



Estatística em Feixes de Luz

Por *Gabriel Nagaoka 7994169*

Luiz Couto 3470373

Professor *Zwinglio Guimarães*



Instituto de Física, Universidade de São Paulo

2015

1 Introdução

A motivação principal desse trabalho é aplicar alguns conceitos explorados na disciplina de MEFÉ, bem como exemplificar algumas distribuições e mostrar a importância da análise estatística quando tratamos feixes de luz em laboratório.

É interessante notar que aqui, a estatística não será usada para tratar erros, como feito nos laboratórios didáticos do curso, mas para descrever o comportamento de lasers, que são estatísticos por natureza. Analizaremos o caso de um feixe de luz sendo detectado (absorvido) por um foto-diodo, e como veremos, esse caso simples já desafia o eletromagnetismo clássico de Maxwell, o qual descreve a luz com a ondulatória, e evidencia o caráter "corpúscular" da luz.

2 Experimento

Temos agora o feixe de um Laser incidindo sobre um detector. Suponhamos que a detecção ocorra durante um intervalo de tempo T , seja \bar{N} o número médio de fótons presentes nessa parte do feixe que será detectado (de comprimento $L = c.T$). Agora dividimos L em n partes iguais, e tomamos n grande tal que valha

$$\frac{\bar{N}}{n} \ll 1 \quad (1)$$

Note que dividir L em n pedaços, equivale a dividir T em n pedaços. Assim a probabilidade de que detectemos um fóton em N segmentos é :

$$\left(\frac{\bar{N}}{n}\right)^N \quad (2)$$

E a probabilidade de que não detectemos um fóton em N segmentos é

$$\left(1 - \frac{\bar{N}}{n}\right)^N \quad (3)$$

Podemos aproximar a probabilidade de uma detecção pela razão de , e assim recuperamos o resultado de uma distribuição binomial quando calculamos a probabilidade de detectarmos N fótons no feixe de duração temporal T :

$$P_n(N) = \frac{n!}{N!(n-N)!} \left(\frac{\bar{N}}{n}\right)^N \left(1 - \frac{\bar{N}}{n}\right)^{n-N} \quad (4)$$

Onde o primeiro fator multiplicativo vem do total de combinações que resultariam em N eventos em uma partição n .

Vejam o significado físico das variáveis em questão. T é o intervalo de tempo que decorre durante o experimento e pode ser facilmente controlado. \bar{N} é o número médio de fótons que chegam ao detector, durante intervalo de tempo T , eu seja, é proporcional ao próprio T e também proporcional à potência do Laser (P_{ot}):

$$P_{ot} = \frac{\bar{N}\omega\hbar}{\Delta t} \quad (5)$$

Onde Δt é o tempo em que se calcula \bar{N} . Portanto podemos controlar \bar{N} independente de T . O parametro n pode ser relacionado com o tempo de integração do detector, ou seja, o tempo em que o detector toma a medida é dado por

$$\tau = \frac{T}{n} \quad (6)$$

Isso significa que todos os fótons que chegam durante esse intervalo τ contribuem para a intensidade medida. A eletrônica atual permite que τ seja muito pequeno, de modo que seja muito boa a aproximação $n \rightarrow \infty$.

Com essa consideração podemos tomar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{N!(n-N)!} \left(\frac{\bar{N}}{n}\right)^N \left(1 - \frac{\bar{N}}{n}\right)^N \quad (7)$$

como $n \gg N$ podemos fazer os termos $n-1, n-2, n-3, \dots, n-N$ como aproximadamente n , assim teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-N)!}{N!(n-N)!} \left(\frac{\bar{N}}{n}\right)^N \left(1 - \frac{\bar{N}}{n}\right)^N \quad (8)$$

Mas :

$$n(n-1)(n-2)\dots(n+1-N) = n^N \quad (9)$$

Então podemos simplificar o limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(N) = \frac{\bar{N}^N}{N!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\bar{N}}{n}\right)^{n-N} \quad (10)$$

Portanto, no limite em que τ é muito pequeno, temos uma distribuição de Poisson:

$$P(N) = \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}} \quad (11)$$

Como sabemos, a média de uma distribuição é:

$$\langle N \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} N.P(N) \quad (12)$$

$$\langle N \rangle = \sum_{N=1}^{\infty} N \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}} = \bar{N} e^{-\bar{N}} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\bar{N}^{N-1}}{(N-1)!} \quad (13)$$

Notando que :

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{\bar{N}^{N-1}}{(N-1)!} = e^{\bar{N}} \quad (14)$$

Finalmente, a média dessa distribuição é :

$$\langle N \rangle = \bar{N} \quad (15)$$

Seguindo o mesmo raciocínio ¹, chegamos que a variância dessa distribuição é a sua própria média:

$$(\Delta N)^2 = \bar{N} \quad (16)$$

3 Geração de Corrente no Detector

Para um feixe incidente em um detector, calcularemos a tensão de saída: O feixe se caracteriza por ter \bar{N} fótons em média, chegando ao detector em um intervalo de tempo qualquer, que tomaremos muito pequeno (aproximadamente $10^{-3}s$). Supondo que o feixe seja perfeito, e que na verdade, cheguem exatamente N elétrons por intervalo de tempo, então a resposta do detector será uma corrente elétrica dada por:

