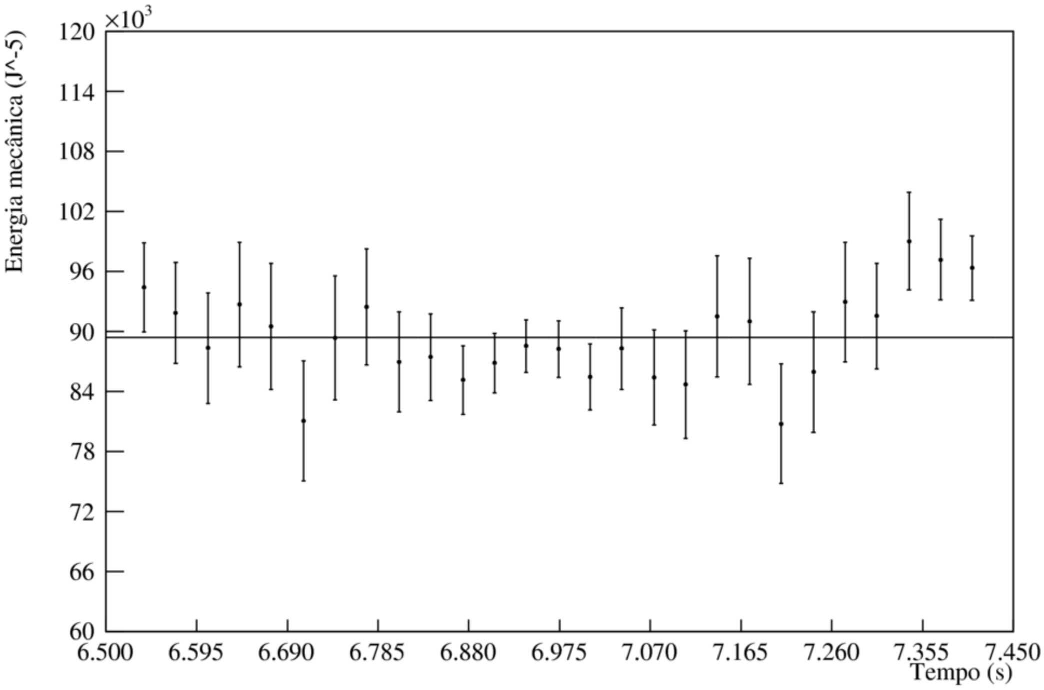


- Grupo 4 – Situação 16:

