LISTA DE EXERCÍCIOS 2 – Cálculo Numérico

Métodos de Integração: Trapézios e Simpson

1. Seja f definida em um intervalo contendo x_0 e x_1 (com $x_0 < x_1$). Seja $p = p_f[x_0, x_1]$ o polinômio interpolador de grau 1 de f para os pontos x_0 e x_1. Obtenha
$$\int_{x_0}^{x_1} p\,(x)dx.$$
Faça desenhos ilustrativos de f e p (apenas possibilidades a esmo), e reflita sobre a possibilidade de usar a integral de p para aproximar a integral da f.
2. Sejam agora $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ e f definida em um intervalo que contém esses pontos. Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ use o procedimento do Ex. 1 para aproximar a integral da f (use a fórmula obtida, não o procedimento inteiro – basta adaptá-lo trocando x_0 e x_1 por x_{i-1} e x_i). Use a soma dessas estimativas para obter uma fórmula para a aproximação de $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$.
3. Aplique a fórmula do Ex. 2 para aproximar a integral de $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ no intervalo $[0,1]$ usando a partição $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{0.0, 0.3, 0.5, 0.6, 1.0\}$.
4. Voltando ao Ex. 2, suponha que a partição $\{x_0, \ldots, x_n\}$ é *regularmente espaçada,* isto é, $x_i - x_{i-1} = h$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Observe que o valor de h tem que ser um submúltiplo de $x_n - x_0$, ou seja,
$$h = \frac{x_n - x_0}{n}.$$
Isto vai simplificar a estimativa da integral, pois a constante h pode ser colocada em evidência na soma das estimativas. Obtenha essa estimativa simplificada.
5. Volte agora à integral do Ex. 3, fazendo a aproximação da integral com a partição regularmente espaçada $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0\}$.
6. Ah, por sinal, qual seria o valor exato da integral dessa f no intervalo $[0,1]$?
7. Agora vamos meio que repetir a ideia desenvolvida e aplicada nos Exs. 1 a 5, mas fazendo a aproximação de f por outro polinômio interpolador. Seja f definida no intervalo $[x_0, x_1]$ e seja m_1 o ponto médio do intervalo, isto é, $m_1 = (x_0 + x_1)/2$. Seja $q = p_f[x_0, m_1, x_1]$ o polinômio interpolador de grau 2 de f para os pontos x_0, m_1, x_1. Obtenha a integral
$$\int_{x_0}^{x_n} q(x)dx.$$
De novo, reflita sobre a possibilidade de usar essa integral para aproximar a integral da f no mesmo intervalo. Será que vai ser melhor do a aproximação de grau 1?
8. Agora, como no Ex. 2, use essa fórmula (adaptando-a, é claro) em cada intervalo da partição $x_0 < \cdots < x_n$, some tudo e obtenha uma nova fórmula de aproximação para a integral de f. (Os pontos médios dos intervalos serão $m_1, \ldots, m_n$.)
9. Obtenha a aproximação pedida no Ex. 3, agora com essa nova técnica. Lembre-se que a primeira coisa a fazer é calcular os pontos médios.
10. Agora veja como a fórmula simplifica quando a partição é regularmente espaçada. Use a mesma nomenclatura para h: é o tamanho de cada célula da partição. (Cuidado, pois em alguns textos usa-se h para denotar metade do tamanho da célula.)
11. Obtenha de novo a estimativa da integral, usando a partição do Ex. 5.

Nos Exs. 1 a 5 você descobriu o Método dos Trapézios. Nos Exs. 7 a 11 você descobriu o Método de Simpson.