$$i = \frac{eN}{\tau} + i_J \quad (17)$$

Onde e é a carga do elétron, e τ uma constante característica do detector, inversamente relacionada com a eficiência. O termo i_J é denominada corrente de Johnson, que é fruto de um ruído térmico totalmente aleatório no sistema. Analisemos a situação na qual chegam ao detector \bar{N} , então a equação se modifica para:

$$\bar{i} = \frac{e\bar{N}}{\eta} \quad (18)$$

Note que a média de i_J é por ser um ruído branco. E mais adiante, usaremos do fato que essa corrente não se correlaciona com nenhuma variável do sistema pela mesma razão ². Queremos quantificar de alguma forma, o ruído do nosso laser, e para isso precisamos analisar o ruído da corrente no detector. Tratando i e N como variáveis aleatórias de média \bar{i} e \bar{N} , e sendo $(\Delta i)^2$ e $(\Delta N)^2$ as respectivas variâncias :

$$(\Delta i)^2 = \frac{e^2}{\eta^2} (\Delta N)^2 + (\Delta i_J)^2 \quad (19)$$

Como N segue uma distribuição de Poisson, sua variância é sua média, então:

$$(\Delta i)^2 = \frac{e^2}{\eta^2} \bar{N} + (\Delta i_J)^2 \quad (20)$$

Mas \bar{N} está diretamente relacionado com a corrente média medida no detector, então

$$(\Delta i)^2 = \frac{e}{\eta} \bar{i} + (\Delta i_J)^2 \quad (21)$$

¹Como isso foi visto em aula, e já provamos (15), achei sem sentido perder mais algumas linhas para provar (16)

²Ruídos brancos são caracterizados por terem a mesma potência em todas as faixas de frequência, no caso do ruído térmico, a potência cresce com a temperatura. No caso do experimento, a temperatura foi mantida constante.

É importante notar que só chegamos em uma relação linear entre Variância e Média da corrente (eq. 21) pois a distribuição em questão é uma Poisson. De fato, utilizamos argumentos geométricos (descrito na seção Experimento) para chegar a tal conclusão, mas a abordagem de quantização do campo EM ³ chega a mesma conclusão mais formalmente.

4 Resultados

Usamos um Laser Ti-Sa⁴ e um fotodiodo como detector, os dados foram processados por uma interface Lab-View :

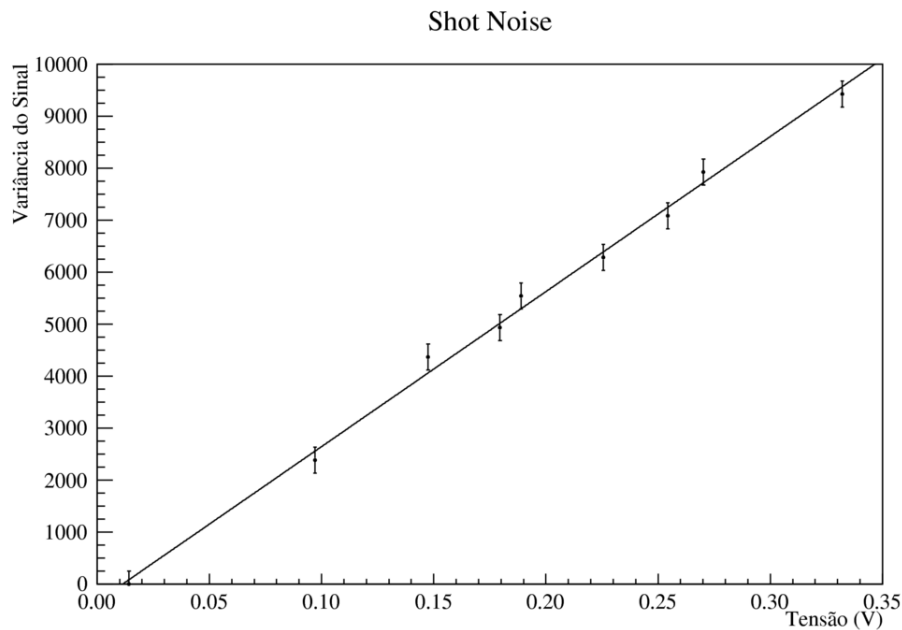


Figura 1: Relação Gráfica da eq.21.

Um ajuste linear nos mostra um $\chi^2 = 6.11$ com 7 graus de liberdade.

5 Conclusão

O método de medição é eficiente na calibração de configurações experimentais para ótica quântica. Conhecer o ruído quântico do sistema é o mínimo para a realização de um bom experimento. É importante enfatizar que esse ruído não é fruto de imprecisões nos instrumentos de medida, mas uma consequência direta da quantização dos campos, que agora estão sujeitos ao princípio da incerteza.

³Ver D.F.Wells-Quantum Optics, 2nd Edition, Springer

⁴Esses Lasers são extremamente estáveis usam cristais de Titânio-Safira para gerar os feixes que incidem nos detectores

Referências

- [1] D.F. Wells, *Quantum Optics*, Springer, 2008.
- [2] J.H. Voulo, *Fundamentos da Teoria de Erros*, SP, Edgard Blücher, 1996.
- [3] Z.Guimarães, *Notas de Aula do Curso de MEFE - 2015*, SP, *Universidade de São Paulo*, 2002.
- [4] Alexandre Suaide, *Um pouco mais sobre chi-quadrado*, SP, Roteiro de aula da disciplina física experimental 2 do curso de bacharelado em física da *Universidade de São Paulo*.