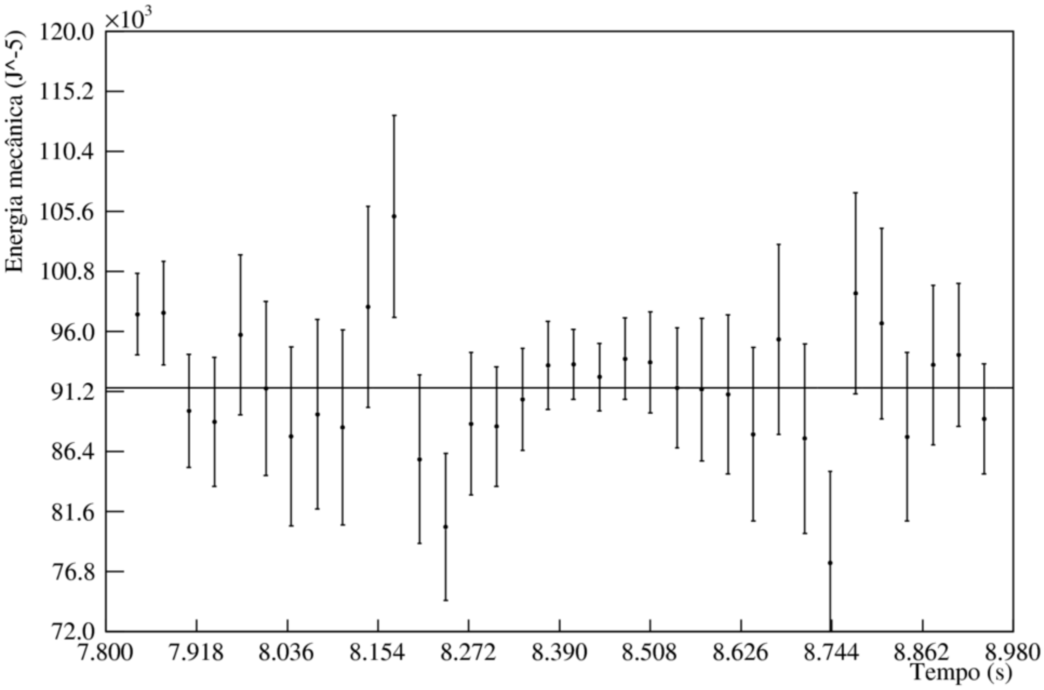


Energia Mecânica Total

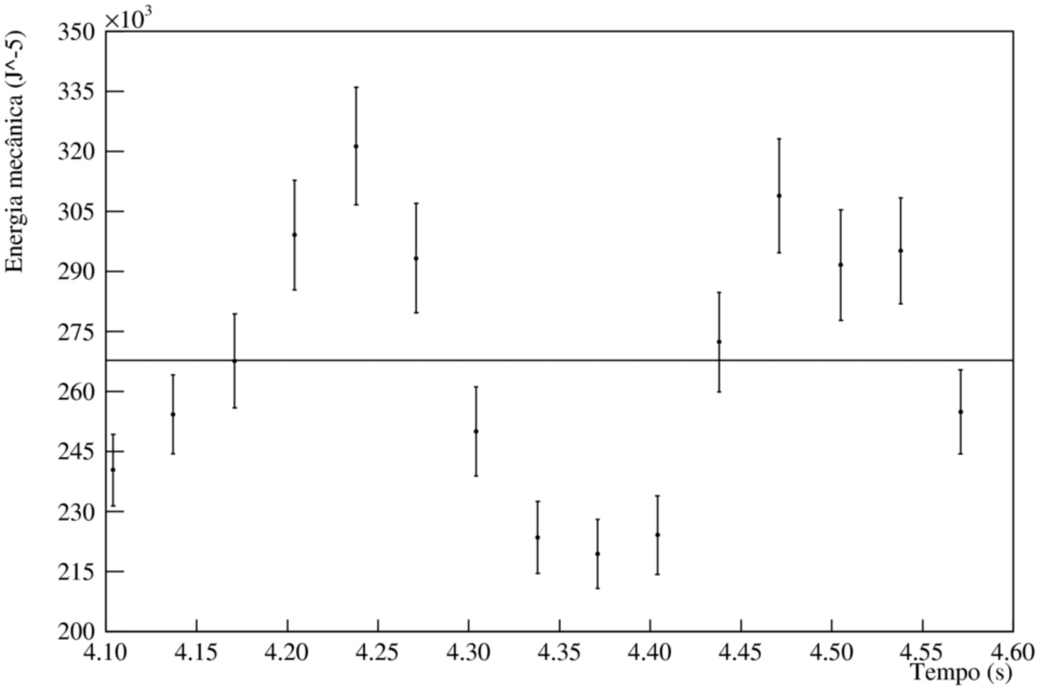
- Grupo 1 – Situação 1:



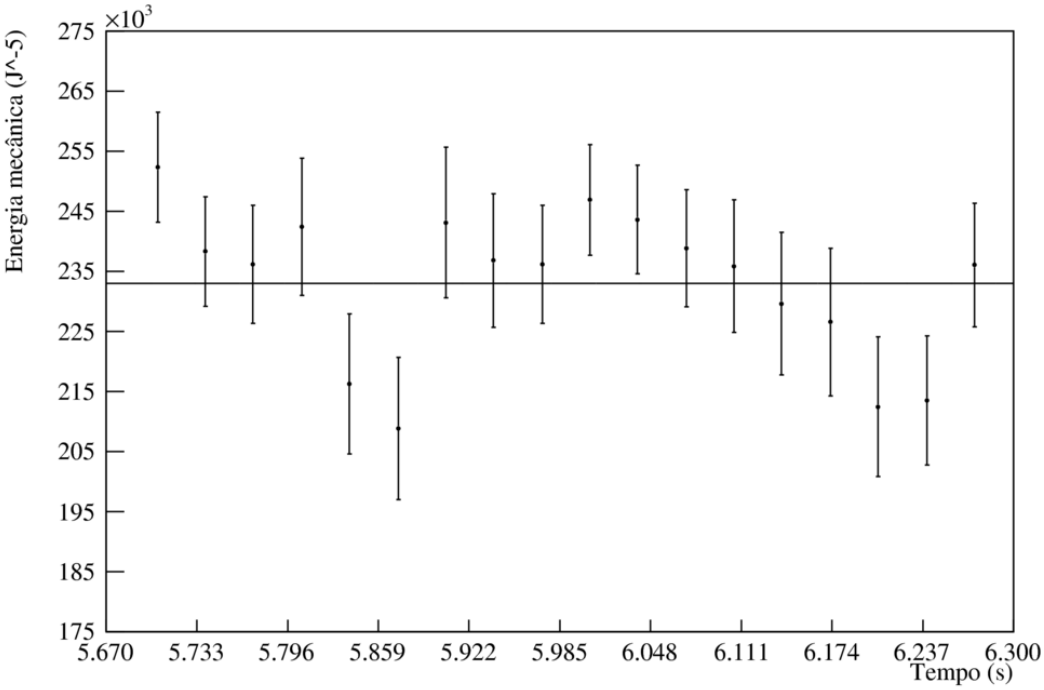
- Grupo 2 – Situação 6:



- Grupo 3 – Situação 11:



- Grupo 4 – Situação 16:



Analisando os gráficos, pode-se observar os seguintes fatos:

- O módulo da velocidade tende a ser máximo no ponto em que as duas molas estão equilibradas e tende a zero nos pontos de maior distensão das molas. A velocidade é positiva nos trechos em que o carrinho se desloca no mesmo sentido em que a trena está orientada e negativa trechos em que ele se desloca no sentido oposto à orientação da trena.

- A energia cinética é maior nos pontos em que a velocidade possui maior módulo e tende a zero nos pontos onde a velocidade tende a zero, uma vez que a energia cinética é função do quadrado da velocidade.

- A energia potencial elástica possui comportamento oposto ao da energia cinética, sendo máxima nos pontos em que a velocidade tende a zero e tendendo a zero nos pontos de máximo da velocidade.

- A energia mecânica total tende a flutuar ao redor de um determinado valor, ou seja, se conserva ao longo do tempo. Assim sendo possível de se ajustar uma reta de coeficiente angular zero e eixo y igual à média de todos os valores obtidos. Porém, no gráfico da situação 11, esse ajuste não foi satisfatório, uma vez que as incertezas ficaram demasiadamente subestimadas e há claramente uma tendência de a energia mecânica variar ao longo do tempo de forma similar à energia potencial elástica, sugerindo que os valores obtidos para energia cinética estivessem ligeiramente subestimados ou os valores obtidos para energia potencial elástica estivessem ligeiramente superestimados. Nos demais gráficos, os ajustes foram razoáveis, apesar da presença de alguns pontos fora da reta, o que possivelmente se deve à presença de pequenas forças dissipativas, como resistência do ar, por exemplo.

Conclusão

Quando o carrinho está no ponto de equilíbrio, pode-se verificar que sua energia cinética é máxima e sua energia potencial elástica tende a zero. Quando ele está em algum ponto de elongação máxima de uma das molas, sua energia cinética tende a zero e sua energia potencial elástica é máxima. A energia mecânica total tende a ser constante ao longo do tempo, sendo, no experimento estudado, a soma da energia potencial com a energia cinética.

Através do experimento, foi possível de se observar alguns conceitos básicos da Mecânica clássica, como a conservação da energia mecânica e as diferentes formas em que ela pode se manifestar, como em energia potencial e energia cinética.